

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXV

1928 (VI)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1928 (VI)

ATTI

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEL LINGUAGGIO

ANNO CCXXV

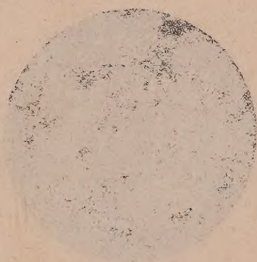
MDCCCXXV

SECONDA SERIE

RENDICONTI

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

VOLUME XXV



ROMA

Tipografia della Reale Accademia

MDCCCXXV

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1928 (Anno VI).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. GIORGI.

1. L'interessamento benevolo con cui è stata accolta la mia Nota ultima sullo stesso argomento ⁽²⁾ m'induce a presentare qualche osservazione ulteriore. In essa Nota, considerata una matrice qualunque Φ , finita o infinita, e un simbolo di funzione $f(\)$, analitica o no, la quale sia composta con parametri tutti scalari (cioè non vettori e non matrici, e non quantità dipendenti dai coefficienti di Φ), ho definito una matrice $\Psi = f(\Phi)$ in modo tale che sia lecito operare sui simboli $f(\Phi)$ con gli stessi algoritmi come se in luogo di Φ figurasse una quantità scalare. Indicherò con la sigla DFT (definizione teorica) questa convenzione di carattere generale.

Lo sviluppo effettivo che si deduce direttamente dalla DFT dipende dalla riduzione di Φ alla forma canonica, e ne ho mostrato la forma esplicita pel caso della Φ non parabolica. Ho accennato come la definizione, accompagnata con un passaggio al limite, si estenda al caso parabolico; e qui credo utile mostrare anche la forma esplicita che ne risulta. Sia la matrice proposta, ridotta alla forma canonica mediante un cambiamento di variabili, nel modo noto. Consideriamo separatamente ciascuna delle matrici

(1) Presentata nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) *Sulle funzioni delle matrici*, questi « Rendiconti » (seduta del 5 febbraio 1928), vol. VII, serie 6^a (1^o sem., 1928) pp. 178-184.

subordinate che la compongono, corrispondenti ai divisori elementari di Weierstrass: ognuna opera in uno spazio subordinato che è trasformato in se stesso per effetto della matrice data; quindi segue dalla DFT che per operare col simbolo $f()$ sulla matrice data, basta operare collo stesso simbolo su ogni matrice subordinata, considerata nello spazio che le corrisponde. Sia allora

$$(1) \quad \Phi_i = \begin{vmatrix} \rho & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \rho & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \rho \end{vmatrix}$$

una di queste matrici subordinate, con n coefficienti tutti eguali a ρ , nella diagonale principale, e con $n - 1$ coefficienti tutti eguali all'unità, nella parallela consecutiva, e gli altri tutti zeri. Si avrà

$$(2) \quad f(\Phi_i) = \begin{vmatrix} f(\rho) & f'(\rho) & \frac{f''(\rho)}{1 \cdot 2} \dots \frac{f^{(n-1)}(\rho)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\rho) & f'(\rho) & \dots \dots \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots f(\rho) \end{vmatrix}.$$

Cioè la regola per formare $f(\Phi_i)$ risulta questa: i coefficienti nella diagonale principale sono tutti $f(\rho)$; quelli della parallela consecutiva sono $f'(\rho)$; e così via, nelle successive parallele figurano $\frac{f''(\rho)}{1 \cdot 2}$, $\frac{f'''(\rho)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, ecc., fino ad arrivare al termine estremo $\frac{f^{(n-1)}(\rho)}{(n-1)!}$ che figura una sola volta.

In ogni caso, si vede che l'applicazione diretta della DFT nel calcolo pratico richiede la previa riduzione alla forma canonica. Alcune volte, questo non presenta inconvenienti; e così nelle applicazioni che ho fatto altrove alle matrici con un'infinità continua di elementi, e al calcolo degli operatori funzionali, non è stato necessario trasformare ulteriormente l'espressione di $f(\Phi)$. Ma altre volte si possono richiedere espressioni ulteriormente ridotte che rendano agevole il calcolo dei coefficienti di $f(\Phi)$ in funzione di quelli di Φ . Questo calcolo, se deve eseguirsi in modo completo, riesce quasi sempre difficile e laborioso. Interessa quindi dire di varie espressioni che sono state proposte a questo oggetto, in casi di varia generalità.

2. Sylvester per primo⁽¹⁾ ha considerato le potenze e radici di ordine finito, e ha dato una formola ricorrente per calcolare i coefficienti di Φ^n , facendo intervenire le radici ρ dell'equazione fondamentale. La sua formola è stata successivamente estesa da lui stesso e da vari autori.

In un'esposizione riassuntiva, Cartan⁽²⁾ riporta una formola generale che consegue da questi tentativi, e che si ricava col metodo d'interpolazione di Lagrange. Questa formola, nel caso di radici ρ tutte distinte, si scrive così

$$(3) \quad f(\Phi) = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(\Phi - \rho_1)(\Phi - \rho_2) \cdots (\Phi - \rho_n)}{(\rho_i - \rho_1)(\rho_i - \rho_2) \cdots (\rho_i - \rho_n)} f(\rho_i)$$

[con omissione, a numeratore e a denominatore, dei fattori $(\Phi - \rho_i)$ e $(\rho_i - \rho_i)$ rispettivamente]. La giustificazione si ha osservando che se Φ è di ordine finito, la nota equazione di Cayley permette di sostituire a una espressione analitica qualunque $f(\Phi)$ una espressione razionale (però con coefficienti che dipendono da quelli di Φ); e nel caso di radici tutte distinte, tale espressione razionale $R(\Phi)$ può essere costruita in modo che quando al posto di Φ si sostituisce una variabile scalare ρ , risulti $R(\rho) = f(\rho)$ per tutti i valori $\rho = \rho_i$. Ne risulta la formola scritta. L'estensione al caso di radici ripetute è ottenuta imponendo che per ogni radice ρ_i multipla dell'ordine m , la coincidenza avvenga non solo tra $f(\rho)$ e $R(\rho)$, ma anche tra le corrispondenti derivate di queste funzioni fino all'ordine $m - 1$. Nel caso però in cui $f(\Phi)$ ammetta valutazioni multiple, la formola non sempre permette di ricavarle tutte⁽³⁾.

3. Pel caso delle matrici di secondo ordine, formole effettive per calcolo dei coefficienti di Φ^n sono state date dal prof. Bottasso⁽⁴⁾ per mezzo di polinomi ricorrenti e di determinanti. Altre sono state date dalla dott.ssa Porcu-Tortrini⁽⁵⁾, in varie forme e con varia generalità, fino a dare l'espressione esplicita, sempre per Φ di secondo ordine, di una $f(\Phi)$ qua-

(1) J. J. SYLVESTER, *Sur les puissances et les racines des substitutions linéaires*, «Comptes Rendus» de Paris, vol. 94 (1882) pp. 55-59.

(2) E. CARTAN, sotto il titolo *Nombres complexes à multiplication associative*, nell'edizione francese dell'*Enciclopedia delle Scienze Matematiche*, vol. I, parte 1^a, cap. V, art. 31, p. 438.

(3) Questo fatto è stato messo in rilievo per la prima volta da J. J. SYLVESTER, nella Nota *Sur les racines des matrices unilinaires*, «Comptes Rendus» de Paris, vol. 94 (1882), pp. 396-399, mostrando che la matrice unitaria (matrice della trasformazione identica) ammette potenze frazionarie che non risultano dalla formola (1) o dalle sue trasformate.

(4) M. BOTTASSO, *Omografie vet'oriali nel piano*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», tomo XXXV (1913), pp. 1-46.

(5) E. PORCU-TORTRINI, Tre Note negli «Atti della Pontificia Accademia delle Scienze», vol. LXXX, anno 1927; detta, *Calcolo delle funzioni qualunque delle matrici di second'ordine*, questi «Rendiconti», vol. VII, serie 6^a (1^o sem., 1928), pp. 206-208.

lunque. Ma in quest'ultimo risultato intervengono le due radici ρ_1 e ρ_2 della equazione fondamentale, che nelle formole del tipo Bottasso non intervenivano.

4. Immediatamente successiva alla mia Nota è stata una, molto importante, del prof. Fantappiè⁽¹⁾, che dà il risultato per una Φ di ordine finito qualunque,

Il Fantappiè ha avuto l'idea, veramente ingegnosa e originale, di considerare i coefficienti ψ_{rs} della matrice $\Psi = f(\Phi)$ come « funzionali », cioè come quantità che dipendono funzionalmente dal simbolo di funzione $f(\)$. Facendo l'ipotesi che questa $f(\)$ sia analitica, e applicando la sua teoria dei funzionali analitici, egli ne deduce equazioni che danno i valori delle ψ_{rs} .

Di questa deduzione si può rendere conto così nella terminologia usuale. Col simbolo $F_{rs}[f(\rho)]$, il Fantappiè indica il coefficiente ψ_{rs} . Col nome di funzione indicatrice $V_{rs}(\rho)$, indica il coefficiente di rango r, s , nella matrice $\frac{1}{\Phi - \rho}$, dove ρ è uno scalare che può prendere valori reali o complessi qualunque. A causa dei teoremi noti sul quoziente delle matrici, si ha che dicendo $D(\rho)$ il determinante della matrice $\Phi - \rho$, cioè il primo membro dell'equazione fondamentale di Φ , e indicando con $D_{sr}(\rho)$ il complemento algebrico, in questo determinante, dell'elemento di linea s e di colonna r , si può scrivere

$$(4) \quad V_{rs}(\rho) = \frac{D_{sr}(\rho)}{D(\rho)}.$$

A questo punto il Fantappiè si appoggia alla sua teoria per dire che ψ_{rs} è uguale al prodotto di $2\pi i$ per l'integrale curvilineo di $V_{rs}(\rho) f(\rho)$ esteso, nel piano della variabile complessa ρ , a una curva chiusa che egli chiama *separatrice*; questa curva racchiude nel suo interno tutti i punti singolari della $f(\rho)$, e lascia all'esterno quelli della $V_{rs}(\rho)$; e poichè questi ultimi sono in numero finito, l'espressione viene ad essere uguale alla somma dei residui di $[-V_{rs}(\rho) f(\rho)]$ presi nei punti singolari della funzione razionale $V_{rs}(\rho)$; questi, a loro volta, sono i valori ρ_i , radici della equazione caratteristica di Φ . Egli ne deduce una formola che, scritta nel caso regolare di radici ρ_i tutte distinte⁽²⁾, assume la forma

$$(5) \quad \psi_{rs} = - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{D_{sr}(\rho_i)}{D'(\rho_i)} f(\rho_i)$$

(1) L. FANTAPPIÈ, *Le calcul des matrices*, « Comptes Rendus » de Paris, vol. 186 (5 marzo 1928), pp. 619-621.

(2) Da molti matematici questo caso è considerato come particolare rispetto a quello in cui vi sono radici multiple. Questa subordinazione è giustificata solamente quando il confronto si fa a partire da un dato sistema di valori ρ_i . Con riferimento alle applica-

dove $D'(\rho)$ significa $\frac{d}{d\rho} D(\rho)$. E nel caso di radici multiple, vale una forma corrispondente, che si può ottenere come limite di questa.

5. In una lettera che il prof. E. Cartan mi ha scritto in seguito alla mia Nota, egli suggerisce di fondare il calcolo effettivo di $f(\Phi)$ su una formola eguale a quella di Cauchy, che vale per le funzioni di variabile complessa

$$(6) \quad f(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\rho)}{\rho - \Phi} d\rho$$

l'integrale essendo esteso a un contorno opportuno nel piano della variabile complessa ρ . Ed egli aggiunge che con un'applicazione o estensione opportuna di questa formola si dovrebbe poter trattare anche il caso di matrici d'ordine infinito.

6. Le formole di Sylvester, di Fantappiè e di Cartan, e l'ultima di E. Porcu-Tortrini si ricollegano fra loro, e coincidono o possono trasformarsi l'una nell'altra. Ma le formole (5) e (6) si presentano più generali, e di applicabilità più estesa. Tutte esse valgono pel solo caso di $f(\)$ analitica: per una matrice finita, in virtù dei teoremi di Cayley e di H. Laurent, questa restrizione non porta diminuzione di generalità, ma per una matrice infinita le due teorie si separano.

Restando nel caso finito, che questi diversi autori hanno avuto precipuamente in vista, la formola generale (6), quando non voglia dedursi col metodo dei funzionali di Fantappiè, si può ricavare direttamente dalla DFT ragionando così. Due espressioni $f(\Phi)$ e $F(\Phi)$ nelle quali intervenga una particolare matrice Φ , la medesima in entrambe, si equivalgono, in base alla DFT, cioè danno per risultato la medesima matrice Ψ , sempre che sostituendo in entrambe, al posto di Φ , le singole radici ρ_i dell'equazione caratteristica di Φ , diano lo stesso risultato; cioè quando si abbia simultaneamente

$$f(\rho_1) = F(\rho_1) \quad ; \quad f(\rho_2) = F(\rho_2) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad f(\rho_n) = F(\rho_n) \quad ;$$

e nel caso parabolico, quando le equazioni che vengono a mancare a causa delle radici multiple siano sostituite da altre dove intervengono le derivate delle funzioni f, F .

Ora, sia χ una variabile complessa, e formiamo l'integrale

$$(7) \quad F(\chi) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\tilde{\chi}_s)}{\tilde{\chi}_s - \tilde{\chi}} d\tilde{\chi}_s$$

zioni in cui le matrici si presentano più comunemente, preferiamo fare il confronto tra matrici di ordine prefissato; e allora il caso generale è quello delle radici tutte distinte, perchè per avere la coincidenza di due radici deve essere soddisfatta un'equazione speciale.

esteso, nel piano complesso, a una curva chiusa s , entro cui $f(z)$ sia olomorfa, e che racchiuda tutti i valori caratteristici $z = \rho_i$. Questo integrale definisce una funzione analitica di z , la quale assume i valori $f(\rho_1)$, $f(\rho_2)$, \dots , $f(\rho_n)$ per $z = \rho_1$, $z = \rho_2$, \dots , $z = \rho_n$. Quindi se in luogo di z sostituiamo Φ , otteniamo una $F(\Phi)$ che in virtù di quanto or detto, coincide con $f(\Phi)$, per quella particolare Φ di cui si tratta. Così resta giustificata la (6), e resta precisato il cammino d'integrazione, in modo da ricavare le formole (3) e (5), per tutti i casi in cui esse sono applicabili. In quanto al cammino d'integrazione, si noterà che dovendo $f(z)$ essere olomorfa nel suo interno, esso lascia al di fuori tutti i punti singolari di $f(z)$; e siccome per contro racchiude tutti i valori di ρ_i , viene ad essere una curva separatrice nel senso di Fantappiè. La formola (6), se fosse applicata a una curva non soddisfacente a questa condizione, darebbe risultato non concorde con la DFT.

7. Però tutte le formole del gruppo ora considerato, oltre che le limitazioni dell'analiticità e dell'ordine finito, incontrano anche queste altre due, che occorrerebbe rimuovere. Una, teorica, è che non danno tutte le valutazioni multiple di $f(\Phi)$ consentite dalla DFT, nel caso in cui queste esistono; così come non danno le diverse radici ennesime della matrice unitaria elencate da Sylvester, nemmeno danno le costanti arbitrarie di Φ^{-1} , nel caso di una Φ degenera. L'altra, teorica e pratica insieme, è che per applicarle occorre risolvere l'equazione fondamentale, e fare intervenire irrazionalità anche nel caso in cui il risultato dovrebbe esserne indipendente.

Le formole di Bottasso, e quella contenuta nella Nota prima di E. Porcu-Tortrini si limitano al caso di $f(\Phi) = \Phi^n$, e di una Φ di secondo ordine; però ottengono i coefficienti ψ_{rs} , senza intervento delle funzioni algebriche non razionali ρ_i . Avendo trovato Φ^n si può, salvo le complicazioni dei calcoli, dedurre qualunque polinomio $P(\Phi)$ e anche qualunque funzione razionale $R(\Phi)$. Ed è ovvio presumere che se $f(\)$ è il simbolo di una funzione analitica completamente uniforme, come e^Φ , $\operatorname{tg} \Phi$, e simili, deve essere possibile esprimere le ψ_{rs} in funzione delle φ_{rs} mediante espressioni dove non intervengano irrazionalità algebriche nè altre funzioni multiformi; e la risoluzione dell'equazione fondamentale, o di altra equazione algebrica, dovrebbe potersi evitare.

In pratica, sarebbe importante poter fare questi calcoli per le Φ d'ordine terzo e quarto, e separatamente per quelle d'ordine infinito. Per una categoria estesa delle ultime, il problema, in casi abbastanza generali, è risolto implicitamente con lo sviluppo degli operatori $f\left(\frac{d}{dt}\right)$ di cui ho dedotto altrove la teoria. Ma per le matrici di ordine finito, che interessano la geometria e la meccanica, il problema è tuttora praticamente insoluto. Lo segnalo agli studiosi.

Fisica. — *Preparazione delle cellule fotoelettriche al Tallio.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio Q. MAJORANA e di G. TODESCO.

Per cellula fotoelettrica, nella maniera più generale, debesi intendere un qualsiasi dispositivo capace di provocare, sotto l'azione di radiazioni di conveniente λ , la formazione di una corrente elettrica o la variazione di intensità di una corrente già esistente. Essendo numerose e svariate le azioni possibili delle radiazioni in tal senso, si comprende come i tipi di cellule fotoelettriche possano essere numerosi e fondati su principî fisici diversi. Così si conoscono le antiche cellule a selenio; oppure tutta la serie dei cosiddetti ricevitori radiofonici, studiati dalla invenzione del Bell in poi; o finalmente le cellule fondate sul fenomeno fotoelettrico propriamente detto. È avvenuto, peraltro, che l'importanza di quest'ultimo fenomeno, la sensibilità che le cellule su di esso basate, possono raggiungere, e la loro sicurezza di funzionamento, hanno finito per far sì che soltanto a queste fosse riservata la denominazione di cellule fotoelettriche.

Ma è d'altra parte noto, che le cellule fondate sulla estrazione degli elettroni per parte della luce, ancor quando si tratti dell'effetto fotoelettrico selettivo o di risonanza, non sono sensibili alle grandi lunghezze d'onda. Infatti, scegliendo fra i metalli alcalini il più conveniente sotto tal riguardo, il rubidio, questo presenta un massimo di effetto per $\lambda = 4900 \text{ \AA}$. Adoperando il suddetto metallo, si può ancora avere un effetto sensibile per il rosso, ed una traccia per l'ultrarosso, ma si tratta di sensibilità assai limitata ed incomparabilmente minore di quella presentata dallo stesso metallo per le λ del verde, o da altri metalli opportuni, per λ più corte ancora.

Tutte le cellule fotoelettriche conosciute si possono raggruppare così, in due categorie. Nella più importante entrano quelle fondate sull'effetto classico (cellule fotoelettriche elettroniche o del primo tipo). Nell'altra, tutte quelle simili alle cellule a selenio o ai ricevitori radiofonici, nei quali interviene di solito qualche azione fotochimica mal conosciuta e spesso irregolare ed incostante (cellule fotoelettriche fotochimiche o del secondo tipo). E, mentre le prime son sensibili alle λ più brevi, diciamo a partire dal verde, le altre possono permettere anche la recezione dell'ultrarosso. Fra queste ultime, sono da comprendersi quelle formate con nerofumo, con certi solfuri come quello d'argento, con la molibdenite, la bismutina, ecc. E non vogliamo accennare in questa Nota ad altri dispositivi, che potrebbero meglio chiamarsi pile fotoelettriche, nei quali sono usati elettroliti liquidi.

(1) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1928.

Nello studio delle comuni sorgenti di radiazioni, di diverse λ , come si possono ordinariamente realizzare in laboratorio, si deve dunque adoperare un determinato modello di cellula, per ottenere la massima sensibilità. Per le radiazioni ultrasosse, è noto tuttavia che, pur adoperando cellule del secondo tipo, non si può di solito ottenere la stessa sensibilità che si raggiunge per le brevi λ . È interessante dunque vedere se non sia possibile disporre, anche per l'ultrarosso, di questa notevole sensibilità.

Realmente, un ricevitore del secondo tipo, scoperto negli ultimi anni dell'americano Case ⁽¹⁾, permette di raggiungere o quasi questo risultato. Si tratta della cosiddetta *thalofide* la quale è effettivamente sensibile a quelle radiazioni e regge molto bene al confronto con le cellule del primo tipo per le brevi λ , se si prescinde dalla sua eventuale e talvolta inevitabile incostanza.

La *thalofide* è stata messa in commercio dal laboratorio del Case; ed era possibile sino a qualche tempo addietro, di provvedersene. Sembra che per il momento ciò non avvenga più. Sicchè, occorrendo a noi di disporre di un sensibile ricevitore per ultrarosso, siamo stati indotti a ricercare il modo di preparare un sensibile ricevitore fotoelettrico al tallio. A tal fine occorreva realizzare indagini sistematiche ed operazioni di carattere fisico-chimico svariaticissime, seguendo vie sperimentali molteplici. Da ciò la ragione della nostra reciproca collaborazione che ci ha permesso di realizzare in tempo relativamente breve, un tipo di ricevitore al tallio sulla cui identità con quello di Case, non abbiamo sicuri elementi per pronunciarsi. Ma la sua sensibilità non ci apparisce inferiore, in seguito ad alcuni confronti che abbiamo avuto occasione di fare.

Si premette che il Case, nel descrivere le proprietà del suo ricevitore fotoelettrico, non dà alcuna notizia circa il modo di prepararlo. Egli si limita a dire che la sostanza sensibile è un composto di solfo, ossigeno e tallio. Nè maggiori notizie si possono desumere dai lavori di Coblenz ⁽²⁾ e di Kaplan ⁽³⁾ che si sono occupati di misurare la sensibilità della *thalofide* per le diverse regioni dello spettro. Sulla scorta della sommaria ed imprecisa indicazione di cui sopra, le nostre ricerche si sono orientate nel senso di partire da composti o miscugli in Tl e S e di fare agire su di essi, in vario modo, aria atmosferica, O, N od H. La difficoltà di tali operazioni si è accresciuta per la necessità sperimentale di ottenere dei preparati ben aderenti ad un sostegno isolante (quarzo, vetro o porcellana), sul quale potessero adattarsi opportuni elettrodi. Inoltre, lo spessore dei preparati doveva essere in ogni caso esilissimo, corrispondendo ciò alla regione impressio-

(1) T. W. CASE, *The « Thalofide Cell. ». A new Photoelectric Substance.* « Phys. Rev. », 15, pp. 289-292, april, 1920.

(2) W. W. COBLENTZ, *Spectro-Photoelectric Sensivity of Thalofide.* « Phys. Rev. », 15, pp. 139-140, feb. 1920.

(3) J. KAPLAN, *The Case « Thalofide Cell. ».* « Opt. Soc. America J. », 14, pp. 251-256, march 1927.

nabile dalla luce, e favorendo tale requisito, presumibilmente, *la prontezza* della ricercata cellula.

Ora è noto, da ricerche di varii chimici e fisici, quanto mai complessa sia la serie dei prodotti risultanti dall'azione del solfo sul tallio⁽¹⁾. Tutta una serie di prodotti con diversissimi punti di fusione, può ottenersi⁽²⁾ per diretta azione del S sul Tl. Così si hanno punti di fusione variabili da 100° a 500° circa; ed una varietà di solfuro, il Tl_2S_3 , può mantenersi pastoso come cera anche a temperatura ordinaria.

Seguendo queste ed altre indicazioni, abbiamo preparato composti di Tl ed S, in tutte le varie proporzioni, riscaldando tali miscugli in tubi da saggio alla fiamma. Si ottiene così il solfuro di tallio, diverso da caso a caso, nell'interno del tubo, ed esso è unito talvolta a tallio metallico eccedente. In generale adoprando poco solfo, si ha un prodotto meno fusibile. In tale operazione, fatta all'aria, non è da escludersi che intervenga, almeno in piccola dose, l'ossigeno; ciò è tanto più probabile, se il tubo da saggio è piuttosto largo.

Le stesse operazioni sono state ripetute in corrente di idrogeno e poi di azoto. In entrambi i casi l'occhio lascia scorgere una leggera differenza di tinta del prodotto, risultando questo alquanto più chiaro. Per contro, in corrente di ossigeno puro, il prodotto che si ottiene è in generale più scuro, ed in certi casi ricorda il nerofumo.

In ricerche preventive, abbiamo cominciato ad esaminare l'attività fotoelettrica dei composti così preparati. Ma essa è risultata minima o del tutto trascurabile.

Occorreva anzitutto porsi nelle condizioni di adoprare uno strato sottile del composto e ciò si è realizzato scegliendo opportunamente, la sostanza isolante più idonea a servir da sostegno allo strato sensibile.

Essa è il vetro (non volendo, per comodità di manipolazione, ricorrere al quarzo), meglio se smerigliato grossolanamente; venendosi così ad accrescere l'aderenza fra esso e la sostanza che a caldo vi si può deporre. La porcellana non verniciata è inadatta allo scopo, perchè assorbe nel suo spessore molta sostanza attiva. Occorre inoltre guarnire la lastrina di vetro, all'atto della preparazione della cellula, di una lastra di rame di sostegno. Questa, scaldata, serve a distribuire uniformemente il calore sino a 5 o 600° e oltre, senza pericolo che il vetro si rompa. Sulla lastrina di vetro si può così stendere il solfuro di tallio. Si incontra quasi sempre notevole difficoltà in tale operazione, giacchè il composto, per capillarità, tende a rapprendersi. Se a questo punto della ricerca, ci si contenta di stendere il preparato in modo grossolano, formando uno strato di 1 o 2 mm. per poi, dopo il raffreddamento, assottigiarlo meccanicamente, (sino a circa 0,2 mm.) e

(1) Vedi ad es. i lavori di CARSTANJEN, « J. prakt. Chem. », 102, 1867; di O. BRUNK, « Central Blatt », 1-10, 1905; di F. FAKTOR, « Central Blatt », 11, 1905; etc.

(2) H. PÉLABON-, *Sur les sulfures, sélénures et tellurures de thallium.*, « Comptes Rendus », 145, p. 118, 1907.

adagiarvi indi opportuni elettrodi, si ha ancora a che fare con una cellula poco o punto sensibile.

Questi primi risultati ci hanno fatto comprendere come realmente occorra una alterazione chimica del solfuro per renderlo attivo. Ciò, del resto concorda con la notizia data dal Case, sulla costituzione della thalofide.

Ci siamo dunque orientati verso procedimenti tendenti a provocare una combinazione del tallio con il solfo e con l'ossigeno, scartando senz'altro la via umida. In un primo tempo abbiamo pensato di realizzare direttamente un composto di Tl, S ed O facendo agire su di un ossido di tallio, il solfo. Ma ci siamo fermati, per la tendenza che ha il solfo di togliere ossigeno all'ossido di tallio; ciò avviene anzi, a caldo, dando luogo ad una sorta di esplosione.

Dopo molti tentativi, la ricerca ha cominciato finalmente a dare buoni risultati, quando è stato osservato il comportamento dei solfuri di tallio riscaldati all'aria. Si avverte anzitutto al riguardo, che non pare opportuno intensificare l'effetto in parola, sperimentando in atmosfera di puro ossigeno.

Se si porta la lastrina di vetro su cui si tenta di stendere il solfuro già preparato come si è detto, ad una temperatura man mano crescente, operando nell'aria atmosferica, e si procede in tale operazione mediante una spatola di vetro; si osserva, ad un certo punto, che il solfuro, dalla sua colorazione bruno metallica ricordante l'acciaio brunito o l'argento annerito (solfuro d'argento), passa bruscamente ad una tinta più scura, non lucida, ricordante il nerofumo, sebbene alquanto più chiara. Contemporaneamente la massa, che sotto i movimenti della spatola appariva fluida, si rapprende e si fissa sul vetro. Si sospende allora l'operazione e si lascia raffreddare il tutto alquanto lentamente. L'intera operazione va naturalmente condotta in modo da rendere lo strato sul vetro molto sottile; meglio quasi se, in qualche punto, la sostanza attiva è addirittura mancante.

Il processo descritto, puramente empirico, va interpretato con l'ammettere la formazione di un composto di Tl, S ed O, di natura difficilmente individuabile.

Sulla lastrina di vetro così preparata, si adagiano ora gli elettrodi. Si sono adottati a tal fine vari ripieghi e cioè: fissare con mastice organico non isolante, delle listerelle di stagnola; formare sul preparato, con lega di Wood, due pettini sottili ed isolati uno dall'altro; e finalmente deporre, sempre a forma di pettini, dell'amalgama di recente preparazione, costituita da parti eguali di Cd, Zn, Sn, Hg, la quale indurisce dopo qualche ora. Questi due ultimi metodi e segnatamente l'ultimo, sembrano i più consigliabili. Le cellule da noi preparate in tal guisa, sono di forma quadrata o circolare, della superficie di 4 o 5 cmq.

Abbiamo preparato qualche centinaio di queste cellule, col criterio di modificare ogni volta le circostanze delle singole operazioni, o di assicurarsi che un dato processo conducesse sempre agli stessi risultati.

A preparazione avvenuta, ciascuna cellula è stata sottoposta ai dovuti controlli al galvanometro e ad un amplificatore a quattro valvole; e tali controlli sono stati sovente ripetuti per un tempo più o meno lungo al fine di esaminare, nei limiti del possibile, la costanza o meno di tali cellule.

Si è così constatato che il solfuro da cui è più conveniente partire, è il Tl_2S . Si mescolano a tal fine circa 12 parti in peso di tallio ed una di solfo, finemente tritate e si procede alla fusione del miscuglio nel modo già detto. Il riscaldamento della lastrina di vetro, guarnita provvisoriamente di una lastra di rame al disotto, si ottiene mediante un vivace becco Bunsen, e va spinto, prima di adagiarvi il solfuro, sino al rosso nascente o quasi. Poi si depositano sulla lastrina alcuni grani di solfuro o meglio vi si strofina rapidamente un bastoncino di tale sostanza; successivamente si stende questa con una spatola di vetro, assottigliando per quanto possibile lo strato, asportando l'eccesso, e cercando di rendere uniforme tutto il deposito. Si insiste in tale operazione qualche secondo, fintanto che si scorge la formazione del composto solido, non lucido, finemente granulare, di colore scuro, del quale si è discusso prima. Durante l'operazione è bene sollevare qualche volta rapidamente il vetrino, staccandolo dalla lastra di rame di sostegno, ed osservarlo per trasparenza. Avviene frequentemente, specie se la temperatura non è stata sufficientemente elevata, di osservare una colorazione gialla negli interstizi inevitabili che rimangono fra le diverse porzioni della sostanza, così preparata. L'esperienza fa giudicare questo fatto come esiziale alla vitalità della cellula; ed esso sembra dovuto alla formazione di perossido di tallio giallo, Tl_2O_3 . Se si constata tale fatto, basta insistere alquanto nel riscaldamento perchè la colorazione giallognola sparisca, probabilmente in causa della volatilizzazione dell'ossido in parola. Ma occorre agire abilmente in tale operazione, giacchè un eccessivo riscaldamento dà luogo a cellule inattive, caratterizzate spesso da un eccesso di conducibilità (quasi metallica); oppure provoca la sparizione per volatilizzazione, di tutto il preparato.

Una buona cellula, subito dopo la sua preparazione, offre una resistenza dell'ordine del megaohm, che in certi casi può divenire persino dieci volte più piccola sotto l'azione della luce diurna diffusa da una finestra.

Il fenomeno, per luce piuttosto intensa, non è mai completamente pronto: insistendo con la luce, la resistenza continua a diminuire e non riprende subito il suo valore primitivo al cessare della luce, anzi il ritorno è più lento della diminuzione sotto l'azione della luce. Occorrono parecchie ore di oscurità, per ricondurre una buona cellula in condizioni normali, dopo una illuminazione vivace. Per piccole illuminazioni invece, le variazioni di resistenza seguono quasi senza ritardo le variazioni di intensità luminosa.

La resistenza della cellula può variare spontaneamente col tempo, anche indipendentemente dall'azione luminosa, in un senso o nell'altro.

Può avvenire che le proprietà fotoelettriche di una cellula preparata di recente, si affievoliscano rapidamente. Solo quando si è acquistata una certa pratica nella preparazione delle cellule, e si sono comprese certe particolarità empiriche, che difficilmente possono esser oggetto di descrizione, si riesce con sicurezza ad ottenere delle cellule che conservano a lungo le loro proprietà. Così, abbiamo potuto ottenere cellule che presentano dopo un mese la stessa sensibilità che avevano 24 ore dopo la loro preparazione. Il tempo dirà se la vitalità delle nostre cellule è ancora maggiore.

Una precauzione che sembra veramente utile per la vitalità della cellula, è quella di racchiuderla in un'ampolla di vetro priva d'aria (pressione mm. 0.001). Con ciò si evitano, per lo meno, le azioni dell'atmosfera e si riducono le fughe elettriche, dovute alla igroscopicità della superficie della cellula.

Una delle cellule così preparate e che si mantiene costante ed in ottime condizioni da più settimane, sotto una tensione di 60 Volts, presenta una variazione di resistenza da 1 a $1/3$ per l'azione della luce diffusa diurna di una stanza, e molto di più sotto l'azione della luce solare. È bene però non cimentare la cellula, con luce molto viva. Periodi di oscurità ne migliorano le qualità. Per quanto riguarda la sensibilità alle deboli illuminazioni e sotto piccola differenza di potenziale, abbiamo verificato che la cellula in parola, la cui resistenza all'oscuro è di 2, 4 megaojms, posta in circuito con un galvanometro sensibile, sotto la differenza di potenziale di 1, 2 Volts, è traversata da una corrente la cui intensità raddoppia quando si espone la cellula stessa alla luce di una lampada Hefner campione, posta a 1 metro di distanza.

Per dare finalmente un'idea della sensibilità unita alla prontezza delle cellule in questione, accenniamo alle osservazioni fatte mediante un amplificatore termoionico a quattro valvole. La cellula è disposta fra filamento e griglia della prima valvola e sottoposta alla tensione continua di circa 120 Volts. Su di essa si fa cadere la luce di un comune fiammifero di cera posto a dieci ed anche a venti metri di distanza, interrotta periodicamente da un disco a fori ruotante, senza l'uso di alcuna lente. Il suono del disco è in queste condizioni, nettamente udibile. Se si riduce la distanza a circa 5 metri, e si interpone sul percorso della luce del fiammifero, un vetro all'ossido di manganese (trasparente cioè soltanto per l'ultrarosso), il suono si sente ancora. Così pure il suono è di nuovo udibile a questa distanza, se al fiammifero si sostituisce un pezzo di rame scaldato al rosso appena nascente.

Riteniamo che le cellule fotoelettriche al tallio costruite col metodo da noi indicato, abbiano sensibilità non inferiore a quelle di Case, e siamo lieti di aver fornito ai fisici, nell'interesse della pura ricerca scientifica, le indicazioni necessarie per la loro preparazione.

In queste ricerche, il dr. Tedesco si è occupato particolarmente della preparazione dei vari solfuri di tallio, del loro dosaggio, e dei controlli al galvanometro ed all'amplificatore.

Biologia. — *Imitazione di forme organiche coll'albumina e l'acido fluoridrico* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio straniero L. A. HERRERA.

Continuando le mie ricerche su queste imitazioni io ho voluto sostituire agli acidi cloridrico, nitrico e solforico l'acido fluoridrico che, secondo Hugou-nenq, è più attivo come agente idrolizzante delle proteine.

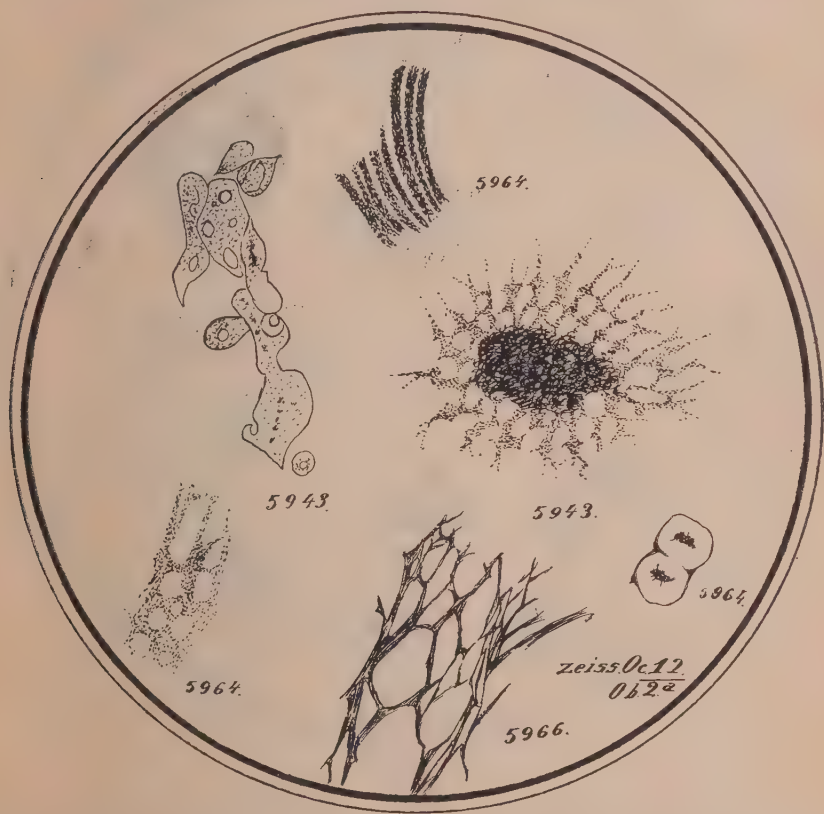


Fig. 1.

Tecnica. — Si fa agire l'acido fluoridrico fumante, concentrato, recente, contenuto in recipienti di piombo e che non sia stato esposto all'aria. I risul-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto degli alti studi biologici di Messico.

(2) Pervenuti all'Accademia il 25 luglio 1928.

tati sono nulli se l'acido o le soluzioni impiegate vengono diluite coll'umidità dell'aria od altrimenti.

Le scaglie d'ovoalbumina debbono essere sottili; è meglio impiegare ovoalbumina pulverizzata e finamente setacciata. Il porta oggetti o la laminetta dovranno essere protette mediante il balsamo di Canada solidificato sui vetri col calore fino a svolgimento di vapori abbondanti. In questa maniera, dopo raffreddamento, i vetri non vengono più attaccati dall'acido fluoridrico. L'ovo-



Fig. 2.

albumina pulverizzata si pone fra il porta- ed il coprioggetto compressi con piombo. I vetri vengono chiusi in una scatola di Petri paraffinata. La misurazione dell'acido e l'agitazione di esso colla glicerina si fanno con una bacchetta paraffinata ed un cilindro graduato verniciato col balsamo di Canada.

Le esperienze dal n. 5934 al n. 6008 sono state eseguite con acido puro o diluito con acqua (2:1) oppure con glicerina (2:1). Il tempo di contatto ha variato da due minuti a qualche ora. Per le ultime esperienze (6004,

6006, sino a 6008) il tempo più favorevole è stato di 50 minuti alla temperatura di laboratorio. In seguito si lava accuratamente, si colora coll'ematosilina e si conserva nella glicerina. Queste strutture sono gelatinose e difficili a conservarsi nel balsamo di Canada. La gomma arabica non può essere impiegata per aumentare la viscosità dell'acido. Bisogna evitare ogni contatto dell'acido colle dita per non andare incontro a ferite dolorose e suppuranti. I recipienti contenenti l'acido dovranno essere afferrati munendosi



Fig. 3.

di guanti di caucciù. Spesso l'acido cola sulle pareti dei recipienti ed intacca le dita. Nel tappo di piombo si dovranno fare due fori, uno per l'uscita del liquido e l'altro per l'entrata dell'aria.

Risultati. - Sono svariatisimi sia per la formazione di diversi sistemi colloidali, secondo le idee di J. Verne⁽¹⁾, sia per la cristallizzazione incom-

(1) Il protoplasma cellulare. Sistema colloidale secondo *Le Cytoplasma et les sucs des corps* di F. BOTTAZZI. Paris, 1923, Y. Doin éd., pp. 1-210.

pleta degli aminoacidi in presenza di diversi colloid, sia per altre cause ancora sconosciute. Si sa che l'ovoalbumina contiene le sostanze seguenti (1).

Alanina 2,7. Serina 0,6. Leucina 7,1. Prolina 2,25. Acido glutamico 8,0. Acido aspartico 1,5. Fenilalanina 4,4. Tirosina 1,1. Triptofano (presente). Cistina 0,2. Lisina 2,15. Arginina 2,14. Tutti questi aminoacidi e composti dovranno trovarsi più o meno modificati, nelle strutture prodotte

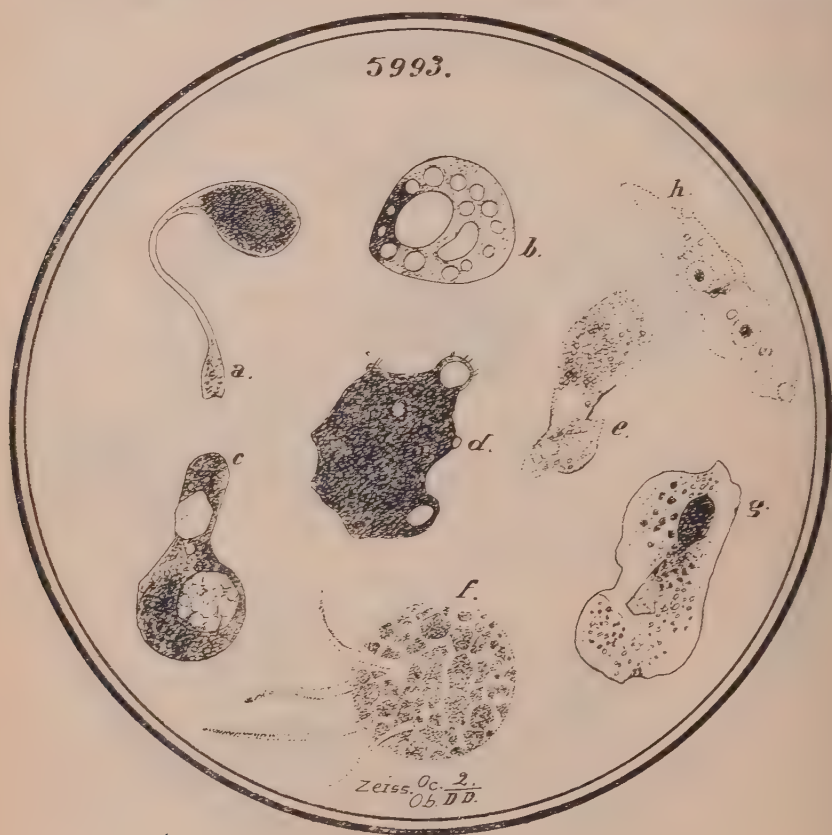


Fig. 4.

dall'azione idrolizzante dell'acido fluoridrico. Queste strutture contengono infatti una grande quantità di materia organica che li annerisce per una lenta calcinazione sul forno elettrico. Esse contengono anche della silice e dei fluosilicati in abbondanza che dovranno influire sulla produzione delle strutture stesse. Sono insolubili nell'acqua, vengono distrutte facilmente dall'alcool e dallo xilolo e vengono colorati dai colori di anilina.

(1) STARLING, *Fisiologia humana*, Barcelona, 1926. Editorial Pubul., tomo I, p. 89.

Sono insolubili nella glicerina. Dimensioni: variabilissime secondo le dimensioni delle scaglie dell'ovoalbumina. Movimenti: nulli.

Le figure organiche prodotte hanno l'aspetto microscopico o di masse ialine o granulose (figg. 1-4) nucleate (5986, fig. 2) o senza nuclei. Su ciascuna scaglia d'albumina vi è formazione di catene di globuli più o meno stirati (*j*, fig. 3). Si osservano piccole urne simili agli sporangi del lycopodio (*g*, fig. 3). Delle linee o bande di scaglie dissociate (5964, fig. 1); imitazioni di radiolari coi pseudopodi di una finezza estrema (5943, fig. 1), strutture areolari finamente granulate come quelle del protoplasma della *Amoeba limax* ⁽¹⁾. Ho osservato attentamente la magnifica figura *f* (fig. 4). Essa è stata conservata nella glicerina, e mostra un aspetto ialino e quattro pseudopodi senza movimento uscenti da un corpo sferoidale a diverse distanze ed altezze. Probabilmente questi prolungamenti hanno avuto dei movimenti. I vacuoli (*b*, fig. 4), i nuclei (*h*, fig. 4) e gli altri dettagli mostrano la varietà infinita di queste figure, spesso nella stessa preparazione.

Probabilmente con una tecnica perfezionata e coll'impiego di nucleine ed acidi nucleinici si potrà giungere a risultati ancora più notevoli ⁽²⁾.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo.* Nota di T. BOGGIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota, che si collega strettamente colla mia Nota precedente testè stampata in questi « Rendiconti »: *Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo*, della quale adopero metodi e notazioni, stabilisco anzitutto una notevole proprietà dei differenziali superficiali in relazione cogli operatori lineari per le omografie, considerati nella Nota ora citata, poi espongo un nuovo procedimento, di natura geometrica, molto semplice, col quale si perviene direttamente all'omografia di Riemann, indipendentemente dai sim-

(1) CALKINS, *Protozoology*. Lea and Febiger. New York, 1909, p. 139, fig. 56.

(2) Io ho ottenuto anche strutture colla pepsina e la tacadiastasi agenti sull'ovoalbumina solida, avvicinandomi così ancora più ai processi naturali, ma tali forme organiche sono ancora poco precise: bisognerà ancora insistere a temperature convenienti.

Vi è un'interessante analogia tra i risultati coll'acido fluoridrico e le notevoli strutture cellulari in divisione che io ho preparato coi fluosilicati. (Vedi A. L. HERRERA, *Importanza biologica dei fluorilicati*. Questi « Rendiconti », 7 gennaio 1923, p. 42. *Sulle imitazioni dei più piccoli dettagli dei microsporidi col fluosilicato di calcio*. Questi « Rendiconti », 5 giugno 1925, p. 639). È noto che il fluoro, secondo le classiche ricerche di Gautier, si trova in tutti gli organismi.

(3) Nella seduta del 6 maggio 1928.

boli di Christoffel, e ne deduco, in modo molto elementare e semplice, le proprietà fondamentali dell'omografia di Riemann, o, ciò che equivale, dei simboli di Riemann a 4 indici.

1. *Differenziali superficiali di operatori lineari.* — Indichiamo genericamente con μ_r un'omografia di ordine r , funzione del punto generico Q mobile in uno spazio curvo C_n ad n dimensioni, e la μ_r sia applicabile solo a vettori tangenti a C_n in Q , in guisa che, ad es., la μ_3 trasformi una terna qualunque di vettori tangenti a C_n in Q in un vettore tangente a C_n in Q .

Considerando allora gli operatori lineari k, k^*, K, I_1, v , introdotti nella Nota precedente — la quale verrà brevemente citata con *Nota I* — sussiste l'importante proprietà che tali operatori sono permutabili col simbolo d di differenziazione superficiale, cioè

$$(1) \quad dk\mu_3 = k d\mu_3, \quad dk^*\mu_3 = k^* d\mu_3, \quad dK\mu_1 = K d\mu_1,$$

$$(2) \quad dI_1\mu_1 = I_1 d\mu_1, \quad dv\mu_3 = v d\mu_3.$$

Dimostriamo la prima delle (1); converrà ricorrere alla (9) della *Nota I*, cioè $k\mu_3 abc = \mu_3 acb$ e supporre che a, b, c siano vettori tangenti a C_n in Q , e quindi funzioni di Q . Prendendo il differenziale superficiale dei due membri della citata (9) e ricordando la (8') si ha:

$$\begin{aligned} d(k\mu_3) \cdot abc + k\mu_3 \cdot da \cdot bc + k\mu_3 a \cdot db \cdot c + k\mu_3 ab \cdot dc = \\ = d\mu_3 \cdot acb + \mu_3 da \cdot cb + \mu_3 a \cdot dc \cdot b + \mu_3 ac \cdot db; \end{aligned}$$

ma siccome da, db, dc sono vettori pure tangenti a C_n in Q , la (9) sussiste anche se al posto di a si pone da , ovvero se al posto di b si pone db , ecc., e allora la precedente si riduce a

$$(a) \quad d(k\mu_3) \cdot abc = d\mu_3 \cdot acb,$$

ma, per la (9) stessa questo secondo membro vale $k d\mu_3 \cdot abc$, perciò si conclude, a causa della arbitrarietà di a, b, c , che $d(k\mu_3) = k d\mu_3$.

In modo del tutto analogo si dimostrano la 2^a e la 3^a delle (1).

Passiamo a dimostrare la prima delle (2). Prendendo il differenziale superficiale della (13) della *Nota I*, cioè $I_1\mu_1 = \sum a_i \times \mu_1 a_i$, ove a_1, a_2, \dots, a_n sono vettori unitari, a due a due ortogonali, e tangenti a C_n in Q , e applicando le (4), (6), (8) della *Nota I*, si ha:

$$(a) \quad dI_1\mu_1 = \sum (da_i \times \mu_1 a_i + a_i \times \mu_1 da_i) + \sum a_i \times d\mu_1 \cdot a_i;$$

ora osserviamo che i vettori a_i soddisfano alle condizioni:

$$a_i^2 = 1, \quad a_i \times a_b = 0, \quad \text{per } i \neq b,$$

perciò, se prendiamo il differenziale superficiale, risulta:

$$(b) \quad a_i \times da_i = 0, \quad a_b \times da_i + a_i \times da_b = 0;$$

la prima delle (β) mostra che il vettore $d\mathbf{a}_i$ può rappresentarsi colla formula:

$$d\mathbf{a}_i = \sum_b m_{ib} \mathbf{a}_b,$$

ove gli m_{ib} sono coefficienti numerici tali che $m_{ii} = 0$; la seconda delle (β) porge poi ovviamente

$$(\gamma) \quad m_{ib} + m_{bi} = 0 \quad (1),$$

perciò ne segue:

$$\sum_i (d\mathbf{a}_i \times \mu_i \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i \times \mu_i d\mathbf{a}_i) = \sum_i \sum_b m_{ib} (\mathbf{a}_b \times \mu_i \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i \times \mu_i \mathbf{a}_b);$$

ma scambiando i con b il secondo membro non dovrebbe cambiare, mentre invece i coefficienti m_{ib} cambiano tutti di segno in virtù della (γ), dunque questo secondo membro vale 0, e allora la relazione (α) diviene $dI_1 \mu_1 = \sum \mathbf{a}_i \times d\mu_1 \cdot \mathbf{a}_i$, che, per la citata (13) vale $I_1 d\mu_1$, il che dimostra la prima delle (2).

La seconda delle (2) si può dimostrare prendendo il differenziale superficiale della (16) della Nota I, e tenendo conto della prima delle (2) e delle (1).

Nel caso di spazi curvi a 3 dimensioni, si può considerare il vettore della omografia μ_1 , che si indica con $V\mu_1$, e che è un vettore che soddisfa alla condizione:

$$(3) \quad 2 V\mu_1 \times \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mu_1 \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mu_1 \mathbf{b};$$

prendendone il differenziale superficiale e procedendo come si è fatto per le (1), si conclude agevolmente

$$(4) \quad dV\mu_1 = Vd\mu_1.$$

Da quanto precede si conclude quindi che il simbolo d di differenziazione superficiale relativo ad uno spazio curvo, gode di proprietà perfettamente analoghe a quelle dell'ordinario simbolo di differenziazione per gli spazi euclidei.

Osservazione. — La proprietà ora stabilita equivale a quest'altra che nel calcolo del differenziale superficiale delle eguaglianze (9), (10), ... (17) della Nota I, e della precedente (3), i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ (pure essendo funzioni del punto Q) si comportano come delle costanti.

2. Differenziali superficiali di 2° ordine; omografia di Riemann. — Indichiamo con \mathbf{u} un vettore, funzione del punto Q mobile nello spazio curvo C_n , e tangente a C_n in Q; allora se consideriamo due differenziali qualunque $dQ, \delta Q$ del punto Q, i corrispondenti differenziali superficiali $d\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}$ del vettore \mathbf{u} sono dati (Nota I) da:

$$(5) \quad d\mathbf{u} = \sum d^* \mathbf{u} \times \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i, \quad \delta\mathbf{u} = \sum \delta^* \mathbf{u} \times \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i.$$

(1) Questa relazione prova che $d\mathbf{a}_i$ si può rappresentare colla formula $d\mathbf{a}_i = \Lambda \mathbf{a}_i$, ove Λ è un'omografia assiale (*Espaces*, p. 243).

È facile calcolare i differenziali superficiali di 2° ordine, in generale diversi fra loro, ∂du , $d\partial u$ del vettore u ; basta applicare l'operatore ∂ alla (5) e ricordare le proprietà esposte nella Nota I, e si ha così:

$$\partial du = \sum \partial^* (d^* u \times a_i) \cdot a_i + \sum d^* u \times a_i \cdot \partial a_i,$$

$$\partial du = \sum \partial^* d^* u \times a_i \cdot a_i - \sum d^* u \times \partial^* a_i \cdot a_i - \sum d^* u \times a_i \cdot \partial a_i;$$

per ottenere $d\partial u$ basta scambiare ∂ con d e si ha:

$$d\partial u = \sum d^* \partial^* u \times a_i \cdot a_i - \sum \partial^* u \times d^* a_i \cdot a_i - \sum \partial^* u \times a_i \cdot da_i.$$

Sottraendo risulta:

$$(6) \quad \partial du - d\partial u = \sum (d^* u \times \partial^* a_i - \partial^* u \times d^* a_i) a_i + \\ + \sum (d^* u \times a_i \cdot \partial a_i - \partial^* u \times a_i \cdot da_i);$$

di qui si deduce che, in generale, $\partial du \neq d\partial u$.

Ma dalla (6) si deduce ancora la proprietà fondamentale che la differenza $\partial du - d\partial u$ è funzione lineare e vettori dQ , ∂Q , u .

Infatti, la (6) può scriversi:

$$\partial du - d\partial u = \sum \left(\frac{d^* u}{dQ} dQ \times \frac{d^* a_i}{dQ} \partial Q - \frac{d^* u}{dQ} \partial Q \times \frac{d^* a_i}{dQ} dQ \right) a_i - \\ + \sum \left(\frac{d^* u}{dQ} dQ \times a_i \cdot \frac{da_i}{dQ} \partial Q - \frac{d^* u}{dQ} \partial Q \times a_i \cdot \frac{da_i}{dQ} dQ \right),$$

ed è chiaro che il secondo membro è funzione lineare di dQ e di ∂Q .

Inoltre, se v è un vettore tangente a C_n in Q , ed m è una funzione numerica di Q , si ha:

$$\partial d(u + v) - d\partial(u + v) = (\partial du - d\partial u) + (\partial dv - d\partial v),$$

$$\partial d(mu) - d\partial(mu) = \partial(dm \cdot u - md u) - d(\partial m \cdot u + m\partial u) = m(\partial du - d\partial u).$$

perchè essendo m un numero è chiaro che $\partial dm = d\partial m$.

Da queste relazioni risulta che $\partial du - d\partial u$ è funzione lineare anche di u .

Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

Essendo il vettore (6) funzione lineare di ciascuno dei vettori dQ , ∂Q , u , è noto (*Espaces*, p. 24) che esiste una sola omografia di 3° ordine che indicheremo con \mathfrak{H} , tale che

$$(7) \quad \partial du - d\partial u = \mathfrak{H} dQ \partial Q u,$$

qualunque siano dQ , ∂Q ed u (purchè tangenti a C_n in Q).

L'omografia di 3° ordine \mathfrak{H} la chiameremo *omografia di Riemann*.

(1) Questa \mathfrak{H} non dipende dalla metrica dello spazio curvo, ma è elemento assolutamente intrinseco.

È chiaro che $\Re dQ\delta Q$ è un'omografia ordinaria, ed $\Re dQ$ è un'omografia di 2° ordine.

Come vettore u si può prendere uno spostamento infinitesimo $d'Q$ di Q in C_n , e allora la (7) porge:

$$(8) \quad \delta d d'Q - d\delta d'Q = \Re dQ\delta Q d'Q.$$

È chiaro che l'omografia \Re si può anche applicare ad una terna di vettori di moduli arbitrarii (finiti), tangenti a C_n in Q .

L'omografia \Re riassume i simboli di Riemann di 1ª specie, e precisamente, se a_i, a_j, a_k sono vettori unitari a due a due ortogonali, tangenti a C_n in Q , si ha, colla notazione abituale dei simboli di Riemann:

$$(9) \quad (ij, bk) = \Re a_i a_k a_j \times a_j.$$

3. *Proprietà fondamentali dell'omografia di Riemann.* — L'omografia \Re gode delle seguenti proprietà fondamentali:

a) Si ha:

$$(10) \quad \Re \delta Q dQ d'Q = - \Re dQ\delta Q d'Q,$$

che può scriversi, più semplicemente:

$$(10') \quad \Re \delta Q dQ = - \Re dQ\delta Q.$$

Infatti, scambiando d con δ il 1° membro della (8) cambia solo di segno.

Se a, b, c sono vettori tangenti a C_n in Q è chiaro che la (10) porge:

$$(10'') \quad \Re bac = - \Re abc,$$

o, più semplicemente, mediante l'operatore k^* :

$$(11) \quad k^* \Re = - \Re.$$

La (10'') equivale alla ordinaria proprietà di emisimmetria dei simboli di Riemann di 1ª specie, espressa da $(ij, bk) = - (ij, kb)$.

b) Se $\delta'Q$ è un altro spostamento infinitesimo di Q in C_n si ha:

$$(12) \quad \Re dQ\delta Q d'Q \times \delta'Q = - \Re dQ\delta Q d'Q \times d'Q.$$

Infatti si ha:

$$d(d'Q \times \delta'Q) = d'Q \times d\delta'Q + \delta'Q \times dd'Q,$$

$$\delta d(d'Q \times \delta'Q) = d'Q \times \delta d\delta'Q + \delta d'Q \times d\delta'Q + \delta'Q \times \delta d d'Q + \delta\delta'Q \times dd'Q;$$

scambiando qui d con δ , il 1° membro non muta e, nel 2° membro, il 2° e

il 4° termine si scambiano fra loro, perciò sottraendo le due eguaglianze membro a membro rimane:

$$0 = d'Q \times (\delta d \delta' Q - d \delta \delta' Q) + \delta' Q \times (\delta d d' Q - d \delta d' Q),$$

la quale, in virtù della (8), dimostra la (12).

Si può pure scrivere la (12) sotto la forma:

$$(12') \quad \Re abc \times d = - \Re abd \times c,$$

ove a, b, c, d sono vettori tangenti a C_n in Q .

Poichè $\Re ab$ è un'omografia ordinaria, applicando la (12) della Nota I si conclude che la (12') porge:

$$(13) \quad K(\Re ab) = - \Re ab,$$

la quale dice che l'omografia $\Re ab$ è *assiale*.

La (13) può scriversi più semplicemente (*Espaces*, p. 30):

$$(13') \quad K\Re = - \Re.$$

La (12') equivale ad un'altra proprietà di emisimmetria dei simboli di Riemann, espressa da $(ij, hk) = -(ji, hk)$; però la dimostrazione che si dà, coi metodi ordinari⁽¹⁾, di questa proprietà, è più complicata di quella sopra esposta.

c) Si ha la proprietà ciclica espressa da:

$$(14) \quad \Re dQ \delta Q d'Q + \Re \delta Q d'Q dQ + \Re d'Q dQ \delta Q = 0.$$

Infatti, se si permutano circolarmente nella (8) i simboli differenziali d, δ, d' e si sommano membro a membro le eguaglianze ottenute, il 1° membro si riduce identicamente a zero.

È chiaro che la (14) può anche scriversi così:

$$(14') \quad \Re abc + \Re bca + \Re cab = 0.$$

La (14') equivale alla proprietà ciclica dei simboli di Riemann espressa da:

$$(ij, hk) + (hj, ki) + (kj, ih) = 0,$$

che, coi metodi ordinari⁽²⁾, richiede una dimostrazione più complicata della precedente.

Mediante gli operatori k, k^* , tenendo anche conto della (11), si può dare alla (14') la forma:

$$\Re abc + k^* k \Re abc - k \Re abc = 0,$$

(1) LEVI-CIVITA, op. cit., p. 205.

(2) LEVI-CIVITA, op. cit., p. 203.

cioè, più semplicemente:

$$(15) \quad \mathfrak{R} + k^*k\mathfrak{R} - k\mathfrak{R} = 0.$$

(d) Si ha la proprietà di commutabilità espressa da (*Espaces*, p. 72):

$$(16) \quad \mathfrak{R}abc \times d = \mathfrak{R}cda \times b.$$

Infatti, dalla (14') si ha:

$$(a) \quad \mathfrak{R}abc \times d + \mathfrak{R}bca \times d + \mathfrak{R}cab \times d = 0,$$

scriviamo le relazioni che si deducono da questa permutando circolarmente a, b, c, d , e avremo:

$$(b) \quad \mathfrak{R}bcd \times a + \mathfrak{R}cdb \times a + \mathfrak{R}dbc \times a = 0,$$

$$(c) \quad \mathfrak{R}eda \times b + \mathfrak{R}dae \times b + \mathfrak{R}ead \times b = 0,$$

$$(d) \quad \mathfrak{R}dab \times c + \mathfrak{R}abd \times c + \mathfrak{R}bda \times c = 0;$$

sommando ora le (a), (b) e dal risultato sottraendo la (c) e la (d), e tenendo conto delle (10'') e (12') si vede che 8 termini si elidono a due a due e rimane:

$$2\mathfrak{R}abc \times d - 2\mathfrak{R}cda \times b = 0,$$

da cui segue la (16).

Mediante gli operatori k, k^*, K si può dare alla (16) la forma:

$$k^*k\mathfrak{R}cab \times d = k\mathfrak{R}cad \times b = Kk\mathfrak{R}cab \times d,$$

da cui, per l'arbitrarietà dei vettori a, b, c, d si trae:

$$(17) \quad k^*k\mathfrak{R} = Kk\mathfrak{R}.$$

La (16) equivale alla nota proprietà dei simboli di Riemann espressa da $(ij, hk) = (hk, ij)$.

In una prossima Nota stabilirò l'identità di Bianchi e ne farò l'applicazione al calcolo del vettore dell'omografia di Riemann, e del gradiente di tale vettore.

Matematica. — *Sur la composition de seconde espèce.* Nota di J. DELSARTE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

Nous nous proposons simplement d'indiquer ici comment l'idée de problème fonctionnel ordonné simplifie considérablement le difficile problème de la permutabilité de seconde espèce au sens de M. Volterra.

Cette notion de problème ordonné a été introduite pour la première fois par M. G. Bouligand (voir une Note de cet auteur au « Bulletin des Sciences Mathématiques » de mai 1927).

Voici en quoi elle consiste dans le cas actuel.

M. Volterra a montré (du moins dans le cas de noyaux n'ayant qu'un nombre fini de valeurs singulières) que le problème de la permutabilité de seconde espèce se ramène à des questions de permutabilité de matrices carrées.

Rien dans l'analyse de M. Volterra ne caractérise l'ordre dans lequel on inscrit les lignes et les colonnes de ces matrices. Tout ce que nous faisons ici revient dans le fond à « ordonner » ces matrices; c'est-à-dire à distinguer leur diagonale principale. Précisons d'abord définitions et notations.

Nous appellerons transformations linéaires de Fredholm et désignerons par la notation:

$$g = K[f].$$

La transformation fonctionnelle

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 K(st)f(t) dt.$$

Nous disons que cette transformation est de noyau K. Nous supposons qu'elle est définie et bornée dans l'espace des fonctions de carré sommable définies dans (a, b) . Il est suffisant pour cela que le noyau $K(st)$ soit de carré sommable par rapport à t . Une conséquence de cette hypothèse est que si $f_n(s)$ tend en moyenne vers $f(s)$ pour n infini

$$g_n = K[f_n],$$

tend en moyenne vers

$$g = K[f],$$

pour n infini.

(1) Nella seduta del 17 giugno 1928.

Nous modifierons un peu la définition de la composition en seconde espèce de Volterra: $K(st)$ et $H(st)$ étant deux tels noyaux, posant:

$$g = K[f] \quad , \quad h = H[g] ,$$

on a

$$h = L[f] ,$$

avec

$$L(st) = K(st) + H(st) + \int_0^s H(su) K(ut) du .$$

Nous disons que L s'obtient en composant K et H et nous écrivons:

$$L = KH .$$

Si K et H sont bornés, il en est de même de L . Si K et H sont permutables de seconde espèce on a

$$KH = HK .$$

Nous dirons enfin que le noyau H est résoluble si il existe un noyau H^{-1} unique et bien déterminé tel que

$$g = H[f]$$

entraîne

$$f = H^{-1}[g] ,$$

quelque soit f il est nécessaire et suffisant pour cela que $\lambda = -1$ ne soit pas un pôle de la résolvante du noyau H . Remarquons que si H est résoluble, il n'existe aucune fonction, non presque partout nulle, telle que $H[f]$ le soit.

Si donc H est résoluble et si H et K sont permutables on a:

$$H^{-1}KH = K .$$

H étant résoluble nous poserons en général.

$$H^{-1}KH = \bar{K} ,$$

\bar{K} est le transformé de K par H .

On démontre très aisément que K et \bar{K} ont mêmes traces et par suite même déterminante fondamentale et mêmes valeurs singulières avec le même ordre de multiplicité.

De plus si φ est une fondamentale de K et ρ la valeur singulière correspondante telle que

$$K[\varphi] = \rho\varphi ,$$

on voit sans peine que

$$\bar{K} \{ H[\varphi] \} = \rho H[\varphi].$$

Comme on a aussi

$$K = H \bar{K} H^{-1},$$

on voit que si ψ est une fondamentale de \bar{K} et ρ la valeur singulière correspondante telle que

$$\bar{K}[\psi] = \rho \psi,$$

on a

$$K[H^{-1}[\psi]] = \rho H^{-1}[\psi];$$

Conséquemment soit ρ une valeur singulière de K que je supposerai multiple et différente de 1. Designons par $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$, toutes les fondamentales linéairement indépendantes qui lui correspondent. Elles forment une multiplicité r fois étendue que K invarie par homothétie. (C'est-à-dire que toute fonction f de cette multiplicité a pour transformée ρf — ($\rho \neq 1$)).

\bar{K} admet ρ comme valeur singulière avec le même ordre de multiplicité et la multiplicité fonctionnelle correspondante que \bar{K} invarie par homothétie (avec le rapport ρ) est exactement r fois étendue et est coordonnée par les fonctions linéairement indépendantes.

$$H[\varphi_1], H[\varphi_2], \dots, H[\varphi_r],$$

(le dernier point résulte de ce que H est résoluble).

On verrait exactement de la même manière que le noyau associé \bar{K}^* de \bar{K} donné par la formule

$$\bar{K}^* = H^* K^* H^{*-1}$$

a mêmes valeurs singulières que K^* et K avec le même ordre de multiplicité et que les multiplicités invariées par \bar{K}^* par homothétie s'obtiennent par la règle précédente où on remplace K par K^* et H par H^{*-1} .

Mais dans le cas général K admet d'autres multiplicités linéaires invariées. Nous appellerons M les multiplicités que K invarie par homothétie (avec rapport différent de 1). Si elles sont complètes, c'est-à-dire si elles remplissent tout l'espace, il est facile de voir que leur donnée, combinée avec celles des rapports ρ correspondants à chacune d'elle détermine complètement et d'une manière unique, la transformation K et par suite le noyau K^* .

De même si M^* sont les multiplicités invariées par K^* par homothétie, la donnée de M^* , quand elles remplissent l'espace, combinée avec celle des ρ détermine complètement et univoquement K^* et donc K .

(1) Il est à remarquer que la donnée des ρ ne peut se faire arbitrairement, il faut en particulier, si K est borné, que la série: $\sum_i \frac{1}{(\rho_i - 1)^2}$ soit convergente, ce qui résulte de ce que la déterminante est au plus de genres 2, dans cette hypothèse.

Soit en général L , la multiplicité orthogonale à toutes les M et qui achève avec elles de remplir l'espace; et L^* , la multiplicité analogue pour les M^* . On voit aisément que L^* et tous les M emplissent l'espace, et sont deux à deux disjointes.

De même, pour L et toutes les M^* . Par suite les M et les M^* sont complètes ou non simultanément. Quand elles sont complètes, nous disons que K et K^* sont complets.

Quand K n'est pas complet, on constate qu'il invarie L^* dans son ensemble, mais d'une manière assez complexe. En général, une portion J^* de L^* est ponctuellement invariante; dans la portion restante, les échanges de points pourront être quelconques, mais il n'y aura certainement pas de multiplicité linéaire invariante par homothétie. J^* pourra d'ailleurs disparaître, ou être confondu avec L^* tout entier. C'est le cas des noyaux symétriques non complets. De tels noyaux où L^* est invariée par K , point par point seront dit *symétrôïdes*. De même K^* pourra être aussi symétrôïde.

Pour un noyau symétrôïde non complet K , la donnée des M , des rapports ρ correspondants et de L^* (c'est-à-dire de l'ensemble des M^*) déterminent complètement le noyau.

En définitive, de toutes ces remarques, résulte:

1° que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau résoluble H soit permutable avec un noyau K complet est que H invarie séparément les différentes M de K ;

2° que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau résoluble H soit permutable avec un noyau K symétrôïde est que H invarie séparément, les différentes M de K ainsi que la multiplicité L^* ou bien si K^* est symétrôïde, que H^* invarie séparément les M^* et L .

Dans le cas général, il est toujours nécessaire que H invarie séparément les M et L^* , que H^* invarie séparément les M^* et L , mais ce n'est plus suffisant.

Ajoutons enfin que H peut invarier les M et L^* par exemple de toutes les manières possibles, c'est-dire tant par homothétie que point par point ou de la manière la plus générale (comme K invarie L^*). C'est pour cela que dans les cas 1° et 2° les noyaux H permutable avec K (complet ou symétrôïde) ne sont pas permutable deux à deux. Mais on pourra trouver dans leur ensemble des ensembles partiels de noyaux permutable. Il suffirait par exemple de prendre tous les noyaux H complets qui invarient les M et les L^* par homothétie.

CAS PARTICULIER OU K EST UN NOYAU SYMÉTRIQUE COMPLET. — Dans ce cas L^* disparaît et les M sont des M_i réelles et distinctes, deux à deux orthogonales, or une M_i ne peut être invariée par une opération linéaire que point par point ou par homothétie, donc dans ce cas, tous les noyaux H permutable à K sont deux à deux permutable. Ce sont les noyaux symétriques admettant comme M invariantes tout ou partie des M invariantes de K .

Il resterait à voir ce qui se passe quand H n'est pas résoluble, mais ce n'est là qu'une extension aisée; ou quand K n'est ni complet, ni symétrique. Il est tout d'abord nécessaire pour cela de voir comment un tel noyau invarie la multiplicité L^* . La question se ramène à l'étude des noyaux dont la déterminante fondamentale n'a pas de zéro. J'y reviendrai.

Matematica. — *Sugli invarianti adiabatici di un generico sistema differenziale.* Nota di H. GEPPERT, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Ci proponiamo di dare in questa Nota una definizione rigorosa del concetto di invariante adiabatico per un qualsiasi sistema differenziale, e risolveremo poi in due Note successive completamente il problema di trovare questi invarianti nel caso di due o più dimensioni. I nostri sviluppi ci permetteranno di indicare invarianti adiabatici anche per sistemi meccanici non hamiltoniani e considereremo l'esempio dell'oscillatore smorzato su cui, come particolarmente meritevole di studio, aveva attirata la mia attenzione il prof. Levi-Civita.

Sia dato il seguente sistema differenziale

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x | a_1, \dots, a_p) \quad (i = 1 \dots n)$$

dove le X_i non dipendono esplicitamente da t e le $a_1 \dots a_p$ indicano dei parametri. Tenendo costanti quest'ultimi, il sistema ammetterà l'integrale generale

$$(2) \quad x_i = x_i(t - t_0, c_1, \dots, c_{n-1} | a_1, \dots, a_p) \quad (i = 1 \dots n),$$

dove t_0 e le c rappresentano le n costanti di integrazione.

Supponiamo che queste funzioni siano regolari per tutti i valori di t che dovremo prendere in considerazione. Se poi le $a_1 \dots a_p$ non sono più costanti, ma funzioni di t , si possono ancora pensare le soluzioni sotto la forma (2), però si devono considerare le $t_0, c_1 \dots c_{n-1}$ come funzioni del tempo. Risolvendo le (2) rispetto a questi argomenti si troverà

$$(3) \quad \begin{cases} f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_p) = c_i & (i = 1 \dots n-1) \\ f_n(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_p) = t - t_0, \end{cases}$$

e quindi

$$(4) \quad \frac{dc_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial a_\alpha} \cdot \frac{da_\alpha}{dt}, \quad \frac{dt_0}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial f_n}{\partial a_\alpha} \cdot \frac{da_\alpha}{dt}$$

(1) Nella seduta del 17 giugno 1928.

Introduciamo ora invece delle x_i le (2) e poniamo

$$(5) \quad \frac{\partial f_i}{\partial a_v} = \varphi_{i,v}(t - t_0, c_1 \dots c_{n-1} | a_1 \dots a_p) \\ (i = 1 \dots n \quad ; \quad v = 1 \dots p);$$

allora le (4) assumono la forma seguente

$$(6) \quad \frac{dc_i}{dt} = \sum_{v=1}^p \varphi_{i,v} \frac{da_v}{dt}, \quad \frac{dt_0}{dt} = - \sum_{v=1}^p \varphi_{n,v} \frac{da_v}{dt}.$$

Ben si intende, supponiamo riferirci a valori degli argomenti per cui tutti i coefficienti φ risultano funzioni regolari.

Per arrivare al concetto dell'invariante adiabatico prendiamo una generica funzione

$$I(t, t_0, c_1 \dots c_{n-1}, a_1 \dots a_p)$$

e formiamone la derivata rispetto al tempo

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \sum_{v=1}^p \left\{ - \frac{\partial I}{\partial t_0} \varphi_{n,v} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial I}{\partial c_i} \varphi_{i,v} + \frac{\partial I}{\partial a_v} \right\} \cdot \frac{da_v}{dt}.$$

Chiameremo I invariante adiabatico del sistema (1) se il valore medio di $\frac{dI}{dt}$ rispetto a t è uguale a zero per qualsiasi sistema di valori $\frac{da_v}{dt}$, dove però si calcoli questo valore medio come se le t_0, c_i, a_v fossero costanti (1).

Denoteremo in seguito con $\bar{\alpha}$ il valore medio di α ; cioè

$$\alpha = \frac{1}{T} \cdot \int_T \alpha dt$$

dove T è un intervallo qualsiasi, ma fisso, a cui si riferisce questa media. Nel caso in cui α è una funzione periodica si farà coincidere la T col periodo stesso e i fisici generalmente considerano la media per cui $T \rightarrow \infty$, cioè il limite (che non esiste necessariamente)

$$\bar{\alpha} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T \alpha dt.$$

Noi invece ci riferiremo ad un intervallo T qualunque.

(1) Il motivo perchè diamo a I il nome di *invariante adiabatico* è quello: i fisici considerano variazioni di sistemi meccanici in cui i parametri a_v cambiano in modo infinitamente lento (adiabaticamente) i loro valori; da una tale trasformazione si potrà considerare la I come essenzialmente costante e quindi come invariante.

Si trovano quindi le equazioni caratteristiche di un invariante adiabatico:

$$(7) \quad \frac{\partial I}{\partial t} = 0, \\ -\frac{\partial I}{\partial t_0} \varphi_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial I}{\partial c_i} \varphi_{i+1} + \frac{\partial I}{\partial a_v} = 0 \quad (v = 1 \dots p)$$

Il problema si semplifica considerevolmente se ci limitiamo a cercare quelli invarianti che non dipendono esplicitamente da t_0 , per cui vale la

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0,$$

e quindi segue

$$(8) \quad -\frac{\partial I}{\partial t_0} \varphi_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial I}{\partial c_i} \varphi_{i+1} + \frac{\partial I}{\partial a_v} = 0. \quad (v = 1 \dots p)$$

Sono queste p equazioni differenziali per I con $n - p$ variabili indipendenti che permetteranno di trovare n integrali indipendenti ammesso che siano soddisfatte le condizioni di completa integrabilità.

Prima di studiare il problema generale daremo due esempi che illustreranno le nostre idee.

1° Esempio. Si tratti del sistema seguente

$$\frac{dx_1}{dt} = -a_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{a_1} x_1$$

che si integra mediante le equazioni

$$x_1 = c_1 \cos(t - t_0), \quad x_2 = \frac{c_1}{a_1} \sin(t - t_0), \\ c_1 = \sqrt{x_1^2 + a_1^2 x_2^2}, \quad t - t_0 = \arctg\left(a_1 \frac{x_2}{x_1}\right);$$

l'intervallo di t si estende da $-\infty$ fino a $+\infty$ e prenderemo i valori medi rispetto a questo intervallo; si ha allora

$$\varphi_{11} = \frac{a_1 x_2^2}{x_1^2 + a_1^2 x_2^2} = \frac{c_1}{a_1} \sin^2(t - t_0), \quad \varphi_{12} = \frac{c_1}{2a_1}, \\ \varphi_{21} = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + a_1^2 x_2^2} = \frac{1}{2a_1} \sin 2(t - t_0), \quad \varphi_{22} = 0,$$

quindi la (8) assume questa forma:

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} + \frac{c_1}{2a_1} \cdot \frac{\partial I}{\partial c_1} = 0.$$

Si trova subito un integrale particolare

$$I = \frac{c_1^2}{a_1}$$

e con ciò la soluzione generale del problema è data dall'espressione

$$I = f\left(\frac{c_1^2}{a_1}, t_0\right).$$

2° Esempio. Consideriamo il sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1^2 \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -a_2^2$$

le cui soluzioni sono

$$x_1 = \sqrt{c_1 - a_1^2 a_2^2 (t - t_0)^2}, \quad x_2 = -a_2^2 (t - t_0),$$

$$x_1^2 + \frac{a_1^2}{a_2^2} x_2^2 = c_1, \quad t - t_0 = -\frac{x_2}{a_2^2}.$$

Affinchè le relazioni siano reali bisogna limitare t all'intervallo contenuto fra i valori $t_0 - \frac{\sqrt{c_1}}{a_1 a_2}$ e $t_0 + \frac{\sqrt{c_1}}{a_1 a_2}$ cui riferiremo i valori medi. Si trova

$$\varphi_{11} = \frac{2a_1}{a_2^2} x_2^2 = 2a_1 a_2^2 (t - t_0)^2, \quad \bar{\varphi}_{11} = \frac{a_1 a_2}{2\sqrt{c_1}} \cdot 2a_1 a_2^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{c_1 \sqrt{c_1}}{a_1^3 a_2^3} = \frac{2}{3} \frac{c_1}{a_1}$$

$$\varphi_{12} = -\frac{2a_1^2}{a_2^2} x_2^2 = -2a_1^2 a_2^2 (t - t_0)^2, \quad \bar{\varphi}_{12} = -\frac{2}{3} \frac{c_1}{a_2}$$

$$\varphi_{21} = \bar{\varphi}_{21} = 0,$$

$$\varphi_{22} = \frac{2x_2}{a_2^3} = -\frac{2}{a_2} (t - t_0), \quad \bar{\varphi}_{22} = 0,$$

e quindi si hanno le due equazioni differenziali seguenti

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} + \frac{2}{3} \frac{c_1}{a_1} \frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} - \frac{2}{3} \frac{c_1}{a_2} \frac{\partial I}{\partial c_1} = 0.$$

Una loro soluzione particolare è

$$I = \frac{a_2}{a_1} c_1^{3/2},$$

da cui risulta l'invariante adiabatico generale

$$I = f\left(\frac{a_2}{a_1} c_1^{3/2}, t_0\right).$$

Un caso non è suscettibile di esser trattato, quello in cui i valori medi $\overline{\varphi_{i_1}}$ non esistono e che si presenta nel più semplice esempio di una dimensione

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1, \quad t - t_0 = \frac{1}{a_1} x_1,$$

dove si ha

$$\varphi_{11} = -\frac{x_1}{a_1^2} = -\frac{t - t_0}{a_1}$$

e quindi φ_{11} non esiste.

Nella Nota successiva risolveremo poi il problema dell'integrazione della (8) nel caso di due dimensioni.

Matematica. — *Sulla definizione dell'area di una superficie.*
Nota di R. CACCIOPOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. MARCOLONGO.

La definizione che Lebesgue ha data dell'area di una superficie curva ⁽²⁾, pur essendo assolutamente generale e del tutto soddisfacente, non sembra quella che più converrebbe porre a base di una teoria delle superficie quadrabili; questa verrebbe infatti ad urtare nell'ostacolo che costituisce la difficoltà di costruire, per la superficie più generale, una successione di superficie poliedriche di approssimazione, le cui aree ne tendano all'area (finita o infinita), cioè di sostituire nel calcolo dell'area la ricerca di un limite ordinario a quella di un limite d'indeterminazione.

Si presenta allora spontanea l'idea di una definizione semi-analitica, poggiata sulla nozione di *elemento d'area*, che estenda quella di lunghezza d'arco e che s'identifichi *a posteriori* con la definizione di Lebesgue. Ad un tentativo in questa direzione ho già dedicato un precedente lavoro ⁽³⁾; mi propongo qui di apportare innanzi tutto alcuni complementi essenziali alla mia definizione, di mostrare poi come essa valga ad integrare ed illumi-

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) THÈSE, « Annali di Matematica », 1902.

(3) *Sulla quadratura delle superficie piane e curve* (Questi « Rendiconti », settembre 1927).

Il prof. Vitali mi ha fatto osservare come a lui ed a Banach sia dovuta una prima iniziativa guidata da criteri analoghi (« Fundamenta Mathematicae », VII e VIII). La definizione di Banach è però sostanzialmente diversa dalla mia, come anche, per conseguenza, da quella di Lebesgue (v. la mia Nota *Sulle coppie di funzioni a variazione limitata*, « Rend. Acc. Napoli », aprile 1928).

nare alcune osservazioni frammentarie fatte recentemente da altri Autori⁽¹⁾, e di applicarla infine allo studio di un'estesa classe di superficie.

1. Sia C una curva piana rettificabile, di equazioni parametriche $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ e di intervallo base $(0, T)$. Indichiamo con $\Phi(t)$ e con $\Psi(t)$ le variazioni totali, nell'intervallo $(0, t)$ delle funzioni φ e ψ rispettivamente. La lunghezza di C è data tanto dall'integrale

$$\int_0^T \sqrt{d\varphi^2 + d\psi^2}^{(2)},$$

come dall'altro

$$\int_0^T \sqrt{d\Phi^2 + d\Psi^2}.$$

Consideriamo ora una superficie S di equazioni parametriche

$$(1) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v);$$

ne diremo D il dominio base.

Se S è quadrabile, per ognuna delle coppie di funzioni (φ, ψ) , (ψ, χ) , (φ, χ) si possono definire la *variazione totale* e la *variazione semplice* sopra un qualunque insieme misurabile (B) interno a D⁽³⁾; si ottengono così sei funzioni additive d'insieme: $V_1, W_1; V_2, W_2; V_3, W_3$. I due integrali

$$\int_D \sqrt{dV_1^2 + dV_2^2 + dV_3^2}, \quad \int_D \sqrt{dW_1^2 + dW_2^2 + dW_3^2},$$

risultano eguali, e per analogia con la definizione ricordata di lunghezza d'arco, si assume come *area*⁽⁴⁾ di S il loro valore comune.

Ricordiamo le definizioni delle funzioni V e W. Siano I una porzione (aperta) di D, ρ una rete triangolare variabile contenuta in I e che invade I, P una rete del piano xy i cui nodi corrispondono ai nodi di ρ e che invade la proiezione di S su xy. L'*area* di P (in valore e segno) è quella circoscritta sul piano *orientato* xy dall'*orlo libero* C di P; l'*area totale* ne è invece la somma dei valori assoluti delle aree dei singoli triangoli. Scri-

(1) RADÒ, *Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes*. («Comptes Rendus», 183, pp. 588-90 e «Fundamenta Mathematicae», X, pp. 197-210). TONELLI, *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata* (Questi «Rendiconti», 4 marzo 1928).

(2) Questo simbolo d'integrale si interpreta senz'altro: esso rappresenta il limite delle somme $\sum \sqrt{\Delta\varphi^2 + \Delta\psi^2}$ relative a decomposizioni di $(0, T)$ l'ampiezza dei cui intervalli tenda a zero. Analogamente si definiranno gli integrali doppi introdotti più oltre.

(3) Vedi le mie due Note citate.

(4) *Area interna*, secondo la definizione di Lebesgue.

vendo $\rho \rightarrow I$ intenderemo che ρ invade I mentre che l'area totale di P tende al suo minimo limite. Ed avremo allora

$$\lim_{\rho \rightarrow I} \text{area totale } P = V_1(I) \quad , \quad \lim_{\rho \rightarrow I} \text{area } P = W_1(I).$$

Analogamente si definiscono V_2 e W_2 , V_3 e W_3 .

Che i due integrali precedenti siano eguali è dovuto al fatto che la *variazione totale* della funzione additiva W_k è appunto V_k .

Ma alla rete P può associarsi una terza misura, quella dell'*area totale* che l'orlo libero C stacca dal piano xy . Questa pure tende, per $\rho \rightarrow I$, ad un limite determinato e finito che risulta anch'esso una funzione (generalmente non additiva) degli insiemi di D . Indicheremo questa funzione con U_1 , e la chiameremo la *pseudo-variazione totale* della coppia (φ, ψ) ; analogamente definiremo U_2 e U_3 .

Evidentemente si ha sempre

$$|W_k(I)| \leq U_k(I) \leq V_k(I),$$

sicchè si ottengono per l'area di S le tre espressioni diverse

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{area } S &= \int_D \sqrt{dW_1^2 + dW_2^2 + dW_3^2} = \int_D \sqrt{dU_1^2 + dU_2^2 + dU_3^2} = \\ &= \int_D \sqrt{dV_1^2 + dV_2^2 + dV_3^2}. \end{aligned}$$

2. Un'esempio chiarirà appieno le definizioni precedenti.

Poniamo $x = \varphi(u, v) = u$, $y = \psi(u, v) = u \left[-\sqrt{|v|} + v - \frac{v^2}{2} + \frac{3}{2} \right]$,

e consideriamo la superficie piana S che queste formole fanno corrispondere al quadrato D , del piano uv , di vertici opposti $(-1, -1)$ e $(1, 1)$.

Essa si compone dei due triangoli AOD e COB (fig. 1), *positivo* il primo, *negativo* il secondo (adottando la convenzione ordinaria per l'attribuzione dei segni alle aree); e degli altri due EOA e FOB , contati ognuno due volte, positivamente l'una e negativamente l'altra⁽¹⁾. L'area (in valore e segno) di S è nulla; l'area *totale* ne è invece

$$\text{area } AOD + \text{area } BOC + 2 \text{ area } EOA + 2 \text{ area } FOB = 2 \text{ area } AOD + 4 \text{ area } EOA;$$

infine l'area totale che il quadrilatero intrecciato $ABCD$, orlo libero di S , stacca dal piano xy vale $2 \text{ area } AOD$.

(1) Propriamente, alle porzioni di D contenute nel primo e secondo quadrante corrispondono rispettivamente il triangolo (negativo) OEA e l'altro (positivo) OBF ; a quelle contenute nel terzo e quarto quadrante il triangolo (negativo) OFC e l'altro (positivo) ODE .

Pertanto la variazione, la pseudo-variazione totale e la variazione totale della coppia (φ, ψ) sono rispettivamente

$$W(D) = 0, \quad U(D) = 2, \quad V(D) = 3.$$

3. Applichiamo le considerazioni che precedono ad una superficie S di equazione

$$(3) \quad z = f(x, y),$$

f essendo definita in un dominio rettangolare D del piano xy .

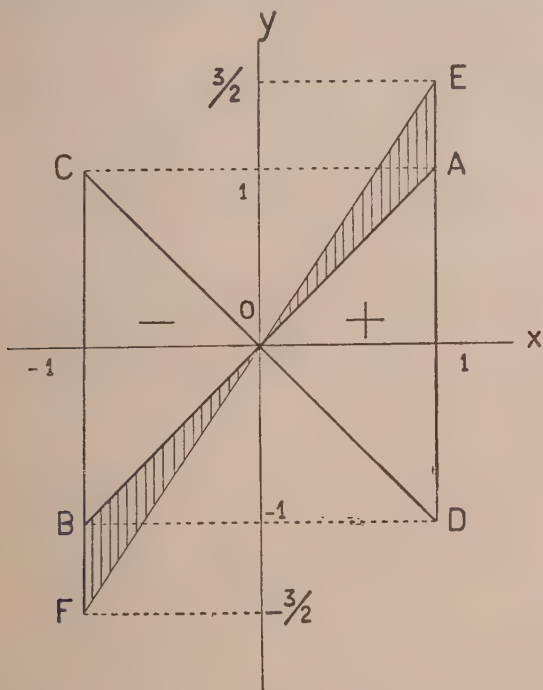


Fig. 1.

Sia R un dominio rettangolare, di estremi (x', y') e (x'', y'') , contenuto in D . La variazione $W_1(R)$, la pseudo-variazione totale $U_1(R)$ e la variazione totale $V_1(R)$ della coppia (x, y) su R valgono tutte e tre $(x'' - x')(y'' - y')$. Per le coppie (y, z) e (z, x) si ha

$$(4) \quad W_2(R) = \int_{y'}^{y''} [f(x', y) - f(x'', y)] dy, \quad W_3(R) = \int_{x'}^{x''} [f(x, y') - f(x, y'')] dx,$$

$$(5) \quad U_2(R) = \int_{y'}^{y''} |f(x', y) - f(x'', y)| dy, \quad U_3(R) = \int_{x'}^{x''} |f(x, y') - f(x, y'')| dx,$$

ed indicando con $\omega_1(y)$ e $\omega_2(x)$ le variazioni totali di $f(x, y)$ rispetto ad x e ad y , negli intervalli (x', x'') e (y', y'') rispettivamente⁽¹⁾,

$$V_2(R) = \int_{y'}^{y''} \omega_1(y) dy, \quad V_3(R) = \int_{x'}^{x''} \omega_2(x) dx.$$

Poniamo

$$L(R) = \sqrt{(x'' - x')^2 (y'' - y')^2 + W_2^2(R) + W_3^2(R)},$$

$$M(R) = \sqrt{(x'' - x')^2 (y'' - y')^2 + U_2^2(R) + U_3^2(R)},$$

$$N(R) = \sqrt{(x'' - x')^2 (y'' - y')^2 + V_2^2(R) + V_3^2(R)}.$$

Per calcolare gli integrali (2) possiamo ricorrere a decomposizioni di D in domini rettangolari. Per una generica decomposizione siffatta, indichiamo con δ la massima fra le diagonali dei suoi rettangoli R_1, R_2, R_3, \dots . Sarà

$$(6) \quad \text{area } S = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i L(R_i) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i M(R_i) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i N(R_i).$$

Si vengono ad ottenere in tal modo tre procedimenti analitici per il calcolo dell'area di S ⁽²⁾; ed il primo può immediatamente estendersi, sostituendo alle decomposizioni di D in domini rettangolari quelle più generali ottenute mediante curve rettificabili qualunque. Sia infatti Δ un dominio, contenuto in D , limitato da una curva semplice rettificabile C . Si avrà

$$(7) \quad W_2(\Delta) = - \int_C f(x, y) dy, \quad W_3(\Delta) = \int_C f(x, y) dx,$$

e definita come poc'anzi $L(\Delta)$,

$$(8) \quad \text{area } S = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i L(\Delta_i),$$

δ indicando il massimo fra i diametri dei domini Δ .

Le funzioni di dominio W_2 e W_3 possono definirsi a traverso le (7) indipendentemente da ogni ipotesi su $f(x, y)$ (come anche le funzioni di di rettangolo U_1 e U_2 mediante le (5)). E la superficie sarà quadrabile o no secondo che il limite, a secondo membro della (8) risulterà finito o infinito.

(1) Se S è quadrabile, queste due funzioni risultano definite quasi ovunque e sommabili, come hanno mostrato BANACH (v. più oltre) e TONELLI (*Sulla quadratura delle superficie*, questi « Rendiconti », 1° semestre 1926).

(2) Se ne potrebbe definire anche un quarto, sostituendo negli integrali (5) alle variazioni assolute di f su (x', x'') e (y', y'') le sue oscillazioni sui medesimi intervalli, e si otterrebbe così l'area secondo Banach. Pertanto le definizioni di Lebesgue e di Banach coincidono per le superficie (3); ed infatti le condizioni di quadrabilità di Banach (« Fundamenta Mathematicae », VII, p. 236) coincidono con quelle di Tonelli.

Se in particolare la superficie è *rettificabile*, se cioè la funzione $f(x', y)$ è *uniformemente lipschitziana* si potrà anche scrivere

$$W_2(\Delta) = \frac{1}{2} \int_C (y d\tilde{z} - \tilde{z} dy) \quad , \quad W_3(\Delta) = \int_C (\tilde{x} dx - x d\tilde{x}),$$

ed il limite (8) sarà sempre finito⁽¹⁾.

I risultati che abbiamo esposti sono stati dimostrati (definita l'area secondo Lebesgue) per le superficie (3) e sotto la forma particolare (6) il primo ed il secondo da Radò, il terzo da Tonelli. Ma non si era fin qui attribuito ad essi un preciso significato geometrico⁽²⁾, nè se n'era intravista la portata generale⁽³⁾.

4. Alle definizioni che propongo potrebbe essere obbiettato che esse riducono e circoscrivono più che non sormontino effettivamente la difficoltà fondamentale che ho segnalato in principio. V'ha luogo peraltro a dubitare che quest'ostacolo, in quanto sostanzialmente attinente alla natura della questione, possa venire completamente soppresso. Ma il punto di vista che adottato ha almeno il vantaggio di suggerire in casi molto generali un procedimento per il calcolo dell'area. Segnalerò qui uno di questi casi, che include quello delle superficie dotate di rappresentazione cartesiana.

Come è noto, si chiama *semirettificabile* una curva piana $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ se una delle funzioni φ, ψ è a variazione limitata. Diremo poi *semirettificabile* una curva sghemba $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ se le sue tre proiezioni sui piani coordinati sono *semirettificabili*, cioè se due delle funzioni φ, ψ, χ sono a variazione limitata.

Se la rappresentazione parametrica (1) della superficie S è tale che ad ogni curva rettificabile del dominio base D fa corrispondere su S una curva *semirettificabile*, diremo che questa superficie è *semirettificabile*. Dovranno essere allora due delle funzioni φ, ψ, χ *uniformemente lipschitziane*; supporremo che ciò abbia luogo per le prime due.

Con questa ipotesi potremo ancora definire le funzioni di dominio W_2 e W_3 mediante le (7), e ricercare il limite (8). *Avremo così un procedimento per riconoscere se S è quadrabile secondo la nostra definizione, e per valutarne l'area.*

(1) Si ottiene così la definizione proposta, più generalmente per le superficie rettificabili di equazioni (1), da NALLI e ANDREOLI (*Sull'area di una superficie, ecc.*, « Rend. Circolo mat. di Palermo, LII). Peraltro, al calcolo dell'area di una superficie rettificabile basta la formula classica (RADEMACHER, *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit*, « Math. Ann. », 81).

(2) In proposito vi è soltanto un cenno di RADÒ (« Comptes Rendus », 183, p. 590).

(3) Difatti TONELLI (loc. cit., questi « Rendiconti », 4 marzo 1928) sembra non aver notato che, il limite (8), in quanto dà l'area di S , è certamente finito se S è rettificabile; sicchè le funzioni che egli definisce come *a variazione limitata* ($N - A, I$) non sono altro che quelle uniformemente lipschitziane.

Una forma semplice si può dare alle condizioni di quadrabilità adottando per il calcolo del limite (8) decomposizioni di D in domini rettangolari (supposto per semplicità essere anche D un dominio rettangolare). Affinchè S sia quadrabile occorre e basta che siano superiormente limitate, per tutte le decomposizioni di D in domini rettangolari R_i , le somme

$$\sum_i |W_2(R_i)| \quad , \quad \sum_i |W_3(R_i)|.$$

Siano (u', v') e (u'', v'') gli estremi di un dominio rettangolare R . Si avrà

$$\begin{aligned} W_2(R) &= \int_{u'}^{u''} \left[\chi(u, v'') \frac{\partial \psi(u, v'')}{\partial u} - \chi(u, v') \frac{\partial \psi(u, v')}{\partial u} \right] du - \\ &\quad - \int_{v'}^{v''} \left[\chi(u'', v) \frac{\partial \psi(u'', v)}{\partial v} - \chi(u', v) \frac{\partial \psi(u', v)}{\partial v} \right] dv, \\ W_3(R) &= - \int_{u'}^{u''} \left[\chi(u, v'') \frac{\partial \varphi(u, v'')}{\partial u} - \chi(u, v') \frac{\partial \varphi(u, v')}{\partial u} \right] du + \\ &\quad + \int_{v'}^{v''} \left[\chi(u'', v) \frac{\partial \varphi(u'', v)}{\partial v} - \chi(u', v) \frac{\partial \varphi(u', v)}{\partial v} \right] dv, \end{aligned}$$

sicchè $W_2(R)$ e $W_3(R)$ rappresentano le variazioni su R delle due funzioni (definite ognuna a meno di una funzione additiva di sola u e di un'altra di sola v)

$$\Psi(u, v) = \int \chi \frac{\partial \psi}{\partial u} du - \int \chi \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \quad , \quad \Phi(u, v) = - \int \chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \int \chi \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$

rispettivamente. Siamo giunti così al teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie semirettificabile S sia quadrabile è che le due funzioni $\Phi(u, v)$ e $\Psi(u, v)$ siano a variazione limitata (1).

In particolare, se $x = u, y = v$:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie $z = f(x, y)$ sia quadrabile è che le due funzioni

$$\int f(x, y) dx \quad , \quad \int f(x, y) dy$$

siano a variazione limitata (2).

(1) Nel senso ordinario.

(2) Questa è appunto la forma definitiva data da Tonelli alle condizioni di quadrabilità, salvo la differenza puramente formale dell'enunciato.

Matematica. — *Sull'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.* Nota ⁽¹⁾ di A. ROSENBLATT, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Ho dato, nel 1908, in una Nota pubblicata nello « Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik ⁽²⁾ », dell'Accademia Svedese delle Scienze, il seguente criterio d'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

che, per $x = 0$ assume il valore 0: « La soluzione è unica, se per due valori y', y'' nel campo di continuità della $f(x, y)$:

$$0 \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq +b,$$

sussiste la disuguaglianza

$$(2) \quad \left| \frac{f(x, y') - f(x, y'')}{y' - y''} \right| \leq \frac{k}{x}, \quad 0 < k < 1.$$

In una Nota presentata all'Accademia di Parigi ⁽³⁾ ho perfezionato il mio teorema. Nella Nota presente vorrei dare qualche analogo perfezionamento del mio teorema per un sistema di due equazioni ordinarie, estendibile subito ad un sistema di più di 2 equazioni.

1. Ma anzitutto sono obbligato di ritornare alle mie vecchie considerazioni, perchè, essendo allora costretto di essere conciso, non ho potuto sviluppare le brevi asserzioni ivi fatte. Così il sig. Perron, in una lettera a me diretta esprime il dubbio, se col metodo delle approssimazioni successive del sig. Picard si possa dimostrare non solamente l'esistenza, ma anche l'unicità della soluzione.

Il dubbio svanisce, se si suppone l'esistenza di un integrale Y diverso dall'integrale y dato dalle approssimazioni successive

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad y_0 \equiv 0.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1928.

(2) *Ueber die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen*, t. 5.

(3) Questa Nota è sviluppata nel lavoro: *Sobre las condiciones que aseguran la unicidad de una solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias* inviato alla « Revista de Ciencias » del señor G. Garcia a Lima.

Sia $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, M essendo il massimo di $|f(x, y)|$. Deve esistere un valore ζ di x , $0 \leq \zeta < \alpha$, tale che, nell'intervallo chiuso $(0, \zeta)$ i due integrali Y, y coincidono, mentre esistono punti $\zeta + h$, dove h è > 0 e $\zeta + h$ è $< \alpha$, tali che Y sia $\neq y$ e $|Y| < b$ nell'intervallo $(0, \zeta + h)$. Abbiamo

$$Y = \int_0^x f(x, Y) dx,$$

dunque è

$$|Y| < Mx, \quad (0 \leq x \leq \zeta + h).$$

Abbiamo, inoltre,

$$Y - y_n = \int_0^x [f(x, Y) - f(x, y_{n-1})] dx,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

e perciò è

$$|Y - y_1| \leq k \int_0^x M dx = M k x,$$

ed in generale

$$|Y - y_n| \leq M k^{n-1} x,$$

donde

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

nell'intervallo $(\zeta, \zeta + h)$, ciò che era da dimostrare.

La seconda dimostrazione è fondata sopra la considerazione dell'equazione ausiliaria

$$(3) \quad \frac{dz}{dx} = \Theta(x) \frac{z}{x}$$

ed è solamente accennata. Nel 1926 il sig. Nagumo⁽¹⁾ ha dimostrato un teorema un po' più generale nel quale nella formula (2) figura a destra $< \frac{1}{x}$ invece di $\leq \frac{k}{x}$. Un ulteriore perfezionamento è stato compiuto dal sig. Perron⁽²⁾, che ha mostrato che (2) vale anche con $k = 1$.

2. Consideriamo ora il sistema di due equazioni differenziali

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z).$$

(1) Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösungen von Differentialgleichung « Japanese Journal of Mathematics », t. 3, 1926.

(2) Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung, « Mathematische Zeitschrift », t. 28, 1928.

f, g essendo funzioni continue nel campo C

$$0 \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq +b, \quad -b \leq z \leq +b.$$

Abbiamo il teorema:

Teorema: « L'unicità dell'integrale y, z che, per $x = 0$ assume i valori $y = z = 0$, è assicurata nell'intervallo $(0, \alpha)$, $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, se nel campo C sussiste la disuguaglianza

$$(5) \quad |y_2 - y_1| |f(x, y_2, z_2) - f(x, y_1, z_1)| + |z_2 - z_1| |g(x, y_2, z_2) - g(x, y_1, z_1)| \leq \frac{\Theta(x)[(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}{x} \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{1-\varepsilon}} \right], \quad \varepsilon > 0$$

la funzione positiva $\Theta(x)$ essendo integrabile nell'intervallo $(0, a)$ e soddisfacente alla disuguaglianza

$$(6) \quad \int_0^x \Theta(u) du \leq x.$$

Infatti, poniamo

$$y_{12} = y_2 - y_1, \quad z_{12} = z_2 - z_1, \\ r_{12}^2 = (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

e confrontiamo il sistema (4) coll'equazione

$$(7) \quad \frac{d\bar{r}^2}{dx} = 2 \frac{\bar{r}^2}{x} \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{1-\varepsilon}} \right].$$

Abbiamo da questa equazione

$$\log \bar{r}^2 = \log x^2 + 2 \int \frac{d \log x}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{1-\varepsilon}} = \log x^2 + \frac{2}{\varepsilon} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-\varepsilon} + C,$$

e l'integrale che, per $x = x_0$, assume il valore positivo $\bar{r}_0^2 = (y_{20} - y_{10})^2 + (z_{20} - z_{10})^2$ è

$$(8) \quad \frac{\bar{r}_0^2}{\bar{r}^2} = \frac{x_0^2}{x^2} e^{\frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\log \frac{1}{x_0}\right)^{-\varepsilon} - \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-\varepsilon} \right]}.$$

Supponiamo che esistano due integrali y_1, z_1 e y_2, z_2 distinti, ma uguali a zero per $x = 0$, e sia

$$r_{12,0}^2 = (y_{20} - y_{10})^2 + (z_{20} - z_{10})^2 = 0.$$

Abbiamo

$$\frac{dr_{12}^2}{dx} = 2(y_2 - y_1) \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} + 2(\gamma_2 - \gamma_1) \frac{d(\gamma_2 - \gamma_1)}{dx},$$

e perciò

$$\left| \int_x^{x_0} \frac{d \log r_{12}^2}{dx} dx \right| \leq \int_x^{x_0} \left| \frac{dr_{12}^2}{dx} \right| \cdot \frac{1}{r_{12}^2} dx \leq 2 \int_x^{x_0} \frac{\Theta(u)}{u} \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{u} \right)^{1+\varepsilon}} \right] du,$$

$0 < x \leq x_0$, r_{12}^2 è diverso da 0 in questo intervallo perchè $\Theta(u)$ è finito. Abbiamo dunque la disuguaglianza

$$(9) \quad \frac{r_{12,0}^2}{r_{12}^2} \leq e^{2 \int_x^{x_0} \frac{\Theta(u)}{u} \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{u} \right)^{1+\varepsilon}} \right] du},$$

e pertanto, ponendo $\bar{r}_0^2 = r_{12,0}^2$ e dividendo (9) per (8), otteniamo

$$\frac{\bar{r}^2}{r_{12}^2} \leq e^{2 \int_x^{x_0} [\Theta(u) - 1] \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{u} \right)^{1+\varepsilon}} \right] \frac{du}{u}}.$$

La funzione

$$\frac{1}{x} \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}} \right]$$

è decrescente, perchè la sua derivata è

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{x^2} \frac{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon} - x \left(\log \frac{1}{x} \right)^\varepsilon \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \frac{1}{x}}{x^2 \left(\log \frac{1}{x} \right)^{2+2\varepsilon}} = \\ & = -\frac{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{2+2\varepsilon} + \left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon} - (1 + \varepsilon) \left(\log \frac{1}{x} \right)^\varepsilon}{x^2 \left(\log \frac{1}{x} \right)^{2+2\varepsilon}} < 0. \end{aligned}$$

Si può allora applicare il teorema della media di O. Bonnet, ottenendo la disuguaglianza

$$\frac{\bar{r}^2}{r_{12}^2} \leq e^{\frac{2}{x} \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}} \right] \int_x^\zeta [\Theta(u) - 1] du},$$

ζ essendo un valore compreso fra x e x_0 . Ma è

$$\int_x^\zeta [\Theta(u) - 1] du \leq \zeta - (\zeta - x) \leq x,$$

dunque $\frac{\bar{r}^2}{r_{12}^2}$ è limitato nell'intervallo $0 \dots x_0$. D'altra parte, deve essere

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\bar{r}^2}{r_{12}^2} = +\infty.$$

Infatti, è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\bar{r}^2}{x^2} = \frac{\bar{r}_0^2}{x_0^2} e^{-\frac{2}{g}} \left(\log \frac{1}{x_0} \right)^{-g} > 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_{12}^2}{x^2} = 0;$$

dunque dovrebbe sussistere (10) e si perviene così ad una contraddizione.

3. Notiamo che il nostro criterio (anche con $\Theta(x) \equiv 1$ e trascurando il termine con $\log \frac{1}{x}$) non è contenuto nel criterio del signor Perron

$$(11) \quad |f(x, y_2, z_2) - f(x, y_1, z_1)| \quad e \quad |g(x, y_2, z_2) - g(x, y_1, z_1)| \leq \\ \leq \frac{1}{x} \max \{ |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1| \};$$

anzi, come si vede facilmente, interferisce con questo criterio. Sorge dunque il problema di trovare un criterio contenente i due come casi particolari.

Un altro problema sarebbe di combinare i criteri dati da me con quelli del sig. Tonelli⁽¹⁾.

Matematica. — *Espressione asintotica di una formola del Levi-Civita.* Nota di A. SIGNORINI, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È ben noto che il corollario del lemma di Green stabilito dal Levi-Civita⁽³⁾ per lo studio della contrazione delle vene liquide in tre dimensioni, si è mostrato fecondo di numerose altre applicazioni idromeccaniche.

Sia σ una superficie chiusa (o, più in generale, un sistema di tali superficie mutuamente esterne); S lo spazio esterno a σ ; P un qualunque punto entro S ; O un centro di riduzione arbitrariamente fissato.

(1) *Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria.* Questi «Rendiconti», Ser. 6, t. 1, 1° sem., 1925.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(3) *Sulla contrazione delle vene liquide*, «Atti del R. Istituto Veneto», t. LXIV (1906), pp. 1465-1472.

La citata formola del Levi-Civita - insieme all'analoga per i momenti⁽¹⁾ - è suscettibile di un'espressione d'immediata applicabilità ad ogni campo vettoriale \mathbf{v} che:

1° sia uniforme all'infinito, cioè soddisfi alla condizione asintotica

$$(1) \quad \mathbf{v} - \mathbf{V} \cdot \rho^2 < K,$$

ove \mathbf{V} e K sono costanti, mentre $\rho = |\mathbf{OP}|$;

2° derivi da un potenziale φ monodromo, armonico e regolare entro S e sulla pagina esterna di σ .

Precisamente, riferendoci al generico punto Q (ed alla pagina esterna) di σ , rappresentiamo con \mathbf{n} il versore della normale, con v_n e \mathbf{v}_t la componente normale ed il componente tangenziale di \mathbf{v} : ed insieme poniamo

$$(2) \quad c = \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma, \quad \mathbf{m}_t = \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma, \quad \mathbf{m}_r = \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{OQ} d\sigma, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_r - \mathbf{m}_t.$$

Dimostreremo nella presente Nota che

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\sigma} (v_n^2 - v_t^2) \mathbf{n} d\sigma + \int_{\sigma} v_n \mathbf{v}_t d\sigma = c \mathbf{V} \\ \frac{1}{2} \int_{\sigma} \mathbf{OQ} \wedge (v_n^2 - v_t^2) \mathbf{n} d\sigma + \int_{\sigma} \mathbf{OQ} \wedge v_n \mathbf{v}_t d\sigma = \mathbf{m} \wedge \mathbf{V}. \end{cases}$$

Pur rinviando ad una prossima Nota ogni applicazione fisica delle (I), crediamo opportuno rilevare fin d'ora la semplice forma ch'esse assumono quando σ sia una superficie equipotenziale ($v_t \equiv 0$, $\mathbf{m}_t = 0$) ovvero una superficie di flusso ($v_n \equiv 0$, $c = 0 = \mathbf{m}_r$).

2. Detta Σ_R la sfera di centro O e raggio R , intendiamo R così grande che σ risulti completamente interna a Σ_R .

La formola del Levi-Civita e l'analoga per i momenti, direttamente forniscono

$$(I^*) \quad \begin{cases} \int_{\sigma + \Sigma_R} v_n \mathbf{v} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\sigma + \Sigma_R} v^2 \mathbf{n} d\sigma \\ \int_{\sigma + \Sigma_R} \mathbf{OP} \wedge v_n \mathbf{v} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\sigma + \Sigma_R} \mathbf{OP} \wedge v^2 \mathbf{n} d\sigma. \end{cases}$$

(1) BOGGIO, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*, « Atti del R. Istituto Veneto », t. LXIX (1909) p. 885. CISOTTI, *Sulla maggior portata di varie formole idrodinamiche ritenute valide per moti irrotazionali*, « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », vol. LVII (1924), p. 728.

Distinguendo con \mathbf{N} il versore della normale interna a Σ_R , su Σ_R è $OP = -R\mathbf{N}$; mentre su σ (come del resto su ogni altra superficie)

$$v^2 = v_n^2 + v_t^2, \quad v_n \mathbf{v} = v_n (v_n \mathbf{n} + \mathbf{v}_t).$$

Alle (I*) si può dunque dare la forma *perfettamente* equivalente

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\sigma} (v_n^2 - v_t^2) \mathbf{n} d\sigma + \int_{\sigma} v_n \mathbf{v}_t d\sigma &= \lim_{R=\infty} R^2 \int_{\Sigma_R} \left(\frac{1}{2} v^2 \mathbf{N} - v_N \mathbf{v} \right) d\Sigma_i \\ \frac{1}{2} \int_{\sigma} OQ \wedge (v_n^2 - v_t^2) \mathbf{n} d\sigma + \int_{\sigma} OQ \wedge v_n \mathbf{v}_t d\sigma &= \lim_{R=\infty} R^3 \int_{\Sigma_R} \mathbf{N} \wedge v_N \mathbf{v} d\Sigma_i. \end{aligned} \right.$$

Con questo la dimostrazione delle (I) resta ricondotta alla dimostrazione delle due eguaglianze

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{R=\infty} R^2 \int_{\Sigma_R} \left(\frac{1}{2} v^2 \mathbf{N} - v_N \mathbf{v} \right) d\Sigma_i &= c \mathbf{V} \\ \lim_{R=\infty} R^3 \int_{\Sigma_R} \mathbf{N} \wedge v_N \mathbf{v} d\Sigma_i &= m \wedge \mathbf{V}. \end{aligned} \right.$$

3. Sia (x_1, x_2, x_3) una terna cartesiana ortogonale di origine O, per la quale l'asse x_1 abbia l'orientamento di \mathbf{V} . Dalla (1), che può anche scriversi

$$(5) \quad |\text{grad}(\varphi - Vx_1)| \cdot \rho^2 < K$$

segue (1) l'esistenza di una cost. Φ tale che

$$(6) \quad |\varphi - Vx_1 - \Phi| \cdot \rho < K.$$

Le (5) e (6) garantiscono che in P alla funzione armonica $\varphi - Vx_1 - \Phi$ si può applicare la formola di Green senza alcun contributo della sfera all'infinito. D'altra parte, posto $r = |PQ|$, evidentemente in P è

$$\int_{\sigma} \left\{ x_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial x_1}{\partial n} \right\} d\sigma = 0.$$

Onde si può asserire che in ogni punto interno ad S

$$(7) \quad \varphi - \Phi = Vx_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} d\sigma.$$

(1) MAGGI, *Su alcune circostanze attinenti alla presenza di superficie di discontinuità e al passaggio all'infinito nella teoria del campo vettoriale*, questi « Rend. », vol. XXII, serie 5ª, 2º sem. (1912) n. 6.

Ponendo

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\varphi}{r} \cos \widehat{nx}_r d\sigma \quad (r = 1, 2, 3) \\ U_e &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma, \end{aligned} \right.$$

insieme a (7) si avrà

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} - \text{grad} \left\{ \frac{1}{4\pi} \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \int_{\sigma} \frac{\varphi}{r} \cos \widehat{nx}_r d\sigma \right\} + \text{grad } U_e,$$

cioè

$$(9) \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} + \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \text{grad } u_r + \text{grad } U_e.$$

4. Secondo le (8) tanto la U_e quanto ciascuna delle u_r si presenta come un potenziale di semplice strato.

Ora è ben noto⁽¹⁾ che, identificando un tale potenziale colla somma dei primi m termini del classico sviluppo secondo le potenze negative di ρ , il corrispondente errore per una qualunque delle derivate parziali d'ordine m' risulta infinitesimo come $\frac{1}{\rho^{m+m'+1}}$.

Nella dimostrazione di ambedue le (4) potremo dunque identificare U_e colla somma dei primi due termini e ciascuno degli u_r col solo primo termine del rispettivo sviluppo in serie di funzioni sferiche: cioè assumere [Cfr. (2)]

$$\left\{ \begin{aligned} U_e &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{c}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\text{OP} \times \mathbf{m}_e}{\rho} \right\} \\ u_r &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\rho} \int_{\sigma} \varphi \cos \widehat{nx}_r d\sigma \end{aligned} \right.$$

e corrispondentemente

$$\left\{ \begin{aligned} \text{grad } U_e &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{c}{\rho^2} \cdot \frac{\text{OP}}{\rho} + \frac{3}{\rho^3} \frac{\text{OP} \times \mathbf{m}_e}{\rho} \cdot \frac{\text{OP}}{\rho} - \frac{1}{\rho^3} \cdot \mathbf{m}_e \right\} \\ \text{grad } u_r &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\rho^2} \int_{\sigma} \varphi \cos \widehat{nx}_r d\sigma \cdot \frac{\text{OP}}{\rho} \\ \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \text{grad } u_r &= \frac{1}{4\pi \rho^3} \left\{ \mathbf{m}_f - 3 \frac{\mathbf{m}_f \times \text{OP}}{\rho} \cdot \frac{\text{OP}}{\rho} \right\} \end{aligned} \right.$$

(1) Cfr. ad es., LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1923), p. 501.

ossia

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{V} - \frac{c}{4\pi R^2} \mathbf{N} - \frac{1}{4\pi R^3} \{ \mathbf{m} - 3 \mathbf{N} \times \mathbf{m} \cdot \mathbf{N} \} \\ v_N = \mathbf{V} \times \mathbf{N} - \frac{c}{4\pi R^2} + \frac{\mathbf{m}}{2\pi R^3} \times \mathbf{N}. \end{cases}$$

Da queste espressioni di \mathbf{v} e v_N risulta subito, conformemente alla (4)₁,

$$\begin{aligned} \lim_{R=\infty} R^2 \int_{\Sigma_R} \left(\frac{1}{2} v^2 \mathbf{N} - v_N \mathbf{v} \right) d\Sigma_i &= \lim_{R=\infty} \frac{1}{2} R^2 V^2 \int_{\Sigma_i} \mathbf{N} d\Sigma_i - \lim_{R=\infty} R^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \times \\ &\times \int_{\Sigma_i} \mathbf{N} d\Sigma_i + \frac{c\mathbf{V}}{4\pi} \int_{\Sigma_i} d\Sigma_i = c\mathbf{V}. \end{aligned}$$

In base alle stesse espressioni di \mathbf{v} e v_N si ha pure

$$\begin{aligned} \lim_{R=\infty} R^3 \int_{\Sigma_R} \mathbf{N} \wedge v_N \mathbf{v} d\Sigma_i &= \lim_{R=\infty} R^3 \int_{\Sigma_R} \mathbf{N} \wedge \left\{ \mathbf{V} - \frac{\mathbf{m}}{4\pi R^3} \right\} \cdot \left\{ \mathbf{V} \times \mathbf{N} - \frac{c}{4\pi R^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\mathbf{m}}{2\pi R^3} \times \mathbf{N} \right\} d\Sigma_i = - \lim_{R=\infty} R^3 \mathbf{V} \wedge \int_{\Sigma_i} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{V} d\Sigma_i + \lim_{R=\infty} \frac{cR}{4\pi} \mathbf{V} \wedge \int_{\Sigma_i} \mathbf{N} d\Sigma_i - \\ &- \frac{1}{2\pi} \mathbf{V} \wedge \int_{\Sigma_i} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{m} d\Sigma_i + \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \wedge \int_{\Sigma_i} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{V} d\Sigma_i. \end{aligned}$$

Per un qualunque vettore cost. \mathbf{a} è

$$\int_{\Sigma_i} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{a} d\Sigma_i = -a \int_{\Sigma_i} \text{OP} \cdot \cos \hat{\mathbf{N}} \mathbf{a} d\Sigma_i = \frac{4}{3} \pi \mathbf{a}.$$

Onde la precedente eguaglianza equivale a

$$\lim_{R=\infty} R^3 \int_{\Sigma_R} \mathbf{N} \wedge v_N \mathbf{v} d\Sigma_i = -\frac{1}{2\pi} \mathbf{V} \wedge \frac{4}{3} \pi \mathbf{m} + \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \wedge \frac{4}{3} \pi \mathbf{V} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{V}$$

e resta esaurita la dimostrazione delle (I).

Meccanica. — *Ancora sul teorema di Kutta-Joukowski nel caso della lastra piana.* Nota ⁽¹⁾ di E. PISTOLESI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La copiosa fioritura di Note sul teorema di Kutta-Joukowski, che hanno trovato ospitalità nelle pagine di questi « Atti », dimostra tutto l'interesse che i cultori dell'aerodinamica portano al problema sollevato dal Cisotti e dal Finzi.

Il prof. Straneo considera la spinta sulla lastra come limite di quella che si ha su di un'ellisse quando l'asse minore di questa tende a zero; naturalmente si ha il teorema di Kutta-Joukowski.

Una prima Nota di Ferrari ed una di M. Pascal mostrano che la spinta sulla lastra, considerata come limite del risultante delle pressioni su di un contorno circondante la lastra quando il contorno si accosta indefinitivamente alla lastra, soddisfa al teorema di Kutta-Joukowski; una importante Nota di Signorini riprende la trattazione di Pascal, integrandola con la dimostrazione dell'indipendenza del limite dalla forma del contorno scelto attorno alla lamina e dal suo modo di tendere alla lamina stessa (ossia al segmento contato due volte) purchè siano verificate certe condizioni.

Una seconda Nota di Ferrari determina la spinta sulla lastra applicando il teorema della quantità di moto al fluido contenuto entro lo spazio compreso fra la lastra ed un circuito che la circonda e facendo tendere il circuito (scelto dal Ferrari in modo particolare) alla lamina. Peraltro questo procedimento non sfugge ad una obiezione, ed è che per applicare il teorema della quantità di moto occorre escludere dal campo considerato i punti singolari, ad esempio, con i circoletti usati dal Finzi. Questo è ciò che già aveva fatto, in sostanza, il Rosenblatt nell'applicare la formula di Blasius, la quale altro non è che un modo di esprimere il teorema dell'impulso. Con tale esclusione il risultato che si ottiene è quello di Cisotti, anzichè quello di Kutta-Joukowski.

Oltre questi studi, aventi lo scopo di convalidare il teorema di Kutta-Joukowski, per la lamina, occorre ricordare una Nota collettiva di Cisotti e di Finzi, che ribadisce le conclusioni precedenti dei due Autori, mostrando i lati deboli delle dimostrazioni contrarie.

Essi riconoscono che le « aspirazioni agli spigoli », comunemente ammesse dagli aerodinamici pratici, aggiusterebbero tutto, ma asseriscono l'arbitrarietà della loro introduzione.

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1928.

Finalmente una Nota di A. Rosenblatt risponde ad una mia osservazione critica, difendendo la legittimità del suo procedimento dimostrativo, al quale si è già accennato.

Sembrerà, a dir vero, che una nuova Nota sullo stesso argomento sia di discutibile opportunità; tuttavia un ulteriore esame del problema è giustificato dall'essere la questione ancora indecisa e dal bisogno, ch'io credo sentito, di vederci una buona volta un po' più chiaro.

Incomincio con un'osservazione importante riguardante le considerazioni energetiche di Finzi.

Egli trova che la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica della corrente circondante la lastra piana è diversa da zero ed è quale è reclamata dal risultato di Cisotti. Il procedimento del Finzi è il seguente. Dopo avere isolato gli spigoli della lastra con cerchietti ω , dimostra che, per lo spazio esterno a tali cerchietti:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\omega} \int p d\psi.$$

Facendo tendere a zero il raggio dei cerchietti, trova il limite di $\frac{dT}{dt}$, che assume come derivata dell'energia cinetica totale della corrente. A tale procedimento opposi già una obiezione che, per essere di carattere sintetico, e dirò così, fisico, non fu giudicata ortodossa dal punto di vista analitico.

Osservo ora che se lo spigolo si esclude, anzichè con un cerchietto, con un circuito formato da una linea di corrente vicinissima alla lastra, circondante lo spigolo (il che è sempre possibile nelle condizioni del problema) e da due tratti di linee equipotenziali (normali alla lastra) partenti da punti corrispondenti sulle due faccie, il $\frac{dT}{dt}$ può ridursi piccolo a piacere facendo tendere a zero opportunamente l'area esclusa, il che significa che il suo limite è zero, in accordo con l'enunciato classico di Kutta-Joukowski.

Ed invero, lungo la linea di corrente il $d\psi$ è zero, sicchè l'integrale conterrà solo il contributo dei due archetti di linee equipotenziali. Questo, a meno di infinitesimi di ordine superiore, si riduce al prodotto della differenza di pressione $p_1 - p_2$ fra l'intradosso e l'estradosso della lamina nel punto considerato per la variazione $\Delta\psi$ che la funzione di corrente subisce nel passare dal contorno della lamina alla linea di corrente vicinissima. Ora è chiaro che comunque grande sia $p_1 - p_2$, può scegliersi $\Delta\psi$ abbastanza piccolo perchè il prodotto $(p_1 - p_2)\Delta\psi$ risulti piccolo a piacere.

Nel problema energetico sollevato dal Finzi anche i metodi ortodossi conducono adunque a risultati i quali sono diversi secondo il tipo di circuito adottato per escludere il punto singolare e il modo di tendere a zero della porzione di piano da tale circuito racchiusa.

Siamo dunque in presenza di singolarità essenziali e questa constatazione racchiude probabilmente la ragione profonda della divergenza di opinioni in un argomento che sembrerebbe non potesse dar luogo a discussioni.

Ma vi sono ancora altre osservazioni da fare.

Notiamo in primo luogo che l'indeterminazione riscontrata nel problema energetico non esiste per quanto riguarda l'applicazione del teorema della quantità di moto. Qualunque sia il contorno usato per escludere le singolarità, il risultato che si ottiene è sempre quello di Cisotti, come risulta dall'applicazione della formula di Blasius, secondo il citato procedimento di Rosenblatt.

Prendiamo finalmente in considerazione il risultante delle pressioni sul contorno costituito dalle due facce della lamina fin presso i bordi e da due circuiti ω circondanti i bordi medesimi e distinguiamo i due casi:

1° ω è costituito da una porzione di linea di corrente e da due porzioni di linee equipotenziali affacciate, come si è fatto sopra per il problema energetico. Tendendo la linea di corrente alla lamina, il risultato non può differire da quello del caso Ferrari, nel quale il circuito era costituito dalle porzioni di linea di corrente attorno agli spigoli e da due rette parallele alla lamina. Troviamo cioè come risultato il teorema di Kutta-Joukowski e come limite del risultante delle pressioni sopra il contorno ω al suo indefinito impiccolire l'aspirazione allo spigolo;

2° ω è un circoletto di raggio ϵ^2 col centro nello spigolo. Per calcolare il risultante delle pressioni su ω , basterà osservare che il vettore coniugato P' di tale risultante è dato da:

$$P' = \int_{\omega} p (dy + i dx).$$

Ma

$$p = -\frac{1}{2} \rho (v_x + i v_y)(v_x - i v_y) + \text{cost}$$

perciò

$$P' = -\frac{1}{2} \rho \int_{\omega} w w' d\bar{z},$$

dove con l'apice si indicano i valori coniugati e

$$w = v_x - i v_y.$$

Ora è noto che w in vicinanza del punto singolare z_0 può svilupparsi in serie di potenze di $\sqrt{z - z_0}$; posto $\lambda = \sqrt{z - z_0}$, si ha precisamente:

$$w = \frac{c}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n.$$

Su ω si ha:

$$\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_0 = \epsilon^2 e^{i\theta}$$

ossia:

$$\lambda = \epsilon e^{i\frac{\theta}{2}}$$

e quindi:

$$ww' = \frac{c^2}{\epsilon^2} (1 + A)$$

dove A indica una serie di termini contenenti ϵ almeno alla prima potenza.

Inoltre

$$d\chi' = d(\chi - \chi_0)' = -i\epsilon^2 e^{-i\theta} d\theta.$$

Sostituendo nell'integrale che fornisce P' si trova:

$$P' = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} (\epsilon^2 e^{-i\theta} + c^2 A e^{-i\theta}) d\theta.$$

Delle due parti in cui l'integrale si può scindere, la seconda tende a zero quando ϵ tende a zero; si ha dunque:

$$\lim P' = \frac{1}{2} \rho c^2 [e^{-i\theta}]_0^{2\pi} = 0.$$

Il risultante delle pressioni su ω tende a zero, anzichè al valore corrispondente alla « aspirazione allo spigolo », quando il raggio del cerchietto tende a zero.

Per quanto riguarda il risultante delle pressioni, si ha dunque indeterminazione, come si aveva nel problema energetico.

Notiamo di passaggio che sarebbe interessante vedere come questo risultato si accordi col teorema di Signorini.

Sembra accertato, in base alle precedenti osservazioni, che il valore della spinta sulla lastra piana non può essere stabilito che in base ad una convenzione. E allora la convenienza di adottare quella che conduce alla validità generale del teorema di Kutta-Joukowski risulta senz'altro manifesta.

Ma oltre a ciò, io osservo che il problema della lastra piana non può essere concepito che come un problema di limite. Il divenire infinita la velocità agli spigoli lo mostra chiaramente. E allora è logico che si assuma come spinta sulla lastra il limite della spinta sopra un contorno privo di punti singolari (ad es. l'ellisse di Straneo) che si faccia tendere al segmento contato due volte con legge opportuna.

Il Cisotti nega la legittimità del procedimento, trattandosi qui di funzioni di linea secondo Volterra; ma il fatto che la formula di Joukowski vale per *qualsiasi* contorno (con l'unica condizione di non aver punti sin-

golari) e la spinta rimane costante qualunque sia questo contorno e comunque tenda al segmento, giustifica ampiamente l'ammissione della validità del teorema anche nel caso del segmento.

Accettando questo punto di vista, occorre introdurre le famose aspirazioni allo spigolo, le quali però non sono, come sembra credere il Cisotti, un puro e semplice artificio per ristabilire la validità del teorema di Kutta-Joukowski; ma si ottengono naturalmente se consideriamo il doppio segmento come limite di un contorno senza singolarità. Se, ad es., consideriamo ancora il segmento come limite di un contorno ellittico con i fuochi negli estremi del segmento quando l'asse minore tende a zero, vediamo la pressione distribuita sul contorno addensarsi verso i vertici dell'asse maggiore e se calcoliamo il risultante delle pressioni agenti sopra un arco compreso in un certo angolo finito col vertice nel fuoco corrispondente e ne cerchiamo il limite, troviamo precisamente l'aspirazione allo spigolo. Allo stesso risultato si giunge se consideriamo lo spigolo del segmento come limite di un angolo tendente a zero e calcoliamo il risultante delle pressioni agenti sopra porzioni infinitesime dei due lati dell'angolo adiacenti al vertice. Tale risultante si trova essere diretto secondo la bisettrice e il suo limite, quando l'angolo tende a zero, è ancora aspirazione allo spigolo.

Allo stesso risultato si giunge pure in altri modi.

La conclusione sembra a me essere la seguente: che il problema, a causa delle singolarità essenziali che la corrente presenta agli spigoli della lastra, non può essere risolto con i metodi « ortodossi » dell'analisi, ma richiede di essere trattato come caso limite di un contorno privo di singolarità che, deformandosi, tenda a confondersi col segmento contato due volte; che nel problema così considerato trovano posto naturalmente le aspirazioni agli spigoli, quali sono necessarie per la validità del teorema di Kutta-Joukowski; che tale validità, in base a quanto sopra, e nel senso sopra indicato, può ammettersi anche per la lastra di Cisotti e in tutti i casi analoghi.

Mi sia infine concesso di osservare che il distacco dei vortici dalla lamina secondo Prandtl è un fenomeno relativo allo stadio iniziale di avviamento e non alla condizione di moto permanente e che perciò mi pare non abbia niente a che vedere con l'accumulazione di energia che risulterebbe dalla trattazione energetica di Finzi.

Fisica. — *La risonanza ottica secondo la meccanica ondulatoria.* Nota I di E. PERSICO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GAR-
BASSO.

In una delle Memorie fondamentali sulla meccanica ondulatoria ⁽²⁾ Schrödinger ha mostrato come il suo modello si presti a prevedere qualitativamente il fenomeno della risonanza ottica, osservato dal Wood e da altri. Egli rinunzia però ad un calcolo quantitativo del fenomeno, notando che questo deve essere influenzato in modo essenziale da ciò che nella teoria classica si chiama *reazione della radiazione*, di cui la meccanica ondulatoria non era allora in grado di tener conto. Ma in seguito il Fermi ⁽³⁾, nell'intento di indagare il meccanismo di emissione delle righe spettrali, ha proposto un metodo approssimativo per tener conto di questa forza nella meccanica ondulatoria, ed è quindi ora possibile svolgere completamente la teoria della risonanza ottica dal punto di vista della meccanica di Schrödinger. È questo l'oggetto del presente lavoro.

Supponiamo che la riga di risonanza che si considera risulti dalla combinazione di due stati quantici di energia $h\nu'$ (stato normale) e $h\nu''$ (stato eccitato) cosicchè la sua frequenza sia $\nu_0 = \nu'' - \nu'$. In generale uno almeno di questi stati sarà degenerare (cioè al medesimo livello energetico corrisponderanno diverse *auto-funzioni*); per es., nel caso di righe della serie principale come sono tutte le righe di risonanza studiate sperimentalmente, lo stato inferiore (S) è semplice, e quello superiore (P) triplo. Noi considereremo appunto questo caso.

2. Sia dunque u' l'autofunzione di Schrödinger relativa allo stato normale, e u''_1, u''_2, u''_3 le tre autofunzioni relative allo stato eccitato: le quattro u soddisfano l'equazione

$$(1) \quad \Delta u_k + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (h\nu - V_0) u_k = 0$$

dove ν sta per ν' o ν'' e V_0 è il potenziale, non tenendo conto della reazione di radiazione e della luce incidente. Le autofunzioni u', u''_k si suppongono normalizzate. Detto poi V' il potenziale perturbatore proveniente dalla

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) « Ann. de Ph. », 81 (1926), p. 127.

(3) Questi « Rendiconti », vol. V (1927), p. 795.

reazione di radiazione, e V'' quello della radiazione incidente, l'equazione di Schrödinger è

$$(2) \quad \Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} (V_0 + V' + V'')\psi - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0.$$

Cercheremo di soddisfarla con una soluzione del tipo

$$(3) \quad \psi = \lambda' u' e^{i\omega' t} + \sum_k \lambda_k'' u_k'' e^{i\omega_k'' t}$$

dove si è posto per brevità $\omega' = 2\pi\nu'$, $\omega'' = 2\pi\nu''$, e dove le λ sono quattro coefficienti (in generale complessi) che sarebbero costanti se fosse $V' = V'' = 0$, ma invece variano lentamente col tempo per effetto della perturbazione. Scriveremo talvolta sotto la forma complessa

$$(4) \quad \lambda' = \rho' e^{i\theta'} \quad \lambda_k'' = \rho_k'' e^{i\theta_k''} \quad (k = 1, 2, 3)$$

per mettere in evidenza i moduli ρ , che rappresentano le ampiezze di vibrazione dei rispettivi stati quantici, ossia (statisticamente) coi loro quadrati misurano la frazione di atomi che si trova nel rispettivo stato quantico.

Essi sono quindi legati dalla relazione

$$(5) \quad \rho'^2 + \sum_k \rho_k''^2 = 1.$$

Procuriamoci ora l'equazione differenziale che determina il modo di variare delle λ col tempo, la quale si otterrà sostituendo la (3) nella (2). Si osservi a tal uopo che nel calcolare i primi due termini (cioè quello in $\Delta\psi$ e quello in ψ) non interviene la variabilità delle λ , le quali si possono quindi considerare costanti; invece nell'ultimo termine la $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ si comporrà di due parti: una, che indicheremo con $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_0$, calcolata come se le λ fossero costanti, e l'altra, che indicheremo con $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)'$, e che è

$$(6) \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)' = \dot{\lambda}_k'' u_k'' e^{i\omega_k'' t} + \sum_k \dot{\lambda}_k' u_k' e^{i\omega_k' t}.$$

Adunque la (2) diverrà

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} (V_0 + V' + V'')\psi - \frac{4\pi i m}{h} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)' \right] = 0.$$

Se mancasse la perturbazione (cioè se $V' = V'' = 0$) l'equazione dovrebbe essere soddisfatta con le λ costanti; sarà quindi

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_0 \psi - \frac{4\pi i m}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_0 = 0.$$

Sottraendo queste due ultime equazioni e semplificando, resta

$$(2') \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)' = \frac{2\pi i}{h} (V' + V'') \psi$$

la quale determina la perturbazione.

Per calcolare V' , occorre conoscere il momento elettrico dell'atomo, il quale si calcola, secondo Schrödinger, considerando $e\psi\psi$ come la densità elettrica: le sue componenti p_1, p_2, p_3 secondo le tre coordinate x_1, x_2, x_3 sono quindi date da

$$p_1 = e \int \psi \bar{\psi} x_1 d\tau$$

dove $d\tau$ è l'elemento di volume, e l'integrale è esteso a tutto lo spazio. Sostituendovi l'espressione (3) di ψ si trova (trascurando una costante additiva che non ci interessa, e indicando con una sopralineatura le quantità coniugate),

$$p_1 = e \bar{\lambda}' \sum_k (\lambda_k'' e^{i\omega_0 t} + \bar{\lambda}_k'' e^{-i\omega_0 t}) \int u' u_k'' x_1 d\tau.$$

Ovvero per le (4), ponendo $\theta_k'' - \theta' = \theta_k$ ($k = 1, 2, 3$),

$$p_1 = 2e\rho' \sum_k \rho_k'' \cos(\omega_0 t + \theta_k) \int u' u_k'' x_1 d\tau.$$

Si osservi ora che le u_k'' non sono ancora completamente determinate, perchè una qualsiasi sostituzione ortogonale eseguita su di esse dà luogo a tre nuove funzioni, che pure soddisfano la (1) per $v = v''$, e che sono del pari normalizzate⁽¹⁾. Si intuisce che di questa arbitrarietà si potrà trarre partito, per fare sì, che nell'ultima formula scritta l'integrale si annulli ogni volta che non è $k = l$. Che ciò sia effettivamente possibile, si può verificare ponendo per u' e u_k'' le loro espressioni effettive mediante le funzioni sferiche: si trova allora inoltre che i tre integrali per cui $k = l$, che non sono zero, hanno un valore comune che indicheremo con P (il che del resto è prevedibile per ragione di simmetria), cosicchè si può scrivere:

$$(7) \quad \int u' u_k'' x_1 d\tau = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq l \\ P & \text{» } k = l \end{cases}$$

(1) Cfr. SCHRÖDINGER, loc. cit.

e quindi

$$(8) \quad p_l = e(\bar{\lambda}_l'' e^{i\omega_0 t} + \lambda_l' \bar{\lambda}_l'' e^{-i\omega_0 t}) P$$

$$(8') \quad = 2 \rho_l' \rho_l'' e P \cos(\omega_0 t + \theta_l).$$

Come si vede, P è proporzionale all'ampiezza della radiazione emessa spontaneamente dall'atomo, e le ρ_l'' sono proporzionali alle componenti di questa ampiezza secondo i tre assi.

Serviamoci ora della (8) (considerando in prima approssimazione le λ costanti) per calcolare il potenziale V' della reazione di radiazione, il quale è dato⁽¹⁾ da

$$V' = -\frac{2}{3} \frac{e}{c^3} \sum_l \ddot{P}_l x_l$$

e quindi sarà (derivando tre volte la (8)),

$$(9) \quad V' = \frac{2ie^2\omega_0^3 P}{3c^3} [\bar{\lambda}' e^{i\omega_0 t} \sum_l \lambda_l'' x_l - \lambda' e^{-i\omega_0 t} \sum_l \bar{\lambda}_l'' x_l].$$

D'altra parte il potenziale della radiazione incidente, se le componenti dell'ampiezza di questa sono A_1, A_2, A_3 , e la sua frequenza è $\frac{\omega}{2\pi}$, è dato da

$$(10) \quad V'' = \frac{1}{2} \sum_l A_l x_l (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$$

Riprendiamo ora l'equazione (2') e poniamovi per V' e V'' le espressioni trovate. Tenendo conto della (6) e della (3) e chiamando A la costante $\frac{4\pi e^2 \omega_0^3}{3\hbar c^3} P^2$, (che rappresenta nella teoria di Fermi, a meno del fattore numerico 0,18, la larghezza della riga spontaneamente emessa) si trova

$$(11) \quad \dot{\lambda}' u' e^{i\omega' t} + \sum_k \dot{\lambda}_k'' u_k'' e^{i\omega_k'' t} = \left\{ -\frac{A}{P} [\lambda' e^{i\omega_0 t} \sum_l \lambda_l'' x_l - \lambda' e^{-i\omega_0 t} \sum_l \bar{\lambda}_l'' x_l] + \right. \\ \left. + \frac{\pi i}{\hbar} \sum_l A_l x_l (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right\} \cdot \left\{ \lambda' u' e^{i\omega' t} + \sum_k \lambda_k'' u_k'' e^{i\omega_k'' t} \right\}.$$

Per ricavare $\dot{\lambda}'$, si moltiplichino questa equazione per $u' e^{-i\omega' t} d\tau$ e si integrino a tutto lo spazio: a causa dell'ortogonalità di u' con tutte le u_k'' , e della normalizzazione di u' , al primo membro si ottiene semplicemente $\dot{\lambda}'$. Al secondo membro, svolgendo in prodotti, si otterrà un termine in $e^{i\omega_0 t}$, uno in $e^{-i\omega_0 t}$, uno in $e^{i\omega t}$, uno in $e^{-i\omega t}$, uno in $e^{2i\omega_0 t}$, uno costante, uno in $e^{i(\omega + \omega_0)t}$ e uno in $e^{-i(\omega - \omega_0)t}$. Ora a noi interessano soltanto i termini variabili lentamente col tempo, poichè quelli a frequenza elevata non pos-

(1) Cfr. FERMI, loc. cit.

sono produrre una perturbazione secolare di λ' : perciò scriveremo solo il termine costante e quello in $e^{-i(\omega - \omega_0)t}$. Calcolandoli effettivamente, troviamo che gli integrali da eseguire sono quelli dati dalle (7), e così abbiamo:

$$(12) \quad \dot{\lambda}' = A \lambda' \sum_k \lambda_k'' \bar{\lambda}_k'' + \frac{\pi i}{h} P \sum_k A_k \lambda_k'' e^{-i(\omega - \omega_0)t}.$$

Con procedimento analogo, dalla (11), moltiplicandola per $u_i'' e^{-i\omega_i''t} d\tau$ e integrando, si ricava

$$(12') \quad \dot{\lambda}_j'' = -A \lambda_j'' \lambda' \lambda' + \frac{\pi i}{h} P A_j \lambda' e^{i(\omega - \omega_0)t} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Si verifica immediatamente che queste equazioni ammettono l'integrale primo $\lambda' \lambda' + \sum_j \lambda_j'' \bar{\lambda}_j'' = \text{cost}$ come era da prevedersi in base alla (5), la quale ci dice anzi che la cost. è 1.

Ponendo $A_j = 0$, cioè sopprimendo la seconda parte dei secondi membri, si ottengono le formule relative all'emissione spontanea; esse sono una generalizzazione di quelle del Fermi (le quali suppongono che non vi sia degenerazione). La teoria che se ne potrebbe trarre non presenta nulla di nuovo, eccetto questo, che non si possono determinare separatamente i moduli di $\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3''$, ma soltanto la somma dei loro quadrati. Ciò porta per conseguenza una indeterminazione nello stato di polarizzazione della luce emessa, la quale del resto era da attendersi, mancando nei dati del problema qualunque direzione privilegiata nello spazio. Ciò non ha luogo invece nel problema della risonanza, nel quale il campo elettrico della radiazione incidente stabilisce una direzione privilegiata.

In una Nota successiva mostreremo appunto come le (12) e (12') rendano conto dei fenomeni di risonanza.

Fisica. — *Effetto Volta nell'aria e pellicole superficiali umide*⁽¹⁾.
Nota di R. DEAGLIO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

Le esperienze di Millikan⁽³⁾, Hennings⁽⁴⁾, Dowling⁽⁵⁾, e più particolarmente quelle di Perucca⁽⁶⁾, stanno a provare l'esistenza dell'effetto Volta nel vuoto in assenza di pellicole superficiali gassose. Rimane tuttavia poco chiaro il comportamento di queste pellicole superficiali e quale possa essere il loro contributo all'effetto Volta.

È noto che si ritenne da molti che l'effetto Volta, nel caso di due conduttori metallici si deve addirittura attribuire all'azione di tali pellicole superficiali gassose umide (teoria chimica dell'effetto Volta, De La Rive).

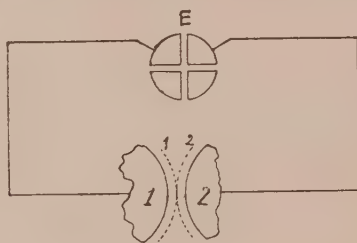


Fig. 1.

Dietro suggerimento del prof. Perucca mi sono proposto di sottoporre ad esame sperimentale l'azione voltaica delle pellicole superficiali gassose, nel senso di accertarne la loro influenza in base alle seguenti considerazioni: Secondo Rohmann⁽⁷⁾ si può costituire una pila per mezzo di due sferette di metalli diversi avvicinate sino alla distanza di pochi *mp.* Si ritiene appunto che gli strati superficiali gassosi abbiano uno spessore di tale ordine di grandezza, e d'accordo con la teoria chimica dell'effetto Volta, si comportino come conduttori di seconda classe.

La forza elettromotrice di una tale pila, da misurarsi mediante un elettrometro di capacità minima, dipende dalla distanza delle due sferette e deve

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica Sperimentale della R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1918.

(3) «Phys. Rew.», 7, p. 355, 1916.

(4) «Phys. Rew.», 4, p. 128, 1914.

(5) «Phys. Rew.», 25, p. 812, 1925.

(6) «N. Cim.», 23, p. 105, 1922.

(7) «Phys. ZS.», 21, p. 417 e p. 699, 1920; «ZS. für Phys.», 31, p. 311, 1925.

presentare un massimo corrispondente ad una certa distanza delle sferette. Tale massimo si può assumere come valore della f. e. m. della pila (fig. 1): rame/metallo 1/pellicola superficiale 1/pellicola superficiale 2/metallo 2/rame.

Dirò brevemente che questa forza elettromotrice misura l'effetto pila dei due metalli in istudio.

Contemporaneamente a questa esperienza si misuri nello stesso ambiente l'effetto Volta, col metodo del condensatore variabile, tra due dischi dei medesimi metalli delle due sferette, lavorati e portati a pulimento come queste.

L'esperienza deve essere in grado di rispondere alla seguente questione: essicando l'ambiente in cui si trovano pila e condensatore variabile, oppure producendo il vuoto:

1° come varia l'effetto pila dovuto evidentemente alle pellicole superficiali funzionanti da conduttori di seconda classe?

2° in corrispondenza come varia l'effetto Volta misurato tra i due metalli?

Se effetto pila ed effetto Volta variassero in modo concorde, si dovrebbe concludere per l'importanza fondamentale delle pellicole superficiali umide sul fenomeno detto effetto Volta tra conduttori di prima classe nell'aria.

Se effetto pila ed effetto Volta variassero in modo discorde, si avrebbe un nuovo argomento, oltre quelli dedotti dalle esperienze di Millikan e di Perucca, contro la teoria chimica dell'effetto Volta.

Rinviando ad altro luogo la descrizione del dispositivo sperimentale realizzato, riporto le conclusioni dedotte dalle misure effettuate. I valori riportati qui corrispondono ad una sola delle serie di misure fatte. Sebbene nelle varie serie di misure i valori relativi all'effetto Volta ed all'effetto pila non sempre corrispondono esattamente a quelli riportati, tuttavia l'andamento di ciascuna serie di misure è sempre stato tale da confermare le conclusioni che sto per esporre.

1. Ambiente a pressione normale.

Effetto Volta, misurato al condensatore variabile.

0,380 Volt.

Effetto Pila: avvicinate le sferette fino a pochi $m\mu$, si ottiene una deviazione massima dell'elettrometro corrispondente a una forza elettromotrice di 0.20 Volt.

L'andamento di questa seconda parte dell'esperienza è molto regolare; col graduale avvicinamento delle due sferette l'elettrometro segna dapprima una f. e. m. crescente lentamente fino a 0.05 Volt, poi bruscamente l'elettrometro indica la deviazione massima corrispondente a 0.20 Volt, poi questa deviazione diminuisce lentamente riducendosi a circa 0.01 Volt. Infine l'ago dell'elettrometro⁽¹⁾ ritorna bruscamente a zero indicando l'effettivo contatto metallico tra le due sferette.

(1) Elettrometro a filo di Perucca, «ZS. für Phys.», 49, p. 604, 1928.

In tutta la serie di misure corrispondenti a questa prova l'elettrometro era regolato alla sensibilità di 0.005 Volt per divisione della scala.

Nelle esperienze eseguite il metallo 1 era Argento, il metallo 2 Nichel; in entrambe le misure sia dell'effetto Volta che dell'effetto Pila era posto in comunicazione coll'elettrometro o il disco di Argento oppure la sferetta di Argento; d'accordo con ciò le deviazioni corrispondenti all'effetto Volta ed all'effetto Pila sono risultate di segno opposto, d'accordo col fatto che in entrambi i casi il nichel è elettro-positivo rispetto all'argento.

2. *Ambiente molto rarefatto.*

Effetto Volta: 0.400 Volt.

Effetto Pila: avvicinate le sferette, il risultato della prova è completamente negativo pur avendo spinto la sensibilità dell'elettrometro fino a circa 0.0005 Volt per divisione. È sicuro che in queste condizioni l'effetto Pila non sorpassa 0.001 Volt, cioè è praticamente nullo.

Dunque: *nel vuoto spinto* *parisce completamente l'effetto Pila; resta sensibilmente invariato l'effetto Volta.*

Le pellicole superficiali hanno perso la caratteristica di conduttori di seconda classe.

Per eseguire questa esperienza fu usata una pompa Holweck il cui ottimo funzionamento garantisce l'ottenimento di un vuoto molto spinto. Ma allo scopo della conclusione precedente è perfettamente superfluo l'uso di una pompa pneumatica così perfetta.

Ho potuto seguire le variazioni dell'effetto Pila al variare della pressione; ecco il risultato di una serie di misure ed il grafico relativo:

Pressioni in mm. di Hg	f. e. m. in Volt
740	0.18
300	0.18
280	0.18
255	0.16
232	0.15
214	0.14
194	0.13
177	0.125
148	0.11
136	0.105
124	0.095
100	0.07
81	0.045
65	0.02
26	0.000
19	0.000

La tabella, e meglio ancora il grafico, mostrano che, mentre l'effetto Volta è rimasto praticamente immutato al valore di circa 0.390 Volt, l'effetto Pila subisce, a cominciare dalla pressione di 280 mm., una graduale diminuzione sino ad annullarsi.

Si è logicamente indotti alla conclusione che l'effetto Pila scompare a quella pressione a cui per effetto della avvenuta rarefazione, può avvenire l'evaporazione praticamente completa dell'acqua che trovasi condensata nelle pellicole superficiali.

L'effetto Pila misurato a pressione normale si deve attribuire a tale umidità.

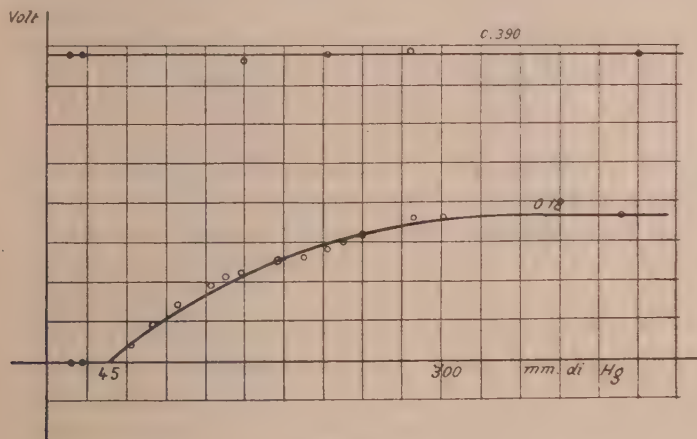


Fig. 2.

Se è vera questa conclusione dobbiamo averne una riconferma ripetendo l'esperienza in aria a pressione normale, ma fortemente essiccata.

3. Ambiente a pressione normale fortemente essiccato.

Effetto Volta: $V = 0.390$ Volt.

Effetto Pila: nessuna deviazione per avvicinamento delle sferette; l'elettrometro anche in questa misura è regolato ad una sensibilità dell'ordine di 0.0005 Volt per divisione.

Dunque: in ambiente secco, sparisce completamente l'effetto Pila, resta praticamente immutato l'effetto Volta.

La conclusione delle esperienze precedenti è dunque molto precisa: l'umidità delle pellicole superficiali, necessaria per creare l'effetto Pila, non ha influenza sensibile sull'effetto Volta.

Sismologia. — *Per l'interpretazione delle onde sismiche superficiali.* Nota di E. ODDONE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio L. PALAZZO.

Notevoli e conosciuti lavori degli scienziati proff. Lamb, Lord Rayleigh, Wiechert, Love, Galitzin, De Marchi e Somigliana, hanno recato un valido contributo alla teoria delle onde sismiche superficiali ⁽²⁾.

Dall'insieme di questi studi teoretici e d'osservazione, si ritiene adesso che le onde superficiali siano una combinazione di onde di condensazione e di distorsione, e ve ne siano di due tipi: le une con escursioni orizzontali normali alla direzione di propagazione, le altre a traiettorie ellittiche, con escursioni verticali ed orizzontali nel piano di propagazione ⁽³⁾.

Peraltro la discussione non è ancora chiusa, e nemmeno i risultati tutti d'accordo. Le discordanze più notevoli sono le seguenti:

a) Il valore massimo della velocità delle onde superficiali viene teoricamente fissato a 0.955 del valore della velocità delle onde trasversali.

Quest'ultima, espressa colla $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ vale, nella crosta terrestre, non più di 3.3 km/s ⁽⁴⁾, dunque tale valore massimo superficiale non dovrebbe superare i 3.15 km/s. Invece i testi di sismologia attribuiscono alle velocità delle onde superficiali delle cifre comprese tra 4.04 e 3.03 ⁽⁵⁾. Ed anzi ultimamente il dott. Y. Dammann, assistente all'Istituto di Fisica terrestre nell'Università di Strasburgo, trovò che la velocità delle onde lunghe (onde di secondo tipo, ellittiche, con escursioni orizzontali e verticali nel piano di propagazione) vale in media 3.96 coi valori estremi di 4.1 e 3.7 ⁽⁶⁾. Il valore massimo teorico sottostà al valore massimo sperimentale del 30 %.

b) La teoria richiede che nelle onde superficiali le escursioni verticali siano due volte maggiori delle orizzontali, e l'osservazione dice invece

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) Vedi questi « Atti », vol. XXV (1916), pp. 309 e 502; vol. XXVI (1917), pp. 369 e 462; vol. XXVII (1918), p. 13.

(3) H. BOUASSE, *Séismes et Sismographes*. Paris, Delagrave, 1927.

(4) Dalle tavole di A. MOHROVICIC, p. 12. Il valore $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ eguale a 4.0 quale ritenuto dai proff. Wiechert, Galitzin e Somigliana e tanto più quello eguale a 6.1 come ritenuto dal prof. De Marchi, si riferiscono, ora, alle velocità di onde trasversali più profonde nell'interno del globo, e non a quelle nella crosta terrestre. Perciò l'accordo tra teoria ed osservazione, cui i detti AA. credettero di essere arrivati, non è ancora raggiunto.

(5) A. SIEBERG, *Erdbebenkunde*, Jena, 1923.

(6) Y. DAMMANN, *Contribution à l'étude des longues ondes*. Publ. du « Bureau Central Sismologique International ». Travaux scientifiques. Série A, fasc. 5, 1927.

che nella parte centrale dei sismogrammi prevalgono le escursioni orizzontali ⁽¹⁾.

c) Nella teoria di Lord Rayleigh le lunghezze d'onda dovrebbero essere inferiori allo spessore del guscio nel quale stanno confinate dette onde. Ma tale delimitazione, per i periodi di 30 e 40 sec., porta a spessori della crosta terrestre esagerati.

d) Le teorie dei proff. Galitzin e De Marchi conducono ad una dispersione sismica anomala nel senso che le onde a periodi minori arrivano le prime; ed invece l'opinione dei proff. Wiechert e Love, condivisa dal dott. Y. Dammann ⁽²⁾ e da chi scrive ⁽³⁾, è che la dispersione sismica sia la normale.

Per queste numerose discordanze e per le complicate analisi matematiche dei metodi teorici, il sismologo sta ancora aspettando una spiegazione meno astrusa e più in armonia coi fatti.

È oggetto della presente Nota mostrare che vari dati e concezioni, acquisiti di recente alla Sismologia, sembrano semplificare il fenomeno delle onde superficiali e renderne meno difficile l'interpretazione.

È adesso quasi universalmente accettata l'ipotesi del Mohorovicic di un guscio terrestre superficiale che ne riveste un'altro interno più elastico. Entrambi sono costituiti da sostanze quasi elasticamente omogenee, essendo stato provato che le velocità delle onde longitudinali sismiche, pur molto diverse nei due mezzi, variano poco in cadun campo ⁽⁴⁾.

(1) La discordanza potrebbe essere dovuta all'imperfezione dei sismografi verticali; lo fa sospettare l'esperienza del dott. CHUJI TSUBOI il quale, in uno studio sperimentale intorno alla propagazione del moto vibratorio in una massa di gelatina a superficie piana, notò che le traiettorie ellittiche dei granelli di polvere d'alluminio, appositamente depositati sulla superficie della gelatina avevano l'asse verticale maggiore di quello orizzontale nel rapporto da 10 a 7; quasi in accordo colla teoria di Lord Rayleigh. *Experimental Studies on Elastic Waves*. «Bull. of the Earthquake Research Institute», Tokyo, Imp. Univ., vol. IV, 1928, p. 11.

(2) Y. DAMMANN, loc. cit. pp. 87-88, 1927.

(3) E. ODDONE, *Per la teoria della dispersione sismica*. «Atti R. Acc. Lincei», vol. XXV, 2° sem., 1916.

(4) L'esistenza nell'interno del Globo alla profondità di 57 km. di una superficie discontinua dove bruscamente le proprietà fisiche variano notevolmente è giustificata dagli importanti studi del prof. MOHOROVICIC (Publ. du «Bureau Centr. Séism. Intern.», Travaux scient., série A, fasc. I, 1924). Nel primo mezzo, dalla superficie al fondo (intendasi tra 5 e 57 km. per escludere gli strati del tutto superficiali) le osservazioni sismiche hanno mostrato che la velocità varia solo da 5.5 a 5.70 con andamento dato dalla

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{R}{r}\right)^k$$

dove v è la velocità alla distanza r dal centro della terra, V quella all'ipocentro alla distanza R e k è un coefficiente eguale a 3.02. Nel secondo mezzo dove, con salto brusco, la velocità dell'onda longitudinale passa a 7.88 la variazione è anche più lenta; da 57 km.

Quale sorgente luminosa emette luce bianca contenente tutte le radiazioni costituenti il suo spettro, così il foco sismico irradia onde corte ed onde lunghe, e se ne aggiungono altresì di natura proiettiva come nelle esplosioni.

I raggi sismici ⁽¹⁾, che incontrano la superficie terrestre SS e la superficie discontinua S_rS_r del Mohorovicic (vedi figura), su di loro si riflettono e scindono.

Le incidenze sono infinite, ma limitate quelle che danno raggi sufficientemente intensi. Ne dò una breve dimostrazione:

La rifrazione è regolata dalla legge:

$$(1) \quad \frac{n}{n'} = \frac{V}{V'} = \frac{\sin i}{\sin i'}$$

nella quale n ed n' , V e V' , i ed i' sono rispettivamente gli indici di rifrazione, le velocità e gli angoli di incidenza e di rifrazione nei due mezzi contigui.

La (1) mostra che perchè il raggio rifratto A₁B₁ della figura corra lungo la superficie discontinua, ossia perchè i' valga 90°, il raggio incidente dovrà fare colla normale A₁A'₁ un angolo i dato dalla

$$\sin i = \frac{V}{V'} = \frac{5.704}{7.88}.$$

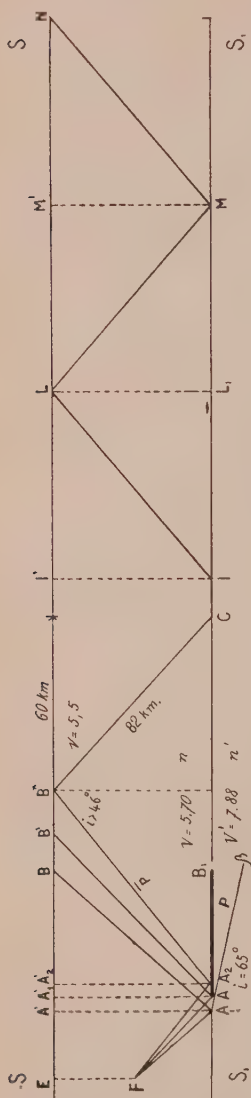
fino a 137 km. di profondità varia solo da 7.88 a 7.96 con andamento espresso dalla relazione:

$$\frac{V_m}{V_{sd}} = \left(\frac{r_s}{r_m} \right)^{k'}$$

nella quale V_m è la velocità alla distanza r_m dal centro della terra, V_{sd} quella presso la superficie distante r_s dal centro terrestre e k' assume il piccolo valore di 0.78. Le cifre di 5.55, 5.704, 7.88 e 7.96 sono tolte al recente lavoro del sismologo O. SOMVILLE, *Sur la propagation des ondes sismiques*

dans le voisinage de l'épicentre. Publ. du « Bureau Centr. Séism. Intern. », série A, fasc. 5, pp. 105 e 115, 1927. Le formole sono quelle date dal prof. Mohorovicic.

(1) Nelle figure inserite nei trattati e nelle note di sismologia vedonsi i raggi sismici pronunciatamente incurvati colla convessità verso l'interno. Sono esagerazioni: in questo primo mezzo pure il meno omogeneo, su 500 km. di corda, il raggio sismico curvilineo misura appena 514 km.! Semplifichiamo dunque e riteniamo il mezzo quasi omogeneo, la velocità quasi costante, le traiettorie sismiche quasi rettilinee.



Un tale angolo limite vale $46^{\circ}22'26''$, arrotondando 46° . I raggi la cui incidenza oltrepassa l'angolo limite subiscono la riflessione totale, ritornando verso la superficie terrestre secondo il percorso FA_2B . La riflessione cessa quando il raggio sismico non tocca più la superficie discontinua S_1S_2 ; ed un breve calcolo di geometria sferica indica che ciò avviene quando l'angolo di incidenza supera gli 80° . Varcato l'angolo limite, l'energia del raggio sismico riflesso (potere vibratorio) è eguale a quella del raggio incidente, maggiore di quella dei raggi riflessi provenienti da incidenze maggiori, ma specie dalle incidenze minori. Infatti accentuandosi l'incidenza l'intensità del pennello riflesso FB_2B'' diminuisce secondo la legge di Lambert e del coseno; e diminuendo l'incidenza, il raggio riflesso AB perde tutta l'energia che gli sottrae la parte rifratta $A\beta$. Il decremento di efficacia procede rapido per le incidenze sia maggiori, sia minori dell'angolo limite. Per $i = 40^{\circ}$ l'intensità del raggio riflesso già si riduce ad $\frac{1}{10}$ di quella del raggio incidente ⁽¹⁾.

In definitiva attorno all'angolo limite si hanno i raggi che dirò *efficaci* dando a quest'aggettivo il significato che ha nella teoria dell'arcobaleno.

Tali raggi efficaci, è subito visto, non escono dal guscio dal quale traggono origine; quindi si riflettono alla superficie presso B'' , poi ancora sulla superficie discontinua in C , ed il processo continua.

In sismometria i raggi che non escono dal guscio superficiale del Mohorovicic sono indicati colla lettera \bar{P} sopralineata, e quelli che ne escono colla lettera P . I nostri raggi efficaci sono dei \bar{P} sopralineati. Essi godono di una proprietà che non hanno gli altri P , e che nel nostro intento vogliamo segnalare.

Consultando le odografe sismiche, o curve dei tempi di percorso di quelle onde P che escono dal guscio superficiale, risulta che le differenze nei tempi d'arrivo a varie stazioni uniformemente distanziate (il cui angolo $d\theta$ al centro della terra è costante) crescono dapprima colla distanza epicentrale fino a raggiungere un debole massimo, dopochè prendono a decrescere. Significa che la velocità superficiale apparente delle P (velocità della traccia espressa colla $R \frac{d\theta}{dT} = \frac{d\Delta}{dT}$ essendo Δ la distanza epicentrale) varia, e dopo un minimo prende a crescere. Invece in cadun raggio efficace \bar{P} , per via delle riflessioni, la velocità superficiale apparente rimane eguale a quella della proiezione sulla superficie terrestre della velocità dell'onda confinata e serpeggiante tra il suolo e la superficie discontinua del Mohorovicic.

(1) Ciò risulta dalla legge di Fresnel secondo la quale il rapporto tra l'energia del raggio riflesso e quella del raggio incidente viene retto dall'espressione:

$$\frac{E \text{ riflesso}}{E \text{ incidente}} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')} + \frac{1}{2} \frac{\tan^2(i-i')}{\tan^2(i+i')}$$

Scrivo questa proprietà del raggio \bar{P} ; scrivo cioè che la velocità del suo movimento superficiale apparente $V_s = \frac{d\Delta}{dT}$ è eguale a quella della proiezione sulla superficie terrestre della velocità dell'onda longitudinale V_a e V_b . Viene:

$$(2) \quad V_{\text{superf.}} = V_a \text{ (oppure } b) \sin i,$$

costante finchè i si mantiene tale ⁽¹⁾.

Per V_a metto la velocità media delle onde longitudinali nel guscio eguale a 5.6 km/s.

Per V_b tengo 3.3 km/s.

i può variare da 80 a 0° colla conseguenza che la velocità apparente può variare per le longitudinali da 5.5 a zero km/s., (per le trasversali da 3.2 a zero); ma per i raggi efficaci longitudinali, le cui incidenze sono comprese tra 50 e 42° circa, per la (2), abbiamo delle velocità superficiali apparenti comprese soltanto tra 4.2 e 3.7 km/s.

Qui dobbiamo ripetere che le velocità superficiali effettive sono secondo il Sieberg da 4.04 a 3.3 e secondo le determinazioni del dott. Dammann da 4.1 a 3.7 km/s.

L'accordo tra le velocità apparenti e le velocità osservate è molto buono.

Io ritengo che queste velocità che noi abbiamo chiamato apparenti, siano reali. Basta guardare alla figura per comprendere che sotto la pressione di un'onda di condensazione, il guscio intero subisce una distorsione elastica che simile ad un'onda idrodinamica si propagerà in superficie ⁽²⁾.

Consideriamo un pennello di raggi efficaci che a distanza epicentrale grande si sia allargato fino ad occupare la zona I L (vedi figura). L'incidenza con una superficie discontinua dà caduna volta luogo a due onde riflesse: una longitudinale, l'altra trasversale. Quando quella longitudinale di condensazione lenta va, ad esempio, da I in L la trasversale, nata in I,

(1) Da tempo la relazione (2) è conosciuta. Va sotto il nome di legge di von Kövesligethy-Benndorf, dai primi sismologi che l'enunciarono. La novità sta nel dare ad i i valori attorno all'angolo limite di riflessione totale sulla superficie discontinua del Mohorovicic.

(2) La propagazione superficiale nei solidi è analoga a quella superficiale nelle acque profonde, salvo che l'energia potenziale dipende nel solido dalle reazioni elastiche, mentre in idrodinamica dipende dalle reazioni gravimetriche. Io vorrei aggiungere che all'ipocentro si sovrappongono moti di massa e moti elastici. I moti di massa richiedono maggiore tempo a mettere in equilibrio delle superfici che da una eguale pressione passano a delle forti disuguaglianze. Nell'area epicentrale, queste pressioni danno luogo ad una convessità, ed a distanza a moti che trovano grande analogia nella deformazione e propagazione delle solite onde superficiali. La stazione lontana raccoglie dapprima le onde elastiche che vanno colle grandi velocità V_a e V_b e producono delle escursioni piccolissime; poi all'arrivo delle grandi variazioni di pressione succedentesi ad intervalli più lunghi, segnerà grandi escursioni di tipo semielastico dove la compressibilità è quasi fuori causa.

la segue da vicino. Essa distorce il guscio stirando dapprima verso l'alto la parte IL, sottostante. Quando la suddetta longitudinale lenta scende da L in M la trasversale che viaggia ancora verso L spinge verso l'alto la parte IL soprastante, mentre la nuova trasversale che nasce in L e scende lungo LM deforma il guscio con lo stirarne verso il basso la parte LM' superiore. La zona II' MM' delimita una lunghezza d'onda forzata, nella quale II', MM' sono ventri ed LL' il nodo. La lunghezza d'onda vale $2 \times 57 \times \text{tangi}$. Per i compresa tra 50 e 42° viene λ compreso tra 91.2 e 137 km., i quali percorsi alla velocità di circa 3.9 km/s. danno periodi variabili da 35 a 23 secondi, quantità dell'ordine dei periodi delle onde lente di maggior durata. Queste onde possono interferire con quelle simmetriche che dal foco F vanno verso l'alto, verso A' nella figura. In tal caso la lunghezza d'onda diventa metà e quindi le durate d'oscillazione scendono a 17 ed a 12 secondi giustificando i periodi più frequentemente osservati.

Una volta poi che il suolo sarà entrato in oscillazione, il movimento proseguirà senza forte perdita di energia perchè si compie in due sole dimensioni.

Concludiamo:

In base alla probabile esistenza della superficie di discontinuità del Mohorovicic ed ai valori delle velocità delle onde longitudinali al di qua ed al di là del guscio spesso 57 km., la spiegazione delle onde superficiali si è alquanto semplificata⁽¹⁾. Per analogia con quel che sono in acustica gli infrasuoni, le onde lente si possono considerare come infrasismi e cioè come onde che la distanza e le riflessioni multiple hanno trasformato.

Si hanno buonissimi accordi tra le velocità teoriche e quelle osservate. Viene spiegato il crescere della durata dei sismogrammi colla distanza⁽²⁾;

(1) Un fenomeno parzialmente analogo avviene nelle esplosioni aeree dove le onde, limitate all'atmosfera, mostrano alternate zone di audibilità e di silenzio ed a distanza si palesano ripetizioni e brontidi. E se qualche apparecchio registra, compaiono su di esso le onde lunghe come le onde sismiche lente. In acustica questa trasformazione di suoni in *infrasuoni* si spiega colle riflessioni lungo le superfici discontinue turbinate dell'aria atte a moltiplicare le traiettorie sonore ed allungare i periodi di oscillazione e così la registrazione. Vedasi E. ESCANGLON, *L'acoustique des canons*. Paris, Gauthier-Villars, 1925.

(2) Consideriamo una stazione lontana. Il sismogramma dura oltre un'ora. Tale durata avviene perchè sono innumerevoli le onde dirette, riflesse e rifratte che vi giungono. Noi semplifichiamo guardando alle sole longitudinali e trasversali trasformate dalla riflessione. Nella figura, N è colpita dall'onda longitudinale e dalla trasversale riflessa partite contemporaneamente da M ma che giungono in N ad un intervallo di 10.2 s. Ma all'incidenza L una precedente eguale scissione di onde è avvenuta; cosicchè in N il distacco tra le longitudinali e le trasversali provenienti da L sarà di $2 \times 10.2 = 20.4$; così l'intervallo delle onde provenienti da I sarà di $3 \times 10.2 = 30.6$, ecc. Un centinaio di riflessioni sono sufficienti perchè sul sismogramma a 6000 km. di distanza le onde superficiali durino mezz'ora.

e ci si trova sulla buona via per l'interpretazione dei lunghi periodi delle onde superficiali. Non hanno luogo limitazioni di lunghezza d'onda, come esigono le altre teorie; nè la toccano i rapporti d'ampiezza tra le escursioni verticali e le orizzontali. Infine prevede il fenomeno ormai chiarito della dispersione sismica normale⁽¹⁾.

Talassografia. — *Sulla circolazione dell'Adriatico meridionale.*
Nota II di B. CASTIGLIONI, presentata⁽²⁾ dal Socio L. DE MARCHI.

CIRCOLAZIONE ATTRAVERSO IL CANALE D'OTRANTO.

Dalla superficie fino verso il fondo (oltre 800 m.) nella sezione attraverso il Canale si ha per lo più una distinzione abbastanza marcata fra le acque più salse e più calde a est, le meno salse e più fredde a ovest. Le prime in generale si stendono più largamente nella metà superiore. Il passaggio fra i due tipi è piuttosto graduale.

Sembra dunque che nel Canale vengano tra loro a contatto più o meno stretto le due correnti opposte: ionica (epirota) d'ingresso, e adriatica (pugliese) d'uscita. Le acque stabili intermedie osservate nel bacino adriatico partecipano verosimilmente al movimento d'uscita, almeno negli strati più profondi.

Circa la provenienza della corrente d'ingresso, possiamo riferirci soltanto ai dati raccolti nell'Ionio dalle spedizioni mediterranee del Thor⁽³⁾ e del Pola⁽⁴⁾. La salinità trovata nel Canale è quella che prevale pure nell'Ionio, anche a profondità maggiori. Così pure per la temperatura si sono trovati valori analoghi, almeno in prossimità delle isole ioniche. In alcuni casi però i valori di temperatura e di ossigenazione anche a grande profondità nel Canale sono più alti di quelli trovati nell'Ionio a quei livelli.

L'acqua ionica che s'avvicina al Canale d'Otranto viene a fiancheggiare a destra e in parte a sormontare l'acqua uscente. Probabili tracce di quest'ultima nell'Ionio furono trovate dal Thor a S della Calabria, limitate a uno strato prossimo alla superficie.

(1) Infatti per la (2) la velocità superficiale cresce coll'angolo di incidenza i e la figura mostra che crescendo i cresce la lunghezza d'onda.

(2) Nella seduta del 20 maggio 1928,

(3) *Report on the danish oceanographical expeditions 1908-1910 to the Mediterranean and adjacent seas.* Vol. I, Copenhagen, 1912.

(4) J. LUKSCH u. J. WOLF., *Physikalische Untersuchungen im östlichen Mittelmeer.* I u. II Reise S. M. «Pola» in den Jahren, 1890 und 1891. «Denkschr. K. Akad. der Wiss.», Wien, Bd. LIX, 1892.

In superficie la corrente ionica, a forte salsedine, l'abbiamo già segnalata come corrente calda (fredda d'estate) rispetto alle acque meno salse albanesi e pugliesi. Queste si stendono per lo più in uno strato superficiale di poche decine di metri.

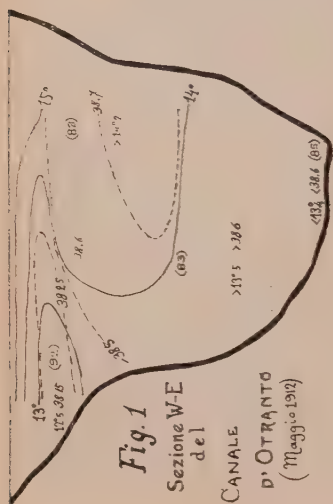
In profondità spesso si riscontra una distinta stratificazione. Purtroppo le deficienze nei dati d'osservazione non permettono di accertare che questo sia proprio il fatto normale. In determinati livelli le acque ioniche si stendono largamente verso ovest, le acque pugliesi verso est. I due tipi di acque vengono così a sovrapporsi in strati orizzontali.

Le acque tipicamente ioniche, calde (intorno a 14°, anche a grande profondità), salse (quasi sempre 38.7 e oltre), povere d'ossigeno (meno di 85 ‰, spesso meno di 80 ‰ della saturazione), sono particolarmente diffuse coi loro caratteri più accentuati alle medie profondità, e si portano verso ovest, talvolta fino contro il pendio salentino, senza lasciar spazio ad acque tipicamente adriatiche. Queste ultime invece, fredde, dolci, ricche di ossigeno, si vedono espandersi verso est al di sopra della massa principale ionica, in uno strato piuttosto sottile fra 100 e 200 m. di profondità. I gradienti di temperatura e salsedine fra le correnti opposte e sovrapposte, sono relativamente forti (fig. 1).

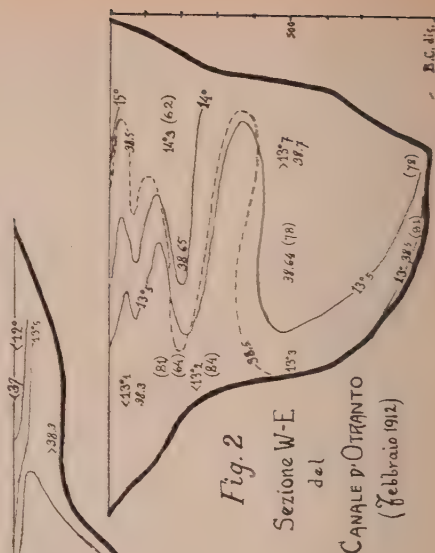
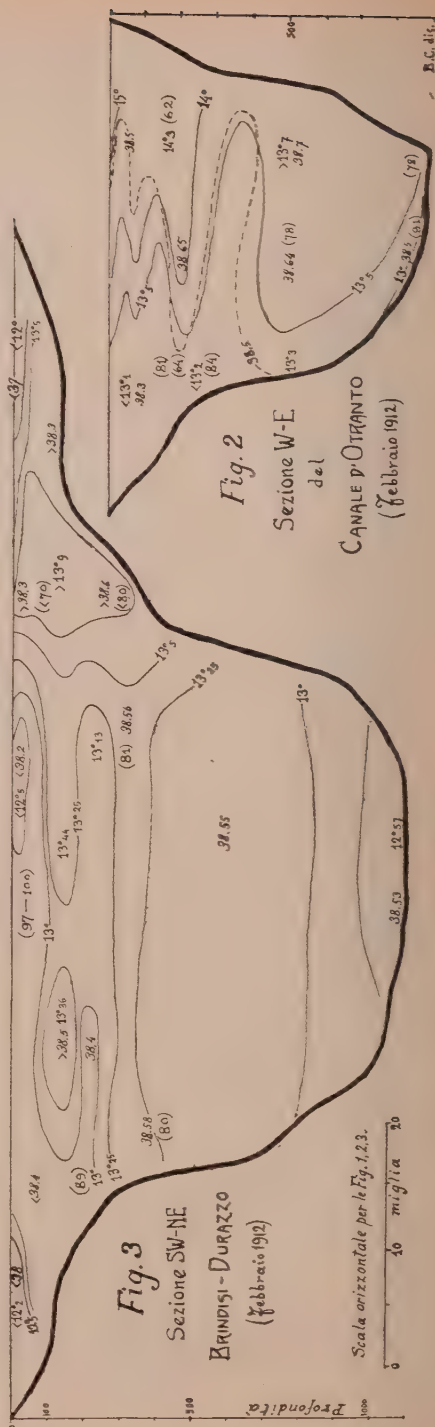
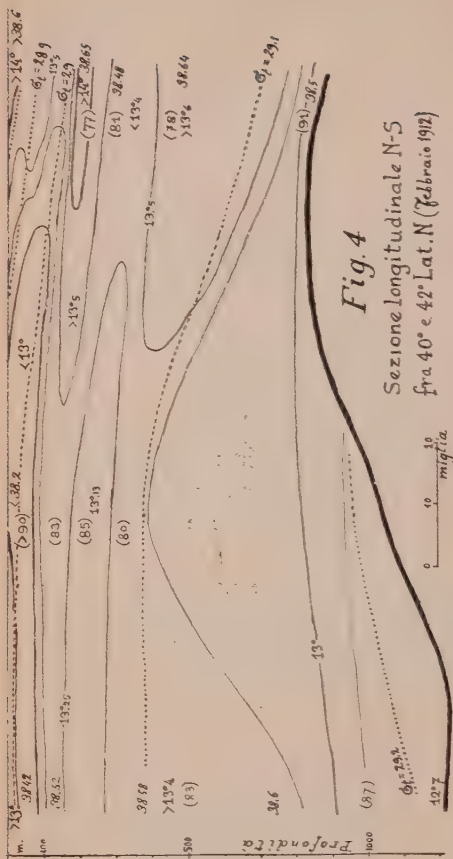
Naturalmente questa stratificazione di acque diverse non comporta inversioni di densità. Se in qualche raro caso si è osservata una parziale inversione della σ_t , essa viene, naturalmente, eliminata dalla correzione di pressione. La stratificazione dipenderebbe dunque dalla tendenza delle singole masse d'acqua di diverso carattere a espandersi nel livello d'equilibrio corrispondente alla propria densità.

A tali movimenti press'a poco in senso orizzontale devono naturalmente accompagnarsene altri in senso verticale, siano pure lentissimi. Infatti si può riconoscere una discesa delle acque fredde occidentali verso il fondo, cui si dovrebbe contrapporre una probabile ascesa delle acque più calde orientali. Ciò sarebbe confermato in alcuni casi dall'inclinazione verso il basso da W verso E attraverso il Canale delle linee di eguale densità, le quali naturalmente debbono tendere a disporsi orizzontalmente. Si potrebbe anzi credere che siano appunto squilibri di densità fra le opposte correnti che determinino una o più rotazioni sovrapposte, per le quali le acque di un lato si spingono verso l'altro lato, ciascuna al suo particolare livello d'equilibrio.

Interessante è poi il caso del febbraio 1912, in cui nelle acque del Canale si determina una stratificazione multipla. Sopra l'espansione ionica principale, abbassata sotto i 500 m., se ne forma un'altra a circa 200 m. di profondità, con egual salsedine, eguale povertà d'ossigeno, ma di mezzo grado più calda (e quindi più leggera, in corrispondenza al suo livello più alto); ed altre due, meno pronunciate, espansioni verso W di acque ioniche si hanno negli strati più alti, l'ultima anzi aderente alla superficie, con temperatura ancora maggiore. Intercalate alle espansioni ioniche sono, altret-



Linee continue, cifre dritte: TEMPERATURA
Linee a tratti, cifre oblique: SALSEDINE
Linee punteggiate (Fig. 4): DENSITA' (Gt)
Numeri fra parentesi: OSSIGENAZIONE RELATIVA



tanto notevoli, le espansioni verso E delle acque fredde e dolci occidentali (fig. 2).

Cerchiamo ora di seguire l'andamento delle acque ioniche, passato che hanno il Canale d'Otranto. La quasi assoluta mancanza di misurazioni nella parte dell'Adriatico più prossima al Canale, ci impedisce di figurarci con sicurezza quanto vi avviene, tanto più che sulla lontana Trasversale VII la situazione è di solito radicalmente diversa.

La continuità della grossa corrente profonda d'ingresso si trova solo, sulla Trasversale VII, nelle acque ancora tipicamente ioniche (raffreddate alquanto) appoggiate al pendio orientale. *La corrente ionica dunque*, almeno colla sua massa maggiore, *prosegue nell'Adriatico appoggiata a destra*, in obbedienza anche alla deviazione prodotta dalla rotazione terrestre. *Ma nello stesso tempo si solleva notevolmente*, si limita in minore estensione orizzontale e minore profondità; e così talvolta si mantiene distinta, ma sempre più ristretta in sezione e attenuata nei suoi caratteri specifici, fino sulla costa dalmata.

Questo sollevamento, specie tra Capo Linguetta e Durazzo, è sempre legato alla condizione della densità, la quale, per eguale profondità, è sempre maggiore nel bacino adriatico rispetto al canale, e vuole quindi equilibrata in un livello più alto l'acqua ionica che vi perviene. Per analoghe ragioni talvolta si constata un abbassamento della corrente fredda e dolce lungo il pendio salentino, fra Brindisi e Otranto.

Queste condizioni di equilibrio sono ancora più manifeste quando anche nel centro del bacino adriatico si propagano le stratificazioni orizzontali così distinte nel Canale. Il caso è piuttosto raro e si rende manifesto più che altro solo nella distribuzione della temperatura. L'esempio più tipico è dato da quel febbraio 1912, che ci dava nel Canale la sovrapposizione multipla delle correnti opposte, le quali si ripresentano sulla Trasversale VII, sollevate tutte, e quindi ridotte a minore spessore, e allargate attraverso tutto il bacino (eccettuate le espansioni calde più superficiali). La corrispondenza nei due profili VIII e VII delle singole correnti dei due tipi, sovrapposte alternatamente, è dimostrata dalla costanza dei rispettivi caratteri di temperatura, salsedine e ossigenazione⁽¹⁾. Di qualche strato si ritrova traccia anche più a N, fino sulla Trasversale VI (42° Lat. N.) però senza ulteriore sollevamento rispetto alla VII, anzi piuttosto con tendenza a riabbassarsi (figg. 2, 3, 4).

Se scarsi sono i casi in cui la stratificazione appare manifesta anche nell'interno dell'Adriatico (dove invece di solito le acque tipicamente ioniche, come abbiamo visto, si tengono raggruppate sul pendio orientale), essi sono

(1) Per meglio analizzare e seguire le singole correnti, o strati, ho costruito dei grafici di correlazione fra temperatura e salsedine, nei quali appaiono ben distinti i vari tipi di acque, che si mantengono sensibilmente costanti fra la Trasversale d'Otranto, quella Brindisi-Durazzo, e ancora in una stazione più a nord.

tuttavia sufficiente indizio di una legge generale: che cioè *le espansioni verso sinistra (ovest) della corrente ionica profonda*, ben manifeste nel Canale d'Oranto, *si mantengono fino a una certa distanza entrando nell'Adriatico, sollevandosi gradatamente*, e perdendo un po' alla volta i loro caratteri, per rimescolio con le acque proprie del bacino adriatico, e parziali ripiegamenti verso S (vortici) uniti alla corrente pugliese uscente. Le acque di questa verrebbero intercalandosi tra le espansioni delle acque ioniche, tanto più distintamente in vicinanza del Canale, nel quale il contatto fra le due correnti si fa di necessità più stretto. A contatto colla corrente ionica diretta verso N, le espansioni delle acque pugliesi possono in parte ripiegarsi e partecipare a tale movimento, potendo così chiudere la circolazione adriatica nei vari livelli profondi, come già abbiamo visto che può avvenire in superficie.

I profili longitudinali, costruiti allacciando singole stazioni delle varie trasversali, permettono spesso di ricostruire quelle correnti, rese più evidenti sempre dalla buona concordanza fra le linee isoterme, isocline ed isopneume. La propagazione dei vari strati d'acqua avviene conformemente all'andamento delle superfici isopneumiche, che sono in forte salita fra la Trasversale VIII e la VII, ma orizzontali o in lenta discesa fra la VII e la VI (fig. 4).

In tali condizioni, tra le acque a forte densità (basse temperature, salinità piuttosto forte) che occupano stabilmente il bacino adriatico, e quelle più leggere che dall'Ionio invadono il Canale, bisogna ammettere si stabilisca una specie di rotazione, con una forte corrente d'uscita presso il fondo, che riversi nell'Ionio le acque più dense adriatiche, e con l'entrata di acque ioniche alle minori profondità. Di fatto, secondo la distribuzione della salinità e temperatura, abbiamo constatato la corrente d'entrata, specie ai livelli medi e superiori, spostata a est e sempre più sollevata nel suo avanzamento verso N. Abbastanza definito, sempre in base ai caratteri dell'acqua, sembra pure l'efflusso di acqua adriatica rasente il fondo del Canale, pur esso spostato a destra (ovest).

Altra acqua adriatica se ne esce appoggiata al pendio salentino, spesso anzi in maggior copia nella metà superiore: ed inoltre negli strati orizzontali, che certe volte abbiamo visto stesi attraverso il Canale, intercalati alla corrente ionica. In generale però, nella sezione del Canale, a giudicare dai caratteri dell'acqua, occupano più spazio le acque entranti che non le uscenti. Se dunque ci deve essere equilibrio fra la quantità d'acqua che entra e che esce, bisogna pensare a una maggiore velocità delle acque uscenti, la quale si dovrebbe verificare specialmente negli strati più elevati. Forse in relazione a ciò stanno le forti velocità spesso riscontrate — col lancio di bottiglie — nella corrente pugliese superficiale. Purtroppo mancano misure di correnti in profondità.

Possiamo però domandarci se negli scambi d'acqua attraverso il Canale non possa verificarsi un eccesso di passaggio in un senso. Se calcoliamo il

bilancio complessivo del mare Adriatico, risulta anzitutto che, in un anno o in un periodo più breve, la differenza fra arricchimento d'acqua (afflusso dai fiumi e dalle sorgenti sottomarine; precipitazioni) e perdita (evaporazione), si limita a una frazione di metro, e quindi essa non può determinare nel Canale, che ha una sezione prossima ai 50 Km², che una corrente del tutto trascurabile. Di gran lunga più efficaci sono le oscillazioni che in periodi brevissimi può subire il livello dell'Adriatico per effetto combinato delle maree, dei venti, delle differenze di pressione atmosferica. Non appare impossibile che tali dislivelli fra Adriatico e Ionio determinino un movimento di entrata o di uscita con velocità apprezzabile, per esempio d'un mezzo miglio giornaliero, se distribuito uniformemente nella sezione, e quindi anche notevolmente maggiore, se ristretto a una sola parte di essa, specie ai livelli più elevati. Ma poichè la diversa densità delle acque dei due mari mantiene nel Canale una circolazione speciale, con correnti opposte collaterali e sovrapposte, l'effetto delle oscillazioni in questione sarà quello di accelerare una delle due correnti, ritardare l'altra. Meglio ancora, insieme alle variazioni di velocità, si dovrebbero produrre variazioni nell'espansione reciproca delle due qualità d'acqua nella sezione del Canale.

Per ora mi mancano le prove, se ciò si verifichi realmente. Non so ancora, cioè, se si potranno porre le varie situazioni del Canale, dateci dai profili verticali attraverso di esso, in relazione colle contemporanee situazioni meteoriche e mareografiche.

Chimica. — *Sulla reazione fra nitroprussiato sodico e solfuri* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. SCAGLIARINI e di P. PRATESI, presentata dal Corrisp. G. BOERIS.

Dopo gli importanti lavori di L. Cambi sopra la reazione del nitroprussiato coi chetoni, le aldeidi, e la tiourea, era interessante studiare in quale modo si potesse spiegare la reazione dei nitroprussati coi solfuri alcalini e colla creatinina.

La reazione fra nitroprussiato e solfuri fu osservata per la prima volta da Gmelin e studiata in seguito da Playfair ⁽³⁾ il quale riusciva ad isolare il composto della reazione aggiungendo alla soluzione acquosa un eccesso di alcool etilico. L'analisi del composto secondo questo autore, conduceva alla composizione:



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1928.

(3) «Liebig's Annalen», 74, 317 (1850).

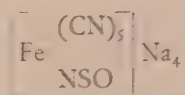
one espressa con le formule odierne corrisponde alla unione di una molecola di nitroprussiato con una di solfuro alcalino. In seguito si occuparono di questo argomento A. Oppenheim ¹⁾ che si limitò soltanto a ricercare l'applicabilità e la sensibilità della reazione; K. A. Hofmann ²⁾ il quale non poté riottenere il composto bleu violetto di Playfair, e J. F. Virgili ³⁾ secondo il quale il prodotto della reazione fra nitroprussiato e solfuri sarebbe « un composto molecolare, un prodotto di addizione del solfuro con nitroprussiato solubile e insolubile ». Questo autore ammette inoltre che nella reazione si formino contemporaneamente due sostanze, una bleu che rappresenta l'unico prodotto di reazione fra solfuro e nitroprussiato, ed una gialla che si forma per azione di un alcali sul nitroprussiato sodico.

Più recentemente L. Cambi ⁴⁾ riprendendo lo studio del composto ottenuto da Hofmann per azione del nitroprussiato sulla tiourea, emette incidentalmente l'ipotesi che la reazione del nitroprussiato con i solfuri e con alcuni mercapturi sia dovuta ad una condensazione del tipo:



Anche N. Tarugi ⁵⁾ si è occupato in questi ultimi anni dell'argomento ma soffermandosi più che altro su considerazioni teoriche.

F. Ephraïm, nel suo trattato di chimica inorganica ⁶⁾ propone per il prodotto della reazione fra nitroprussiato e solfuri la formula:



Data la mancanza di dati analitici esatti e veramente sicuri, le ipotesi fatte dai diversi Autori sulla composizione e sulla costituzione del composto in parola, hanno più che altro carattere induttivo. Occorreva quindi anzitutto isolare il prodotto nel miglior stato di purezza possibile. Abbiamo potuto ottenere prodotti inalterabili e formati da cristallini omogenei, facendo reagire in soluzione di alcool metilico assoluto, nitroprussiato sodico secco e solfuri anidri. Fra i composti da noi ottenuti con nitroprussiato sodico ed i solfuri di potassio, di sodio, di litio e di rubidio soltanto i due primi si prestano all'analisi, poichè gli altri sono estremamente deliquescenti.

(1) « Journal pr. Chem. », 1860, 236.

(2) « Zeit. für Anorg. Ch. », 12, 146 (1896); « Liebig Annalen », 312, p. 28 (1900).

(3) « Zeit. für Analyt. Ch. », vol. 45, p. 405 (1906).

(4) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XXIV, 2° semestre, p. 434 (1915).

(5) « Ann. di Chim. Applicata », vol. XVI, p. 407 (1926).

(6) F. EPHRAÏM, « Anorganische Chemie », p. 236 (1922).

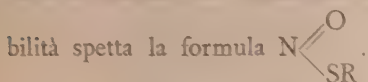
A questi due composti corrispondono le formule:



Resta così rigorosamente stabilito che nella reazione fra nitroprussiato e solfuri alcalini una molecola di nitroprussiato si combina con una di solfuro. Potrebbe trattarsi di un prodotto di addizione molecolare, come riteneva Virgili, oppure di un sale complesso in cui lo zolfo entrasse nell'anione, come prima Ostwald ⁽¹⁾ in seguito Cambi (loc. cit.) ed Ephraïm (loc. cit.) ritengono probabile.

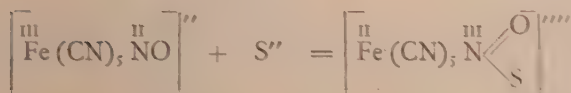
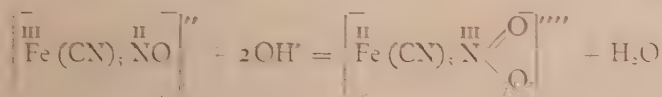
Noi propendiamo per l'ipotesi della formazione di un complesso in cui lo zolfo si leghi direttamente all'azoto per le seguenti ragioni.

1. — Perchè già H. S. Tasker e H. O. Jones ⁽²⁾ ottennero dei composti labilissimi ma intensamente colorati in rosso facendo reagire il cloruro di nitrosile su alcuni mercaptani, ai quali composti con ogni probabilità spetta la formula



2. — Perchè l'acquo-ferri-pentacianuro e l'acquo-ferro-pentacianuro non danno nessun composto coi solfuri, ma il primo si riduce ad acquo-ferropentacianuro. Ora l'acquo-ferri-pentacianuro differisce dal nitroprussiato per il solo gruppo avalente NO che però deve essere quello che lega lo zolfo.

3. — Per l'analogia di comportamento fra ossigeno e zolfo negli ossidi e nei solfuri, si poteva supporre che la reazione del nitroprussiato coi solfuri avesse decorso parallelo a quella del nitroprussiato cogli alcali:



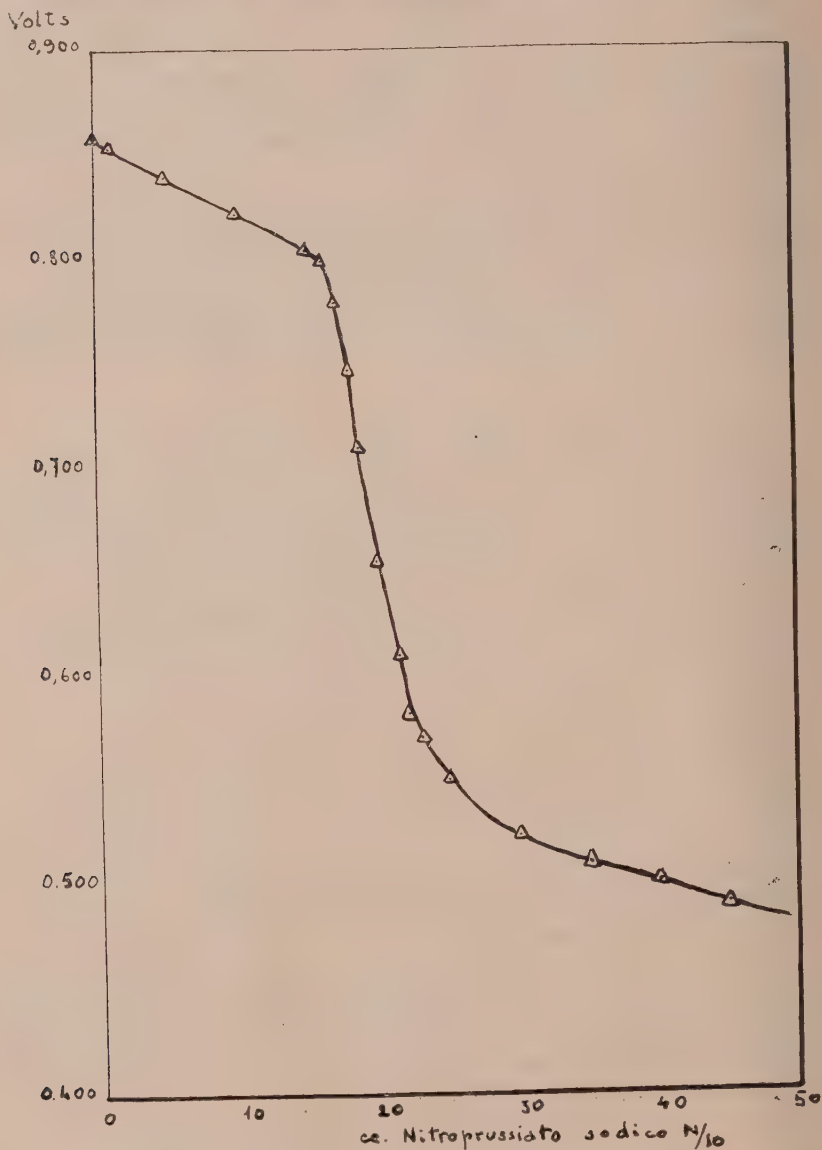
Le misure elettrochimiche, per quanto sommarie, confermano questo nostro punto di vista. Infatti determinando una curva di titolazione del solfuro sodico con nitroprussiato sodico, servendosi di un elettrodo a solfuro d'argento e cioè di una pila:



(1) OSTWALD, «Grundlagen der Analyt. Ch.», 3. Aufl.

(2) «Journal Chem. Soc.», 95, p. 1916 (1909).

abbiamo potuto nettamente mettere in evidenza un flesso spiccatissimo quando le due soluzioni di solfuro e di nitroprussiato si equivalevano stechiometricamente. In altre parole, aggiungendo ad un volume di soluzione



titolata di solfuro sodico un uguale volume di una soluzione stechiometricamente equivalente di nitroprussiato sodico, si osserva un fortissimo abbassamento della massa attiva degli ioni zolfo. Tale valore dell'attività dello

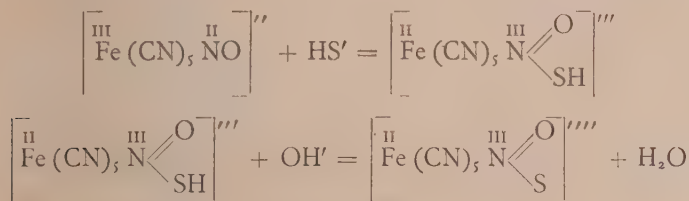
zolfo ione passa dall'ordine di grandezza di 10^{-2} nelle soluzioni N/10 di solfuro sodico primitive, all'ordine di grandezza di 10^{-11} dopo l'aggiunta di una quantità equivalente di nitroprussiato sodico. (V. diagramma).

Abbiamo pure tentato, onde averne per lo meno una idea approssimata, di calcolare la costante di dissociazione del complesso formato dalla combinazione del gruppo nitroprussico collo zolfo, cioè dell'anione complesso solfonitroprussico. Utilizzando le ultime quattro misure elettrometriche della curva riportata nella figura, abbiamo potuto apprezzare una costante di dissociazione dell'anione solfonitroprussico all'incirca di 10^{-14} , da cui si deduce, applicando le note relazioni termodinamiche, un valore dell'ordine di circa 19000 calorie per l'affinità di un grammo ione zolfo rispetto ad un grammo ione nitroprussico.

Riteniamo per ora questo dato come di primo orientamento proponendoci di ritornare sull'argomento con uno studio elettrochimico particolarmente dettagliato.

Per la reazione di formazione del complesso, anche per esperienze che abbiamo in corso e che a suo tempo comunicheremo, si può ammettere che avvenga un passaggio di valenza dal ferro all'azoto così che l'atomo di questo divenuto trivalente può entrare in combinazione collo zolfo, interpretazione che serve anche a spiegare la formazione del nitrito-pentacianuro per azione degli alcali sul nitroprussiato.

Crediamo di potere affermare che la reazione si possa rappresentare in due fasi distinte:



poichè abbiamo realizzato le condizioni di far entrare in reazione in un primo tempo soltanto l'ione SH' . Il complesso finale sarebbe perciò un ferrocianuro⁽¹⁾ sostituito in un gruppo $\cdot\text{CN}$ da un gruppo monovalente

$\overset{\text{III}}{\text{N}} \begin{array}{l} \diagup \text{O} \\ \diagdown \text{S} \end{array}$ analogo perciò ai composti:



(1) Il complesso con acido solforico diluito si decompone colorandosi in verde chiaro e non dà neppure per traccia coi solfocianuri alcalini la reazione dei sali ferrici; coi sali ferrici e coi sali di rame dà la reazione dei ferrocianuri. Bisogna tenere presente però che nella decomposizione del complesso possono avere luogo anche fenomeni di riduzione.

Preparazione del composto. — $K_4 \left[\overset{II}{Fe} (CN)_5 \overset{III}{NOS} \right]$.

Una soluzione fatta sciogliendo a freddo nell'alcool metilico assoluto il nitroprussiato sodico preventivamente reso anidro seccandolo in stufa a 105°, fu aggiunta ad una soluzione fredda di idrato potassico pure in alcool metilico assoluto e saturata in precedenza con idrogeno solforato secco. Le soluzioni erano sature a freddo e nelle proporzioni all'incirca equimolecolari con un leggero eccesso di solfuro. Si ebbe immediatamente un precipitato microcristallino, che al microscopio si riconobbe omogeneo, di colore bleu violetto intenso. Lavato tre o quattro volte per decantazione con alcool metilico assoluto, per allontanare tutto il solfuro alcalino, la cui presenza lo altera in breve tempo, il composto fu raccolto rapidamente alla pompa su ampio filtro di porcellana e lavato ancora con alcool metilico assoluto nel quale è praticamente insolubile; ottenuto con queste precauzioni è assai stabile. Il prodotto fu posto a seccare nel vuoto su cloruro di calcio. Anidro è di color violetto puro, completamente solubile in acqua con colorazione bleu violetta intensa. Le sue soluzioni acquose coi sali ferrosi danno un precipitato violetto che evidentemente è un sale ferroso dell'anione complesso. Risultati dell'analisi:

Calcolato per	Trovato
$K_4 \left[\overset{II}{Fe} (CN)_5 \overset{III}{NOS} \right]$	
K 38.67 %	K 38.42 %
Fe 13.80 »	Fe 13.49 » 13.40
S 7.93 »	S 8.15 » 8.23
N 20.78 »	N 20.05 » 20.15

Calcolando i rapporti atomici e riferendosi al contenuto in ferro si ha:

$$4.06 K : 1 Fe : 1.05 S : 5.95 N$$

che coincidono quasi perfettamente con quelli che corrispondono alla formula $K_4 [Fe (CN)_5 NOS]$.

La sostanza all'analisi qualitativa non rivelò tracce di sodio, nonostante si fosse partiti dal nitroprussiato sodico: evidentemente l'eccesso di solfuro potassico trasforma l'eventuale sale sodico potassico nel sale tetrapotassico insolubile. Il ferro e lo zolfo furono determinati sotto forma di ossido ferrico e di solfato di bario decomponendo la sostanza con acido nitrico col metodo Carius. Il ferro fu anche determinato calcinando direttamente la sostanza, sciogliendo il residuo in acido cloridrico, ossidando con acido nitrico e dosandolo come ossido ferrico. Nel filtrato fu determinato il potassio come solfato. L'azoto si determinò col metodo Dumas,

avendo l'avvertenza di far svolgere l'anidride carbonica in canna a parte, collegata al tubo di combustione; ciò per evitare la decomposizione del sale facilmente alterabile col calore, durante le operazioni preliminari alla combustione.

Preparazione del composto. — $\text{Na}_4 \left[\overset{\text{II}}{\text{Fe}} (\text{CN})_5 \overset{\text{III}}{\text{NOS}} \right]$.

Questo sale bleu violetto può essere ottenuto mescolando soluzioni metiliche concentrate e fredde di nitroprussiato sodico e di solfuro sodico cristallizzato ($\text{Na}_2\text{S} \cdot 9\text{H}_2\text{O}$), in quantità all'incirca equimolecolari. Oppure si può ottenere seguendo le stesse modalità indicate per la preparazione del sale tetrapotassico. Non abbiamo però potuto purificare a mezzo del lavaggio con alcool metilico il prodotto della reazione, perchè esso è molto solubile in alcool metilico anche anidro. Raccolto rapidamente alla pompa il precipitato venne messo a seccare nel vuoto su cloruro di calcio indi fu sottoposto ad analisi. Causa la sua deliquescenza l'analisi presentò notevoli difficoltà tanto che dovemmo rinunciare alla determinazione dell'azoto.

Calcolato per	Trovato
$\text{Na}_4 \left[\overset{\text{II}}{\text{Fe}} (\text{CN})_5 \overset{\text{III}}{\text{NOS}} \right]$	
Na 27.06 %	26.40 — 26.35 %
Fe 16.42 »	16.32 — 16.18 »
S 9.43 »	10.05 — 9.90 »

I metodi analitici sono quelli seguiti pel sale potassico.

Le percentuali di solfo sono assai superiori al teorico dato che il sale non potè essere purificato col lavaggio come già è stato detto precedentemente.

Abbiamo inoltre tentato di ottenere i sali di rubidio e di litio ritenendo fossero stabili e non deliquescenti; essi formano bensì i noti composti bleu violetti che al microscopio si presentano in piccoli cristalli omogenei ma contrariamente alle nostre supposizioni essi sono deliquiscenti al massimo grado.

Mineralogia. — *Laumontite di Toggiano* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di
P. GALLITELLI, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

In due brevi Note presentate alla Società dei Naturalisti di Modena, una nel giugno 1884, l'altra nel novembre 1885, ma pubblicate solo nel 1886 ⁽³⁾, Mario Malagoli, che fu Assistente presso l'Istituto di Mineralogia e Geologia della R. Università di Modena, fa la rassegna dei minerali del modenese ed osserva che alla datolite dei Cinghi di Vetta e di Toggiano, nella valle del Dragone, si associa, non di frequente, della laumontite, e precisamente quella varietà rosea conosciuta sotto il nome di caporcianite.

Recentemente, però, il prof. Grill ⁽⁴⁾, che ha studiato la ricca e bella serie di datoliti del Museo mineralogico di Modena, non ha confermato l'esistenza della suddetta zeolite nelle condizioni indicate dal Malagoli.

Per parte mia, in occasione di una gita a scopo mineralogico nella valle del Dragone, ho potuto constatare, sul terreno, che la laumontite non trovasi, infatti, ove, attualmente, incontrasi ancora della datolite, e che non è a questa associata. Essa fu da me rinvenuta a monte del sentiero che dal fondo valle conduce all'imbocco delle antiche gallerie « del rame » dei Cinghi di Toggiano, e più esattamente fra l'imbocco della prima e della seconda galleria.

Il minerale in parola si presenta, in quel punto, sotto forma di sottili venuzze e concentrazioni entro alla massa diabasica rossastra. Ha colore bianco e anche grigio-perla, lucentezza sericea più o meno accentuata, grande friabilità, ed è commisto a calcite.

Un attento esame, fatto con l'aiuto di una lente, permette di distinguere due tipi di laumontite. Uno più compatto a struttura quasi direi fibrosa con lucentezza perlacea; l'altro in masserelle finamente granulari o anche terrose di un colore bianco porcellana che si sbriciolano in minuti frammenti al più piccolo urto.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1928.

(3) MALAGOLI M., « Atti Soc. Nat. di Modena », Rend. Adun., serie III, vol. II, pp. 40 e 156, Modena, 1886.

(4) GRILL E., *Datolite di Toggiano*, « Mem. R. Acc. Naz. Lincei », Roma 1928.

Le osservazioni goniometriche, rese particolarmente difficili dall'imperfezione dei cristalli e dall'opacità delle facce, furono possibili solo su pochi individui, sempre assai piccoli, che riuscii a separare, con grande pazienza, dalla massa zeolitica. I cristalli che ho potuto misurare constano del pinacoide basale $\{001\}$ e del prisma $\{110\}$. Le facce di dette forme, abbastanza piane, non danno però immagini della mira nettamente puntabili, ma soltanto un vivo bagliore. Facendo per ogni angolo numerosissime misure ebbi i seguenti valori medi:

$$\begin{array}{ll} (110):(001) = \text{mis. } 74^{\circ} 30' & \text{calc. }^{(1)} 75^{\circ} 40' \\ (110):(1\bar{1}0) = \text{» } 92^{\circ} & \text{» } 93^{\circ} 44' \end{array}$$

i quali, pur non concordando troppo bene con i valori teorici della laumontite, sono però sufficienti per escludere si tratti di scolecite, in cui $(110):(1\bar{1}0) = 88^{\circ} 37'$. L'angolo $(100):(001)$, misurato al microscopio su lamine sfaldate parallelamente a $\{010\}$ fu trovato compreso fra 68° - 69° e quindi in sufficiente buon accordo col valore teorico di $68^{\circ} 46'$, che si dà comunemente per la laumontite.

L'allungamento dei cristalli, che è avvenuto nel senso dell'asse verticale, ha segno ottico positivo. L'angolo di estinzione, misurato su $\{010\}$ oscilla fra 37° e 45° e, come media di 30 misure, risultò uguale a 43° , e quindi non troppo lontano dal valore massimo (45°) dell'angolo di estinzione della laumontite riportato da A. M. Levy⁽²⁾ e Rosenbusch⁽³⁾.

L'indice di rifrazione determinato col metodo di Becke su lamine sfaldate secondo $\{010\}$ e contenenti quindi le direzioni n_g e n_p fu trovato per la laumontite compatta $n_g > 1.513$, $n_p \approx 1.513$, e per quella terrosa $n_g \approx 1.515$, $n_p < 1.515$. Per la laumontite di Huelgoat⁽⁴⁾ A. M. Levy e Lacroix danno i valori $n_g = 1.525$, $n_m = 1.524$, $n_p = 1.513$, i quali sono alquanto più alti di quelli trovati da me per la laumontite di Toggiano.

L'analisi chimica fu eseguita tanto sul materiale meglio cristallizzato, come su quello in masserelle di aspetto terroso, entrambi scelti con l'aiuto di un microscopio da preparazione.

(1) Partendo dalle costanti $a:b:c = 1.1451:1:0.5906$; $\beta = 68^{\circ} 46'$. HINTZE C., *Handbuch der Mineralogie*, vol. II, p. 1670, Leipzig 1897.

(2) LEVY A. M., *Les Minéraux des Roches*, p. 311, Paris 1888.

(3) ROSENBUSCH R., *Mikroskopische Physiographie*, vol. I, parte II, p. 655, Stuttgart, 1927.

(4) LEVY A. M., loc. cit., p. 312.

	Laumontite terrosa				Laumontite compatta (1)			
	I	II	III	Media	I	II	III	Media
H ₂ O	13.42	13.86	13.94	13.74	15.59	15.20	15.24	15.34
SiO ₂	51.70	51.29	51.31	51.43	50.75	50.86	50.73	50.78
Al ₂ O ₃	22.00	22.65	22.25	22.30	21.34	21.11	20.83	21.09
BeO	0.40(2)	n. d.	n. d.	0.40	n. d.	n. d.	0.47(2)	0.47
CaO	12.42	12.65	12.36	12.47	12.17	12.01	12.21	12.13
MgO	—	—	—	—	—	—	—	—
	99.94	100.45	99.86	100.34	99.85	99.18	99.48	99.81

P.sp = 2.253

In entrambe le varietà di laumontite risultò presente il berillio, che per quel che mi consta non sarebbe stato, finora, segnalato nelle zeoliti⁽³⁾.

La separazione dell'alluminio dal berillio è stata fatta seguendo il metodo, proposto dall'Hanriot⁽⁴⁾, basato, come è noto, sull'insolubilità del cloruro di alluminio in una miscela a parti uguali di acqua ed etere sature di acido cloridrico, che scioglie invece il cloruro di berillio.

La esistenza del berillio nel minerale studiato è stata anche controllata per via microchimica, facendo, sia la reazione dell'ossalato doppio di berillio e potassio, che mi diede nitidi cristalli monoclini uguali a quelli effigiati nelle tabelle del Behrens⁽⁵⁾, sia coll'azione dell'acetilacetone sull'acetato, come ha proposto di recente Caglioti⁽⁶⁾. In questo caso ebbi dei cristalli di acetilacetato di berillio poco ben formati ma con colori di polarizzazione quanto mai vivaci e caratteristici.

Nella composizione delle due varietà di laumontite il disaccordo maggiore si riscontra nel contenuto in acqua. Il quale nel materiale più compatto è pressochè uguale al teorico, mentre nell'altro è manifestamente in-

(1) La composizione teorica della laumontite in base alla formula $[\text{Si}_2\text{O}_5]_2 [\text{Al} \cdot 2 \text{OH}]_2 \text{Ca} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ adottata dal GROTH., (*Mineralogische Tabellen* 1921) è la seguente: H₂O = 15.3; SiO₂ = 51.1; Al₂O₃ = 21.7; CaO = 11.9.

(2) Con tracce di ferro.

(3) Da esperienze in corso, che saranno quanto prima rese note, la presenza del berillo è stata accertata anche in diversi altri minerali.

(4) FRESSENIUS R., *Traité d'analyse chimique quantitative*, 8ª ed. francese sulla 6ª tedesca, vol. I, p. 687, Paris 1909.

(5) BEHRENS-KLEY., *Mikrochemische Analyse*, vol. I, p. 47, Leipzig 1921.

(6) CAGLIOTI V., *Sulle reazioni microchimiche del berillio*, «Giorn. Chim. Ind. Appl.», p. 80, febbraio 1928.

feriore. Ciò potrebbe, a prima vista, indurci a ritenere il secondo prodotto come dovuto alla parziale disidratazione della laumontite meglio cristallizzata, dato che i rapporti degli altri componenti, vale a dire SiO_2 , Al_2O_3 , CaO , rimangono pressochè immutati.

Come è noto si ammette, da tempo, che la laumontite (la quale presenterebbe un contenuto variabile di acqua, almeno stando alle analisi riportate da Doelter, Hintze, Dana ⁽¹⁾) possa perdere, per esposizione all'aria, una parte della sua acqua, ed in seguito a ciò cambiare di aspetto e cadere in polvere. Il prodotto così originatosi venne detto leonardite ed avrebbe 12 °. circa di acqua. Secondo altri ⁽²⁾ una ulteriore disidratazione porterebbe perfino alla formazione di prehnite. Nei campioni da me studiati non ho osservata in nessun punto una siffatta modificazione della laumontite.

Circa il modo col quale la laumontite emette la sua acqua in funzione della temperatura, non è stato fatto, finora, almeno da quanto mi consta, uno studio completo. Per la laumontite di Huelgoat ⁽³⁾, Malaguti e Durocher ottennero i seguenti valori:

Temp.	Perdita %
100°	3.17
200°	6.08
300°	7.28

mentre Zjemjatschensky trovò per quella di Berge Borschom ⁽⁴⁾ una perdita a 100° del 2.01 %/o. Ricerche recentissime sulla laumontite di Murlo ⁽⁵⁾ hanno condotto ai seguenti risultati:

Temp.	Perdita %
100°	3.80
130°	4.15
calor bianco	15.52

Le determinazioni sperimentali sono dunque, come si vede, ancora scarse e non sempre concordanti. Ho creduto quindi opportuno eseguire una

(1) DOELTER C., *Handbuch der Minerlachie mie*, vol. II, parte II, p. 37, Dresden 1921; HINTZE C., *Handbuch der Mineralogie*, vol. II, p. 1679, Leipzig 1897; DANA, *System of Mineralogy*, p. 587, New York 1914.

(2) BRAUNS R., *Chemische Mineralogie*, pp. 412 e 416, Leipzig, 1896.

(3) MALAGUTI e DUROCHER, « *Comptes Rendus* », vol. XXII, p. 826, Paris 1846.

(4) ZJEMJATSCHENSKY P., *Ueber den Desmin und Laumontit vom Berge Borschom (in der Umgegend von Tiflis) und über den Desmin von Suram (Kaukasus)*, « *Zeitschr. für Krist.* », vol. XXV, p. 574, Leipzig 1896.

(5) CURLO G., *Analcite e laumontite di Murlo (Toscana)*, « *Annali Museo di St. Nat. di Genova* », vol. LII, p. 415, Genova 1928.

serie di ricerche per stabilire l'andamento della disidratazione della laumontite di Toggiano. Per detto scopo mi sono servito di un fornello elettrico a resistenza le cui temperature erano misurate da un pirometro a coppia termoelettrica Pt-PtRh. Affin di non restare in dubbio circa il raggiungimento dell'equilibrio ho prolungato ogni volta il riscaldamento per decine di ore anche dopo cessata ogni diminuzione di peso, ben sapendo che talune zeoliti abbandonano le ultime porzioni di acqua con grande lentezza. Così ad es., per le temperature fra 200°-300°, in cui accennasi anche un punto di flesso, il riscaldamento è stato prolungato per oltre 32 ore dopo raggiunta la costanza di peso.

I risultati ottenuti per i due tipi di laumontite sono riportati nella seguente tabella:

Laum. compatta		Laum. terrosa	
Temp.	Perdita %	Temp.	Perdita %
100°	1.42	100°	1.44
150°	1.99	150°	1.95
200°	3.19	200°	3.21
250°	5.55	250°	5.51
300°	6.19	300°	6.37
350°	9.00	350°	9.36
400°	10.92	400°	11.24
500°	13.50	500°	12.74
600°	14.54	650°	13.63
700°	15.00	720°	13.86
800°	15.20	800°	13.86
soffieria	15.20	soffieria	13.86

e l'andamento della disidratazione è indicato dal grafico della fig. 1.

Dall'esame di questi dati risulta che l'acqua viene emessa dai due campioni di laumontite con andamento presso che uguale fino a 400° C., alla quale temperatura si ha per entrambi una perdita di 11 % circa. Per temperature più alte le percentuali non vanno più d'accordo, per cui le due curve si differenziano pur rimanendo quasi parallele.

In base a questo comportamento si sarebbe portati a credere che la laumontite friabile non sia da ritenersi originata per disidratazione da quella compatta: 1° perchè in tal caso il disaccordo nell'emissione dell'acqua avrebbe dovuto verificarsi, se mai, fin da principio, dato che, per esposi-

zione all'aria, avrebbe dovuto andare via quella porzione di acqua che viene emessa a temperatura più bassa; 2° perchè i due tipi di zeolite, presenti nello stesso campione, sono venuti a trovarsi, certamente, nelle stesse condizioni ambientali di pressione e di temperatura. Parrebbe quindi più logico ammettere di avere a che fare con una varietà di laumontite con contenuto in acqua intermedio fra quello della laumontite tipica e quello della leonardite.

Osserviamo ancora che durante il riscaldamento non si ha mai un arresto netto nella emissione dell'acqua, solo verso i 250°-300° si nota una diminuzione sensibile della velocità di disidratazione (non si ha però un

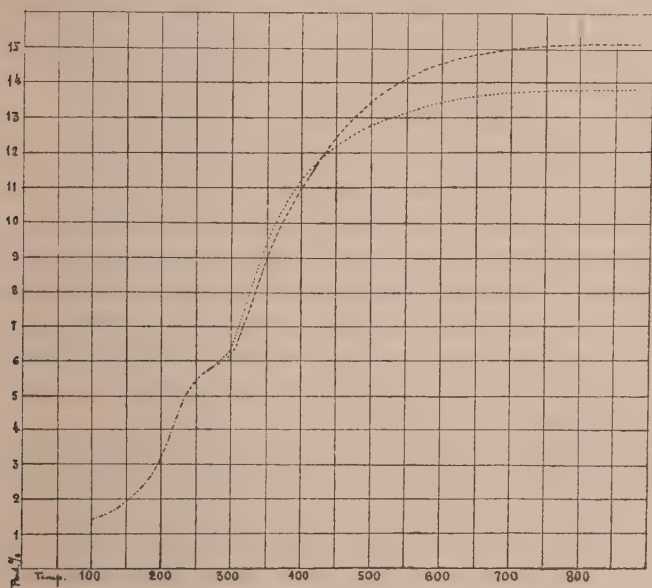


Fig. 1.

rapporto intero fra la quantità di acqua emessa e quella ancora contenuta nel minerale) che può far pensare a una differenza fra la natura dell'acqua emessa sotto i 300° e quella scacciata a temperatura superiore.

Degno di nota è inoltre il fatto che la perdita a 100°, determinata su 4 porzioni diverse di laumontite sia dell'uno che dell'altro tipo, prolungando per taluni saggi il riscaldamento anche oltre 48 ore, non ha mai superato il valore di 1.45 %⁽¹⁾ che si raggiunge nelle prime 4 ore di riscaldamento, e che è notevolmente inferiore a quello stabilito dagli Autori ricordati.

(1) Nelle 4 determinazioni si è avuto rispettivamente come perdita a 100° C.: 1.44 %, 1.42 %, 1.45 %, 1.43 %.

Geologia pratica. — *A proposito di una conferma di induzioni geologiche e di risultati geofisici.* Nota ⁽¹⁾ di M. ANELLI e A. BELLUIGI, presentata dal Corrisp. P. VINASSA.

In una Nota, pubblicata tre anni fa ne « *La Miniera Italiana* », uno di noi aveva richiamata l'attenzione sopra alcune manifestazioni di acque fortemente mineralizzate di tipo salsobromoiodico, accompagnate da idrocarburi gassosi, che si presentano nella pianura emiliana, tra il Parma e l'Enza, una diecina di km. a valle delle ultime propaggini collinose, nella località Malandriano-Montepelato ⁽²⁾.

Mentre a Malandriano la manifestazione si riduce ad una minuscola sorgentina da cui si sprigionano, gorgogliando, bollicine di gas infiammabile, a Montepelato, invece, una perforazione, eseguita per ricerca di acqua a scopo irrigatorio, raggiungeva, a 64 metri, un'abbondante falda saliente d'acqua minerale, il cui incontro fu caratterizzato, per qualche ora, da una imponente eruzione dovuta a violento sviluppo di idrocarburi gassosi.

La falda è ora utilizzata, a scopo terapeutico, in un apposito stabilimento, funestato durante lo scorso agosto da una catastrofe, dovuta ad una improvvisa, violenta eruzione di gas.

Il terreno da cui sgorga la sorgente di Malandriano, è costituito da alluvioni recenti, sotto cui stanno immediatamente i depositi torrentizi del quaternario, attraverso ai quali, probabilmente lungo qualche piccola frattura, si aprono la strada le acque mineralizzate, evidentemente sotto pressione; le stesse condizioni geologiche si verificano anche a Montepelato, dove la perforazione, dopo aver attraversato terreni recenti e quaternari per oltre una quarantina di metri, entrò nelle sabbie del pliocene superiore (Astiano), sabbie sfumanti verso il basso alle argille azzurre piacentiane, raggiunte negli ultimi metri di perforazione a circa 70 metri dal piano di campagna (92 m. s. l. m.).

Fin d'allora fu richiamata l'attenzione sopra la singolarità di queste falde salsobromoiodiche, per le quali si credette di dover escludere che si trattasse di *acque fossili* rimaste imprigionate nelle sabbie astiane, oppure di acque d'infiltrazione mineralizzate all'incontro di qualche lente salina racchiusa nelle sabbie plioceniche e originatasi per evaporazione di qualche laguna.

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1928.

(2) ANELLI M., *L'acqua minerale di Montepelato nella pianura Parmense*, « *La Miniera Ital.* », 1925, n. 7, Roma.

Parve invece più naturale ritenere le acque della pianura tra il Parma e l'Enza come strettamente collegate, dal punto di vista della genesi, colle consimili manifestazioni di Salsomaggiore, colle quali presentano, anche dal punto di vista della composizione chimica, una strettissima affinità, che è resa manifesta, non solo dalla mancanza di solfati e dalla enorme prevalenza di cloruri, ma anche dal forte quantitativo di acido borico, superiore a 2 gr. per litro.

Alla stessa maniera che le acque di Salsomaggiore, secondo il parere espresso recentemente da uno di noi, non possono trarre la loro mineralizzazione da una lisciviazione dei terreni miocenici, come è stato affermato da altri geologi, ma bensì da sali depositi in formazioni ben più antiche di quelle mioceniche, se pure (come lo farebbe sospettare il notevole quantitativo di acido borico) non sono dovuti a manifestazioni endogene, così deve avvenire anche per le acque di Montepelato.

I sali e gli idrocarburi proverrebbero da grande profondità, e si sarebbero aperta la strada attraverso a dislocazioni ed a fratture, che, per lo più, decorrono parallelamente al margine dell'Appennino. Sono queste linee di dislocazione spesso contrassegnate da stranissime intrusioni, effettuate attraverso terreni più recenti, di *argille scagliose caotiche*, intrusioni che sembrano potersi interpretare come fenomeni di diapirismo, e che sono, a nostro parere, costantemente collegate colle manifestazioni di idrocarburi liquidi e gassosi dell'Appennino Emiliano.

E poichè una bellissima intrusione di questo tipo, forse effettuatasi nel Quaternario, si osserva nelle prime colline tra il Parma e l'Enza, dove le argille scagliose, dopo aver attraversato le argille piacentiane, sono riuscite a raggiungere le sabbie astiane, fu emessa l'ipotesi che qualche cosa di analogo si verificasse in corrispondenza della pianura, sotto il mantello dei depositi quaternari. Lungo una di queste dislocazioni, accompagnata da intrusioni, sarebbero ascesi, forse nel Quaternario, gli idrocarburi e le sostanze saline, che si sarebbero adunati nelle sabbie astiane, dove le argille scagliose si arrestarono; le acque provenienti dalle precipitazioni atmosferiche, infiltratesi in corrispondenza degli affioramenti delle sabbie stesse nelle prossime colline, dopo un decorso sotterraneo più o meno lungo nella formazione astiana, si mineralizzerebbero incontrando questi adunamenti salini.

Furono queste le induzioni geologiche allora emesse, induzioni che forse dovettero apparire a qualcuno abbastanza audaci, perchè non confortate da alcun dato di fatto; comunque sia, il metodo geologico non permetteva però di procedere oltre, e non avrebbe mai permesso, ad esempio, di stabilire, sia pure con una certa approssimazione, la posizione della dislocazione, per la quale era stato possibile soltanto affermare che doveva esistere lungo un piano di ignota posizione, situato tra le località della pianura dove si osservano le manifestazioni saline e le ultime propaggine collinose.

Uno di noi, che ha iniziato dallo scorso anno rilievi gravimetrici con la bilancia di torsione nella pianura padana (servizio geofisico A. G. I. P.) ha potuto definire gravimetricamente l'esistenza e la posizione della dislocazione di Montepelato-Malandriano, e questo risultato, insieme ad altri, verrà fatto noto nei suoi dettagli dall'A. G. I. P., a suo tempo, con pubblicazioni speciali.

Lo studio gravimetrico della dislocazione di Montepelato-Malandriano ha permesso di stabilirne le sue caratteristiche principali: anticlinale ad eccesso di gravità, andamento della dislocazione (parallelo a quello dell'Appennino), forme e dimensioni, pendenze delle pareti, profondità minima; e il profilo della componente verticale del magnetismo terrestre da nord a sud, attraversante l'anticlinale, ha fatto supporre, per le sue caratteristiche di andamento, in terreni sedimentari, la presenza di sale alla profondità minima della massa profonda determinante l'anticlinale gravimetrico.

Le isogamme chiuse, individuanti la dislocazione, da una forma di ellisse, con l'asse maggiore procedente da sud-est a nord-ovest, passano ad una forma ellittica sempre meno schiacciata, procedendo verso la sommità della dislocazione, tantochè le isogamme più interne, e specialmente quella di sommità, si possono considerare quasi circolari.

Considerato anche che le equidistanze delle isogamme da noi tracciate è $5 \cdot 10^{-4}$ C. G. S. su 250 m. nella parete sud della dislocazione, si potè dedurre che la natura dello speciale disturbo tettonico intuito da uno di noi poteva essere diapirica (morfologicamente caratteristica).

Risolto convenientemente il problema della densità delle argille scagliose (masse pesanti profonde, che si è supposto determinanti l'eccesso di gravità in questione), in base alle curve dei gradienti di gravità si è calcolato, con più metodi cruciali, la profondità minima delle supposte argille scagliose a Malandriano, e si è ottenuto per questa profondità m. 60, profondità che era anche in accordo colle induzioni geologiche.

Le induzioni geologiche ed i risultati gravimetrici non hanno tardato a ricevere conferma.

Una perforazione eseguita per ricerche di acqua a scopo irrigatorio dalla Ditta Massarenti nel fondo del sig. Pietro Basetti a Malandriano, circa 150 m. ad est della manifestazione salina e gassosa sopra ricordata, 200 m. ad est dall'asse gravimetrico, incontrava a 83 m. di profondità le tipiche argille scagliose.

Le magnifiche *carottes*, gentilmente fornite dal sig. Basetti, sono in nostro possesso, come sono in nostro possesso le *carottes* di argille sabbiose e di sabbie argillose del pliocene superiore incontrate dalla perforazione stessa. Questa, dopo aver attraversato i terreni quaternari, entrò verosimilmente nel pliocene a 50 m. di profondità, incontrando alternanze di argille sabbiose fossilifere con ciottoli sparsi, di ghiaie cementate e di ghiaie sciolte,

in cui tra i 77-80 m. venne rinvenuta acqua salata, della quale non fu possibile riconoscere la densità, perchè pompata insieme ad acqua dolce di una falda sovrastante.

A 83 m. si iniziarono le argille tipicamente scagliose, mentre dagli 80 agli 83 si osservò una vera e propria milonite argillosa costituita a spese di argille sabbiose plioceniche con fossili e di argille scagliose con piccoli frammenti calcarei. Miloniti identiche si trovano nelle colline sorgenti una dozzina di km. a monte di Malandriano, e più precisamente nei colli di Cazzola, Rivalta, a contatto tra le argille scagliose intruse ed il pliocene attraversato dall'intrusione stessa.

Biologia. — *Studi cirripedologici.* - IV. *Fenomeni che precedono l'anabiosi nei Ctamalini.* Nota ⁽¹⁾ di B. MONTEROSSO presentata dal Corrisp. A. RUSSO.

Continuando le mie ricerche ⁽²⁾ sul comportamento dei Cirripedi opercolati, sottratti al loro mezzo naturale e posti in ambiente subaereo, riferisco in linea sommaria e preliminare quanto ho visto in *Chthamalus stellatus* var. *depressus* Poli.

È possibile distinguere, nell'aspetto esteriore di detto Cirripede, una serie di atteggiamenti, che — fatta astrazione della durata relativa, la quale varia in funzione di diversi fattori, intrinseci ed estrinseci all'organismo stesso — si svolge sempre nell'identica maniera. Ne accennerò qui di seguito i caratteri, ripartendo la serie in cinque tappe fondamentali.

PRIMO STADIO. — Appena sottratto all'azione delle onde, *Chth. stellatus depressus* non serra il suo opercolo, anzi ne mantiene beante la fessura, come nella fig. 1, qui annessa, in cui sono rappresentati i quattro pezzi opercolari calcarei (S = *scutum*; T = *tergum*), nonchè la membrana, che li ricopre dal lato interno e, a guisa di articolazione, si continua per tappezzare la parete concava (guaina) della *muraglia* ⁽³⁾, sicchè l'opercolo stesso ha mobili le sue parti dure.

Si osservi come detta membrana, oltrepassando i margini mediali, tanto degli *scuta* che dei *terga*, sporga nella fessura opercolare, diminuendone l'ampiezza e costituendo come due « lembi membranosi » ⁽⁴⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1928.

(2) Lavori precedenti: I. « Atti Accad. Gioenia », XV, 1926. - II. « Rend. Lincei », 1928. - III. « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 1928.

(3) Le figure qui annesse sono quasi schematiche e rappresentano altrettanti opercoli di *Chth. stell. depressus*, staccati dal guscio del Cirripede, lacerando attorno attorno la membrana che li tiene *in situ*.

(4) Sulla struttura e significato morfologico di questi lembi sarà riferito altrove.

Lo stadio che qui si accenna, del resto, ha un aspetto perfettamente identico a quello, che lo stesso individuo presentava, quando si trovava ancora nel suo ambiente naturale ed investito dalle onde.

Durante questo primo stadio i pezzi opercolari, di tanto in tanto vengono mossi in modo da ridurre o addirittura chiudere l'apertura sopra cennata, riprendendo, dopo qualche secondo, la posizione precedente.

Solo raramente però i cirri sono spinti fuori della fessura. I due *lembi membranosi*, già avanti cennati, che limitano l'*ostio opercolare*, sono turgidi, lucidi e lievemente contrattili ⁽¹⁾.

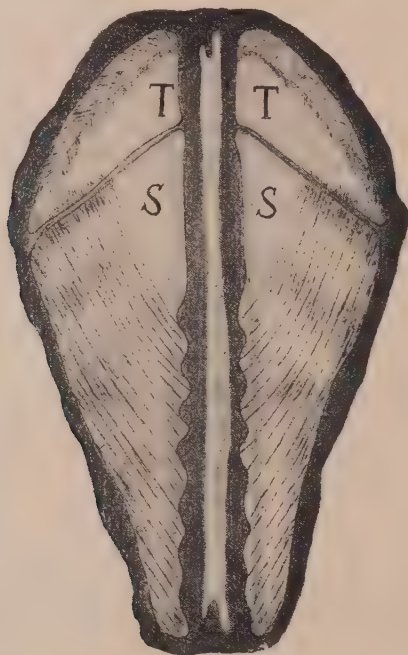


Fig. 1.

SECONDO STADIO. — Dopo qualche ora o qualche giorno, dacchè il cirripede è rimasto a secco, senza interruzione, il suo aspetto subisce un cambiamento interessante, che però viene acquistato gradatamente.

La *fessura opercolare* ⁽¹⁾ fra i due pezzi (*scuta e terga*) di ogni lato, è ancora aperta, sebbene un po' più stretta.

(1) Ad evitare lungaggini nella descrizione od equivoci, intendo usare la nomenclatura seguente: chiamo *pezzi opercolari calcarei* (o *duri*) gli *scuta* e i *terga*; tra i loro margini interni (opposti) è compreso uno spazio, che dirò *fessura opercolare*, la cui larghezza resta costantemente ridotta dalla presenza dei due *lembi membranosi*; lo spazio vuoto compreso fra i margini mediali di questi *lembi* sarà denominato *ostio opercolare*; l'insieme dei due *lembi* verrà indicato con il termine *diaframma opercolare* (fig. 2 D).

I due lembi membranosi, invece, hanno perduto di spessore e di turgidezza, mentre, a cominciare dagli angoli, anteriore e posteriore⁽¹⁾, in cui sono naturalmente uniti (presentando una piega), si sono venuti incontro, quello dell'uno con quello dell'altro lato, *saldando perfettamente* i loro margini opposti.

Continuando tale processo, si ha ad un certo momento che la fessura tra i pezzi calcarei permene aperta, ma la comunicazione tra l'ambiente esterno e la cavità palleale (interna), in cui è il corpo propriamente detto del Cirripede, è ridotta a ben poca cosa, in conseguenza della fascia (*dia-*



Fig. 2.

framma opercolare) che si è formata per il collabire dei due lembi membranosi, la quale presenta soltanto un piccolo foro a forma di losanga o di ellisse più o meno allungata (i cui estremi sono però appuntiti) come nella fig. 2. Tale foro è il residuo dell'*ostio opercolare*, e apparisce sempre allo stesso punto, in tutti gli individui di *Chth. stell. depressus*.

Un fatto notevolissimo, che ho già messo in rilievo⁽²⁾, è la constatazione che il Cirripede, con speciale movimento dei pezzi opercolari, or au-

(1) L'angolo anteriore corrisponde al *rostro* e il posteriore alla *carena* della muraglia.

(2) «Bollettino Soc. Biologia Sperimentale», Sezione di Catania. Seduta del 14 luglio 1928.

mentando or diminuendo l'ampiezza della cavità palleale, dà luogo ad una lenta ma continua « ventilazione » degli organi interni del suo corpo, ciò che dimostra come i processi respiratori persistano anche in questo stadio.

Toccando il guscio del Cirripede; nello stadio che ora accenniamo, esso chiude rapidamente la fessura opercolare (tra *scuta* e *terga*), sicchè il *diaframma* si sottrae alla vista dell'osservatore. Ma l'opercolo non tarda a riprendere le condizioni proprie dello stadio ora descritto.

Questa seconda tappa può durare alcune ore o anche qualche mese, in dipendenza delle condizioni dell'ambiente e di quelle individuali dell'organismo, su cui si sperimenta.

TERZO STADIO. — Fessura opercolare più ristretta che nello stadio precedente; foro del diaframma opercolare più ridotto, ma ancora osservabile con sicurezza. Movimenti di ventilazione notevolmente più rari: due-tre, successivamente eseguiti, ogni sei-dieci minuti primi. Toccando l'opercolo con la punta smussa di un ago, esso si contrae e si abbassa, più o meno vivacemente, salvo a riprendere la posizione, ordinaria per questo stadio, subito dopo.

QUARTO STADIO. — Fessura opercolare ancora più ristretta, tanto che il diaframma può dirsi ormai invisibile. Toccato, l'opercolo reagisce come nel precedente stadio, ma con maggior lentezza e movimenti meno estesi.

Talora in alcuni individui, che si avviano a questo stadio, l'accostamento dei pezzi calcarei (non dei membranosi, però) resta ostacolato dallo interporli, fra di essi, di alcuni cristalli di salmarino, che si sono formati appunto nello stadio precedente. Questo caso fortunato mi ha reso possibile di osservare le condizioni del diaframma opercolare in questa tappa.

Infatti detto diaframma resta allora visibile; esso mostra l'identico aspetto del secondo o terzo stadio (fig. 2) salvo l'ampiezza del foro di comunicazione tra la cavità palleale e l'atmosfera. Questo difatti è ridottissimo e sempre più si restringe col passare del tempo, finchè non si chiuda del tutto.

Tali osservazioni dunque sono state possibili in quanto i pezzi duri dell'opercolo non si sono accostati molto, come avviene generalmente. Dobbiamo però supporre che anche quando il diaframma non si veda, il comportamento del foro sia lo stesso.

QUINTO STADIO. — La fig. 3 è sufficiente per darci nozione dei caratteri assunti ormai dal Cirripede, lasciato ininterrottamente in ambiente subaereo.

Dirò solo che, pur toccando ripetutamente ed energicamente l'opercolo o anche la *muraglia*, non si avverte (al binoculare) alcun movimento dell'animale. A maggior ragione, sono cessati i movimenti spontanei.

La fortunata combinazione della mancata chiusura dei pezzi calcarei opercolari, per interposizione di cristalli salini, ci rende edotti del fatto, che al posto di quel foro, che abbiamo osservato fin dal secondo stadio, nel diaframma, c'è una lieve incrostazione di salmarino. Nessun organo dell'animale reagisce più agli stimoli meccanici. È notevole la quasi assoluta assenza della linea di sutura tra i lembi membranosi opercolari, in questo stadio. Però, se con una setola finissima (che io attacco ed un adatto manico) si tocca un punto qualsiasi del diaframma, il forellino di questo si riapre, salvo a rinchiudersi subito dopo.



Fig. 3.

Dopo alcuni giorni, da che lo stadio quinto si è iniziato, nè quella della setola, nè altra azione basta più per provocare movimenti nel diaframma. L'organismo può ormai considerarsi in anabiosi vera e propria.

Riposto, subito o dopo qualche tempo, in acqua marina, però esso allontanata lievemente i pezzi opercolari, ricostituisce il foro nel diaframma, e, attraversando gli stadi qui descritti, ma in senso inverso, con maggiore o minore rapidità, ritorna a vita perfettamente attiva.

I fenomeni ora descritti, si presterebbero ad interessanti considerazioni, che qui si tralasciano.

Devo però richiamare l'attenzione sulla perfetta saldatura di cui diventano capaci i lembi opercolari di *C. stellatus depressus*, lasciato a secco, condizione di prim'ordine per diminuire al minimo il prosciugamento degli organi, contenuti nel guscio calcareo, senza ostacolare la respirazione, la quale continua, almeno fino all'istante in cui l'animale entra in vera anabiosi, attraverso il foro, che, con tal mezzo viene a sostituire l'ostio opercolare dello stadio di piena attività.

Un altro dato di indubbio valore parmi risieda nella constatazione che il foro del diaframma non si costituisce in un punto qualsiasi — come potrebbe credersi, dato il meccanismo di chiusura dell'ostio — ma sempre e in tutti gli individui, allo stesso posto, e lì stesso si riapre, quando l'animale ritorna a vita attiva.

Vale la pena di aggiungere, in fine, che la serie dei cinque stadî, schizzati in questo scritto, non è discontinua, poichè il Cirripede passa da uno all'altro gradatamente.

Biologia. — *Osservazioni sulla vita sessuale della « Gambusia holbrooki » (Grd.)*⁽¹⁾. Nota preventiva⁽²⁾ di F. DULZETTO, presentata dal Corrisp. A. Russo.

Al principio del luglio 1922 è stata, come è noto, introdotta in Italia una specie del genere *Gambusia*, proveniente da un lotto acclimatatosi in Spagna, e che a sua volta proveniva dalla Carolina del Nord, e più precisamente dalle vicinanze di Edenton.

Artom⁽³⁾, in base al carattere che presenta il gonopodio dei maschi adulti — carattere che data la sua costanza può considerarsi come fondamentale per la classificazione della sottofamiglia *Poeciliinae*, cui il genere *Gambusia* appartiene — ha potuto stabilire che la specie acclimatata in Italia è la *Gambusia holbrooki* (Grd.) e non la *G. affinis*, come erroneamente si era ritenuto.

La diffusione in Italia di questo piccolo Ciprinodontide era stata sollecitata da Sella e da Grassi come mezzo indiretto di lotta antimalarica, dato che questi pesciolini erano stati valorizzati, specialmente dagli Americani, come distruttori di larve di zanzare. I buoni risultati che il loro impiego ha dato in quelle regioni d'Italia, come l'Agro Romano e Pontino,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Catania.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1928.

(3) ARTOM C., *La specie di Gambusia acclimatata in Italia (Gambusia holbrooki Grd.) in relazione con la stabilità del carattere del gonopodio*, « Atti R. Accademia Lincei, Rendiconti », vol. XXXIII, 1924.

ed il territorio di Rovigno d'Istria, dove sono stati largamente sperimentati, hanno reso più che mai necessaria una più vasta conoscenza della loro biologia, specialmente per quanto si riferisce alla vita sessuale, strettamente legata col potere di diffusione e di moltiplicazione della specie.

E le notizie che si hanno sulle tre specie meglio studiate, e cioè *Gambusia holbrooki*, *G. patruelis*, *G. affinis*, che sono quelle diffuse negli Stati Uniti d'America, sono molto limitate.

L'otto giugno 1923 è stato inviato a questo Istituto da parte del Regio Stabilimento Ittiogenico di Roma un lotto di 500 Gambusie, le quali sono state immesse nella grande vasca del giardino, dove si sono rapidamente moltiplicate, tanto da costituire un vero vivaio, il quale ha servito a fornire numerose vasche sparse nei diversi villini della città, nonché alcune località paludose della Piana di Catania.

Sin da quell'epoca mi ero proposto di affrontare lo studio di alcuni problemi inerenti alla vita sessuale di questa specie di Ciprinodonte, ma per un complesso di fatti ho potuto iniziare le ricerche nel maggio del 1926. Esse erano specialmente dirette ad affrontare la questione del rapporto sessuale, in relazione col fenomeno noto della possibilità che ha la femmina della *Gambusia* fecondata di produrre durante l'estate parecchie generazioni di piccoli, senza avere ulteriori rapporti col maschio.

Come risulta dalle ricerche di Hildebrand il rapporto sessuale negli individui adulti di *Gambusia holbrooki* è di un sol maschio su otto, nove, femmine, sicchè si ha una forte sproporzione tra i due sessi.

Anche Artom⁽¹⁾, mediante l'esame di materiale raccolto dal luglio al novembre 1924 nel lago di Porto e nei canali finitimi presso Fiumicino, ha potuto confermare la prevalenza delle femmine sui maschi; senonchè nella *G. holbrooki* acclimatata in Italia la sproporzione è molto meno accentuata.

E l'A. giustamente osserva come le statistiche sul rapporto numerico dei sessi, specialmente nei pesci, hanno un valore assai limitato, per il fatto che non si tiene conto del rapporto sessuale alla nascita, mentre durante lo sviluppo intervengono fattori vari, i quali possono influire sulla eliminazione di un certo numero di individui di un dato sesso. Geiser⁽²⁾ infatti ha potuto constatare che il rapporto sessuale dopo poche settimane dalla nascita è di 1 : 1; ed analoghi risultati ha ottenuto anche Artom⁽³⁾.

Inoltre, come è noto, la femmina della *Gambusia* fecondata ed isolata è in condizione di produrre durante la stagione calda diverse generazioni

(1) ARTOM C., *La sproporzione numerica dei sessi nella Gambusia holbrooki* (Grd.) analizzata nelle sue cause molteplici. « Atti R. Accademia Lincei, Rendiconti », vol. XXXIII, 1924.

(2) GEISER S. W., *Notes on the differential death-rate in Gambusia*. « Ecology », vol. II, 1921.

(3) Loc. cit.

di piccoli, sicchè è interessante conoscere come varia il rapporto sessuale col succedersi dei parti, date le nozioni che si hanno sulla influenza che gli spermii più o meno invecchiati esercitano sul sesso dei nati. L'essere le ova fecondate da spermii appena emessi, o da spermii che siano rimasti a lungo negli ovidutti, può infatti determinare uno spostamento del rapporto a favore di un sesso anzichè dell'altro; ed in tale senso pare depongano i risultati delle ricerche di Artom.

Il 13 maggio 1927 ho prelevato dalla vasca del giardino n. 8 Gambusie «grandi», la cui lunghezza si aggirava intorno ai 5 centimetri, tutte prossime a partorire, come si poteva facilmente rilevare dalla estensione delle caratteristiche macchie nere situate ai lati dell'addome. Di questi otto individui, sei furono distribuiti nei tre acquari di cui dispone l'Istituto, che avevo diviso ciascuno in due mediante un setto, e le altre in due bacinelle del diametro di circa 25 centimetri. L'abbondante vegetazione formatasi sul fondo degli acquari si è mostrata sufficiente a fornire la quantità di ossigeno necessario, sicchè non ho creduto opportuno ricorrere all'aerazione artificiale, solo di tanto in tanto rinnovavo una parte dell'acqua. L'acqua delle vaschette invece veniva rinnovata quasi giornalmente, ed aggiungevo sempre dei ciuffi di *Cladophora*.

Durante tutta la buona stagione gli animali sono stati alimentati con larve di culicidi, prelevate da un piccolo stagno artificiale, appositamente preparato per procurarmi più facilmente le larve.

Ho cominciato col cercare di stabilire il numero dei parti per ciascun individuo, ed il numero dei piccoli deposto in ogni parto. Come si rileva dalla tabella, degli otto individui in esame uno ha partorito quattro volte, cinque, tre volte, e due, due volte; l'ultimo parto si è avuto in tutti entro il mese di agosto.

Individui in esame	Num. parti	Data		Num. nati	Data		Num. nati	Intervallo tra 1° e 2° parto		Data	Num. nati	Intervallo tra 2° e 3° parto		Data	Num. nati	Intervallo tra 3° e 4° parto	
		del 1° parto			del 2° parto			del 3° parto			del 4° parto						
A	4	22-V-1927		43	17-VI-1927		34	25		10-VII-1927	78	22		9-VIII-1927	31	29	
B	2	21-V-1927		31	10-VII-1927		87	40		—	—	—		—	—	—	
C	3	23-V-1927		17	18-VI-1927		57	25		12-VII-1927	29	23		—	—	—	
D	3	26-V-1927		31	18-VI-1927		34	22		12-VII-1927	46	23		—	—	—	
E	3	29-V-1927		20	1-VII-1927		25	32		24-VII-1927	51	22		—	—	—	
F	3	2-VI-1927		23	27-VI-1927		43	24		17-VII-1927	27	19		—	—	—	
G	2	29-VI-1927		6	20-VII-1927		9	21		—	—	—		—	—	—	
H	3	23-V-1927		11	26-VI-1927		25	33		30-VII-1927	4	23		—	—	—	

Potrebbe obiettarsi che essendo stati gli individui prelevati il 13 maggio, avessero potuto partorire una prima volta mentre erano nella vasca, nel qual caso è da presumere che il primo parto sia avvenuto entro la prima quindicina di aprile, dato che tutti partorirono entro lo stesso mese di maggio. D'altro canto tutte le volte che si son fatti dei prelevamenti con retino a maglie molto piccole, dai diversi reparti in cui è divisa la vasca del giardino, non si sono riscontrati mai piccoli che dopo la prima quindicina di maggio.

Il numero dei nati per ciascun parto oscilla entro limiti molto ampi, conformemente a quanto era già noto da precedenti osservazioni; esso è compreso tra un minimo di 4 ed un massimo di 87, massimo che può considerarsi come eccezionale, dato che dalle notizie riferite da Grassi ⁽¹⁾ si rileva come in America il numero massimo dei piccoli per parto arriva a 60.

Inoltre la media del numero dei nati del secondo e terzo parto è superiore a quella del primo; però mentre tra il primo ed il secondo parto la differenza è rilevante, infatti si ha una media di 22.75 al primo e di 39.25 al secondo, i valori del secondo e del terzo quasi si equivalgono: 39.25 al secondo e 39.16 al terzo.

Per quanto si riferisce al tempo medio intercorrente tra un parto ed il successivo, dai dati raccolti nella tabella si rileva che mentre il tempo medio intercorrente tra il primo ed il secondo parto è di giorni 27.75 tra il secondo ed il terzo parto è invece di giorni 22.

Secondo le osservazioni fatte da Hildebrand ⁽²⁾ nel luogo di origine della Gambusia i parti si succedono con l'intervallo di 4-6 settimane, sicchè sembrerebbe che nella Gambusia acclimatata in Italia questo intervallo abbia subito una notevole riduzione. Ed in questo fenomeno non possono non avere esercitato una larga influenza le particolari condizioni di ambiente, la cui ripercussione si è fatta risentire su tutta la vita sessuale di questo Pesce.

Hildebrand ha inoltre potuto vedere che se si isola in primavera una femmina dopo essere stata fecondata, essa è in grado di partorire, durante tutta la stagione calda, parecchie volte (5-6). Il fenomeno è stato spiegato ammettendo che gli spermatozoi, introdotti dal maschio nel seno urogenitale della femmina con l'aiuto del gonopodio, risalgano gli ovidutti, e si fermino tra le pieghe, in modo da potere fecondare le uova che successivamente maturano. Sicchè Artom dice che è un fatto certo che gli spermatozoi conservano nel corpo della femmina per parecchi mesi il potere fecondante. Egli rileva però come essi sono in condizione di conservare questo potere

(1) GRASSI B., *Acclimazione delle Gambusie in Italia*, « Atti R. Accademia Lincei, Rendiconti », vol. XXXII, 1923.

(2) HILDEBRAND S. F., *Notes of the life history of the minnows Gambusia affinis and Cyprinodon variegatus*, « Bureau of Fisheries », 1917.

solo durante l'estate, « coll'approssimarsi della stagione fredda essi perdono cioè sicuramente la loro vitalità, tant'è vero che femmine fecondate nell'autunno, e poi isolate, depongono nella primavera susseguente uova gialliccie, mai fecondate ».

Con lo scopo di controllare se effettivamente le *Gambusie* isolate non fossero più capaci di fecondare le loro uova, ho tenuto in osservazione i sei esemplari messi negli acquari, degli otto prelevati dalla vasca l'anno passato.

Di questi sei individui due sono morti nei primi giorni di aprile poichè essendosi staccato, non si sa come, il tubo di livello dell'acqua, questa durante la notte si è versata; il terzo è morto il 22 maggio per ragioni che non sono riuscito a stabilire, ed esaminato l'ovario ho trovato delle uova molto sviluppate. Sicchè ho dovuto limitare le osservazioni che riferisco ai tre esemplari superstiti.

Durante tutto l'inverno gli animali in esame sono rimasti sul fondo della vasca, immersi in mezzo al limo, che vi si era a poco a poco raccolto, e che avevo lasciato appositamente. Nemmeno nelle belle giornate essi venivano a galla, sicchè per un momento ebbi il timore che fossero morti.

Gli acquarii erano rimasti in giardino, appoggiati al muro del Museo che guarda a levante, sino al 25 maggio, epoca in cui ho creduto più conveniente spostarli dal lato di tramontana, onde evitare che venissero eccessivamente colpiti dai raggi solari.

Come ho avanti accennato, era mio intendimento di vedere se gli spermatozoi fossero capaci di mantenersi in vita nel corpo della femmina da un anno all'altro. Ed io pensavo che, dato che in Sicilia, e specialmente a Catania, la temperatura media invernale si mantiene piuttosto elevata, gli spermatozoi potessero sopravvivere forse meglio che nelle regioni fredde, in cui, durante l'inverno l'acqua arriva a congelare. Ed infatti, conformemente alle mie previsioni nella seconda metà di aprile cominciarono a comparire le caratteristiche macchie nere ai due lati dell'addome, che mi fecero sperare bene dell'esito dell'esperimento. Nei due individui contrassegnati nella tabella con le lettere *D* ed *E* le macchie a poco a poco andarono estendendosi, finchè non si riunirono in corrispondenza della faccia ventrale. Il 17 maggio l'individuo *D* partorì n. 21 piccoli, ed il giorno successivo, 18 maggio, l'individuo *E* ne partorì 33. Sicchè quantunque tenuti lontani dal maschio i due individui avevano regolarmente ripresa, con l'inizio della buona stagione, la loro attività riproduttiva, con qualche giorno di anticipo rispetto all'anno precedente. Infatti nell'individuo *D* il primo parto si era avuto il 29 maggio e nell'individuo *E* il 26 maggio.

Nel momento in cui scrivo i due individui sono prossimi a partorire per la seconda volta, come si rileva non solo dallo stato delle macchie addominali, ma anche dalle condizioni dell'addome che è molto ingrossato.

L'individuo *B* si avvia intanto per il primo parto.

Da quanto è stato esposto si rileva come in determinate condizioni gli spermii di *Gambusia holbrooki* siano capaci di conservare nel corpo della femmina il loro potere fecondante da un anno all'altro, contrariamente a quanto era stato ammesso sinora.

È interessante conoscere il sesso delle generazioni prodotte in queste particolari condizioni, cosa cui attendo; infatti i piccoli si trovano da poco più di un mese in acquario, ed aspetto che si differenzii il gonopodio nei maschi per essere in condizione di stabilire il rapporto sessuale.

Questi primi elementi raccolti, che ho creduto utile rendere noti, hanno certamente bisogno di essere controllati su più vasta scala e su individui di diversa età, cosa che mi riprometto di fare subito. Si sta provvedendo infatti ad aumentare il numero degli acquari, senza di che non è possibile andare avanti nelle ricerche, in quanto specialmente i piccoli delle Gambusie non possono tenersi a lungo in ambienti ristretti perchè muoiono.

Patologia vegetale. — *Applicazione dei raggi ultravioletti alla ricerca di sostanze fluorescenti nelle piante in rapporto ad alcuni fenomeni di patologia vegetale*⁽¹⁾. Nota di MARIA DE CECCO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. PETRI.

Essendomi dedicata da vario tempo all'applicazione dei raggi ultravioletti alla ricerca di sostanze fluorescenti nelle piante allo scopo di preparare la mia tesi di laurea, credo opportuno di pubblicare i risultati principali del lavoro compiuto sino ad ora, giacchè alcuni fatti posti da me in evidenza non sono ancora stati segnalati da alcun altro e presentano inoltre un certo interesse dal punto di vista della fisiologia e della patologia vegetale.

Relativamente al metodo adoperato, ho seguito quello già indicato dal prof. Petri⁽³⁾ e che permette di isolare, per capillarità, le sostanze fluorescenti da pigmenti o altri composti organici che potrebbero nasconderle all'analisi fluoroscopica. Questo metodo offre il vantaggio di fornire dei fotogrammi ben evidenti, costanti nei loro caratteri di fluorescenza, e che possono essere ripetuti quando si voglia, conservandosi inalterato il campo di diffusione capillare su carta da filtro.

Questo metodo fornisce anche la possibilità di eseguire reazioni colorate per fare dei saggi sulla natura chimica delle diverse sostanze fluorescenti. Devo render noto anche un procedimento che mi ha dato buoni

(1) Ricerche eseguite nel laboratorio della R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1928.

(3) Questi « Rendiconti », 1927.

risultati in alcuni casi, nei quali l'estrazione delle sostanze contenute nelle cellule, era alquanto difficile, come, per esempio, nel caso delle alghe unicellulari, le quali difficilmente vengono rotte con la triturazione in mortaio di agata con polvere silicea finissima.

La sospensione delle alghe in acqua viene sottoposta alla centrifugazione, quindi è decantata e le alghe restate al fondo del tubo vengono trattate con poca acqua bollente. La poltiglia di alghe viene posta poi su carta da filtro per ottenere così il campo di diffusione capillare delle sostanze solubili intracellulari e diffusibili attraverso la parete cellulare.

Le mie ricerche sono state rivolte specialmente agli organi assimilatori, in qualche caso le ho estese anche al fusto, ai rami, alle radici e ai frutti, prendendo in considerazione quelle sostanze che sono dotate di una fluorescenza azzurra, violetta o verdastra. Ho esaminato in tutto 162 piante di famiglie diverse, comprendendovi anche alcuni funghi ed alghe.

Uno dei risultati che più colpisce è la grande diffusione di sostanze a fluorescenza azzurra o violacea negli organi verdi dei vegetali, giacchè ben 150 piante, fra quelle esaminate, hanno mostrato di possederne in più o meno grande quantità, mentre non è escluso che, perfezionando il metodo di analisi adoperato, sia possibile metterne in evidenza la presenza anche nelle piante che mi hanno dato un risultato negativo, meno forse i funghi inferiori, i quali sembrano essere privi di sostanze dotate di un'apprezzabile fluorescenza, ciò che probabilmente è in relazione al loro modo di esistenza che si svolge per lo più nell'oscurità o con luce poco intensa. Nei vegetali provvisti di cloroplasti e per i quali quindi l'azione della luce solare è indispensabile per la loro nutrizione, la presenza di sostanze fluorescenti nei tessuti assimilatori sembra costituire quasi una condizione normale della loro attività vitale. Così è molto interessante il fatto di aver potuto estrarre una notevole quantità di sostanza fluorescente da alghe unicellulari.

Nei riguardi dei possibili rapporti che sussistono forse fra la formazione della sostanza fluorescente e la luce, ho potuto confermare quanto era già stato trovato dal Petri, che cioè detta formazione avviene anche nelle piante eziolate e in organi sotterranei ma suscettibili d'inverdimento. Se ne deve quindi concludere che non è l'azione della luce che promuove la produzione di certe sostanze fluorescenti, ma che queste si formano di preferenza nei tessuti che devono o possono trovarsi esposti alla luce.

Contrariamente a quanto potevasi supporre, nei riguardi dell'eliofilia e ombrofilia di alcune piante non ho trovato un rapporto fra queste proprietà fisiologiche e la formazione di sostanze fluorescenti nelle foglie. Tanto nelle piante eliofile che in quelle ombrofile esistono rappresentanti forniti o privi di sostanze fluorescenti del tipo preso in considerazione nelle mie ricerche.

Non si può dunque in tutti i casi attribuire a queste sostanze la funzione protettiva contro le radiazioni attiniche della luce solare. Sembrerebbe

anzi, da alcune esperienze da me eseguite, che la presenza di sostanze fluorescenti nelle foglie rendano in queste più facilmente verificabile un'azione fotolitica nel citoplasma.

Il trifoglio, che dimostra un'elevatissima resistenza di fronte all'eccessiva intensità luminosa, contiene una minima quantità di una sostanza debolmente fluorescente e quindi in questo caso l'azione protettiva è affidata o ad altre sostanze o, più probabilmente, a un'elevata resistenza specifica del citoplasma insieme alla mancanza di particolari complessi fotodinamici, capaci di determinare una fotolisi. Le foglie di *Iris* e quelle di *Vitis vinifera*, che sono molto ricche di sostanza fluorescente, esposte alla luce ultravioletta, presentano più o meno estesi fenomeni di fotolisi, che si verificano anche, e più intensamente, nelle foglie di queste piante quando siano eziate e ricche egualmente di sostanze fluorescenti.

Circa la natura chimica di queste sostanze, estendendo le ricerche già iniziate dal Petri, ho sottoposto il campo di diffusione capillare dei succhi fogliari di varie piante a diverse reazioni che qui riporto: riducono il liquido del Fehling le sostanze fluorescenti di molte piante, fra le quali l'olivo, ligustro, siringa, vite; si colorisce in rosa, col reattivo di Lindt (per la reazione della floroglucina) l'alone fluorescente dei campi di diffusione capillare di alcune altre piante (*Cupressus torulosa*, *Narcissus odoratus*, *Citrus incana*), reazione costantemente negativa ha dato il liquido di Millon. Le sostanze fluorescenti prese in considerazione sono solubilissime in acqua a freddo, meno facilmente solubili in alcool e assai meno in etere.

Il campo di diffusione capillare del succo di foglie di olivo, oltre a ridurre il liquido di Fehling, dopo che è stata fatta l'estrazione delle sostanze tanniche con la polvere di pelle, dà una colorazione gialla con soluzione di potassa caustica e rossa con acido solforico, reazioni attribuibili all'oleuropeina, un glucoside facilmente idrolizzabile, affine alla siringina e scoperto da Bourquelot e Vintilesco nei rami, foglie e frutti dell'olivo. Il campo di diffusione capillare delle foglie della *Syringa vulgaris* si colorisce in *bleu*, tendente al violetto, con acido solforico, e in rosso con acido nitrico, reazioni che sono date dalla siringina.

Da questi saggi è lecito supporre che le sostanze fluorescenti da me esaminate sieno dei glucosidi e dei floroglucotannoidi così tanto diffusi nei diversi organi delle piante più diverse e specialmente nelle foglie.

Non si sapeva sino ad oggi, almeno da quanto mi risulta, che molti di questi glucosidi possedessero proprietà di fluorescenza simili a quelle dell'esculina.

Interessante è il fatto che la proprietà fluorogena del gruppo alcoolico o fenolico si conservi imm modificata di fronte all'azione del calore e di molti reagenti chimici, in modo che in quei casi nei quali dalle foglie o dai frutti che posseggono glucosidi fluorescenti, si fabbricano altri prodotti, in questi si possono ritrovare le proprietà fluorescenti dei succhi vegetali da

cui derivano. Sono in grado di completare a questo riguardo le ricerche di Reich e Haitinger ⁽¹⁾ sull'applicazione della luce ultravioletta al riconoscimento del vino di uva da quello di frutta, affermando che la sostanza fluorescente del vino è uguale a quella delle foglie e che si tratta di un glucoside.

Non posso escludere che la fluorescenza sia data in alcuni casi da derivati dell'antracene, che si trovano spesso nelle cellule vegetali combinati ai composti di natura glucosidica, come nelle leguminose, rhamnacee, rubiacee e nei licheni. Nei funghi superiori, come negli Agaricini, esistono dei pigmenti che sono fluorescenti e che appartengono al gruppo delle sostanze coloranti dell'antracene e dell'antrachinone.

Relativamente all'applicazione dell'analisi spettroscopica allo studio della fluorescenza di queste sostanze, non ho potuto avere sino ad ora dei risultati soddisfacenti, data la facile e quasi totale riflessione dei raggi ultravioletti (filtrati attraverso il filtro di Wood) sul campo di diffusione capillare, per cui si ottengono spettrogrammi quasi identici con sostanze fluorescenti diverse. Questo risultato negativo, che si deve in gran parte a imperfezione dei mezzi tecnici a mia disposizione, non è però tanto facilmente evitabile ed ho creduto opportuno di segnalarlo non avendo trovato nella letteratura, che sull'argomento ho potuto consultare, un accenno ad un simile inconveniente.

Nel proseguimento di queste ricerche sarà fatto ogni tentativo da parte mia per superare questa difficoltà.

(1) Cfr. « Allgemeine Wein-Zeitung », 1927, nn. 7 e 22, e « Sonderabdruck aus der Babofestschrift », Klosterneuburg, 1927.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1928 (Anno VI).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Fisica-Matematica. — *Sulla sufficienza delle equazioni differenziali della fisica-matematica.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. GIORGI.

1. — Walter Ritz, in una critica sottile contro i fondamenti maxwelliani e lorentziani della teoria dell'elettromagnetismo ⁽²⁾, ha sostenuto che le leggi dei fenomeni elettrici non possono trovare impostazione sufficiente nei sistemi di equazioni differenziali del campo. Egli osserva che sin da quando Lorentz ha stabilito la teoria elettronica della materia, il problema fondamentale della fisica, come da lui concepita, si riduce a calcolare il campo elettromagnetico attuale dovuto a una distribuzione di elettroni arbitrariamente data in tutto lo spazio per tutti i valori passati del tempo. Lorentz risolve questo problema, e dà le espressioni esplicite dei vettori del campo in funzione di tutti i valori passati delle coordinate e delle velocità degli elettroni; e per ottenere questo, parte bensì dalle equazioni differenziali del campo, ma poi fa uso esclusivo di certe note formole, integrali di esse, che contengono i potenziali ritardati. Ora questi integrali, che rappresentano onde divergenti dagli elettroni e irradianti verso l'infinito, non sono le soluzioni generali delle equazioni differenziali. Gli integrali generali contengono quattro termini: il primo è quello detto, il secondo rappresenta onde che provengono dall'infinito e convergono

(1) Presentata nella seduta del 2 aprile 1928.

(2) W. RITZ, *Recherches critiques sur l'électrodynamique générale*, « Annales de Chimie et de Physique », Série VIII, vol. XIII (1908) pp. 145-275; *Gesammelte Werke* (Paris, 1911) pp. 317-426; v. specialmente al § 3.

sugli elettroni (quindi potenziali anticipati invece che ritardati), il terzo comprende onde di entrambi i tipi, e il quarto corrisponde a onde che convergono o divergono nell'etere libero. Questa disparità fra la generalità delle equazioni e quella delle loro soluzioni fu ben riconosciuta da Lorentz e ha preoccupato altri fisici matematici insigni. Per limitare gli integrali al primo termine ed escludere quegli altri che non corrispondono alla realtà fisica, si è cercato di fare intervenire le condizioni di regolarità e di annullamento all'infinito. I tentativi di Wiechert, di Poincaré e di altri hanno però mostrato che queste condizioni addizionali non sono sufficienti.

Lo sviluppo ulteriore della teoria e dei metodi di calcolo dei fenomeni, da Lorentz in poi, è stato dedotto esclusivamente da quelle formole dei potenziali ritardati, senza più far menzione degli altri termini. Ma ciò, osserva Ritz, è quanto dire che le equazioni differenziali si sono dimostrate inadeguate come fondamenti della dottrina elettromagnetica, e che questa in realtà rimane basata solamente sugli integrali particolari. A questo ragionamento Ritz aggiunge l'osservazione che noi conosciamo le quantità fisiche del campo solamente nelle loro azioni sulla materia; e tutti i fenomeni osservati essendo movimenti di elettroni provocati da altri elettroni, basta, per tradurre i fatti in equazioni, esprimere le leggi integrali delle azioni a distanza (trasinesse però in un tempo finito) tra elettroni ed elettroni, cancellando dalla teoria qualunque nozione di etere, di campo, e di vettori elettrici e magnetici nello spazio libero.

2. — Non occorre qui ricordare come Ritz abbia tratto da queste riflessioni un argomento per giustificare la trasformazione sostanziale ulteriore da cui è nata la teoria balistica ⁽¹⁾. Anche senza fare questo passo ulteriore, il ragionamento di Ritz è grave di portata per la filosofia naturale. Esso nega ogni entità obbiettiva allo spazio-etere o campo in cui si propagano le azioni; e considera come non esistente nel mondo un'azione o un'energia emessa da un elemento di materia, fino a che essa non abbia raggiunto un altro elemento. Ciò è quanto dire che le cause avvenute ieri possono agire sul domani senza passare pel tramite dell'oggi. Lo stato attuale dell'universo non basterebbe per predire il suo avvenire.

Altrove, prendendo in esame il ragionamento di Ritz, in occasione di una critica alla teoria balistica ⁽²⁾, ho fatto rilevare che esso è troppo sottile, al punto che, come applicato alle radiazioni elettromagnetiche conduce a negare l'etere, così applicandolo ai fenomeni acustici condurrebbe a ne-

(1) Per notizie ulteriori a questo riguardo, v. la monografia molto accurata e condotta con acume critico, della D.ssa A. CABRAS, *Sulla teoria balistica della luce e delle radiazioni*, in corso di pubblicazione nelle « Memorie » di questa Accademia.

(2) G. GIORGI, *L'elettrodinamica di Ritz e la teoria balistica delle radiazioni*. Relazione presentata al Congresso Internazionale di Fisica tenuto a Como nel settembre 1927; v. vol. II dei « Rendiconti » di quel Congresso, pp. 277-298.

gare l'esistenza dell'aria; e ho mostrato che anche nella teoria balistica l'intervento dello spazio-etero come entità sostanziale non è eliminato. Ma questo è un ragionamento indiretto. Nel caso delle vibrazioni sonore noi sappiamo per altra via che lo stato perturbato del mezzo esiste, e che è correttamente espresso da equazioni differenziali che si riassumono in quella di D'Alembert:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Questa è la stessa a cui soddisfano le grandezze elettriche e magnetiche nell'etero libero. Nondimeno, tanto pel caso sonoro quanto per quello elettromagnetico, l'equazione d'alembertiana conduce a integrali troppo generali in confronto ai fatti reali che da essa si devono dedurre. Se il paragone fra i due fenomeni ci rassicura e ci fa restituire fiducia alle equazioni del campo e alla concezione delle perturbazioni propagate in un mezzo, la questione rimane nella fisica matematica in generale, e dobbiamo chiederci: — può la teoria matematica dei fenomeni fisici essere impostata su equazioni differenziali? Tutto l'indirizzo tradizionale nella trattazione teorica della fisica è qui in discussione. L'edificio classico della teoria è forse da rifare assoggettando la fisica macroscopica ad una trasformazione ben più profonda di quella che i fatti quantistici hanno imposto a quella microscopica?

3. — Per cercare una via di risoluzione al quesito, ho fermato l'attenzione al caso più semplice: quello di propagazione in una dimensione. Sia una corda vibrante, in cui valga l'equazione

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

La corda sia infinita nel senso delle x positive. Una perturbazione arbitraria venga impressa all'origine ($x = 0$): come si propaga attraverso alla corda?

Ho discusso il quesito, in tutta la sua generalità, per l'equazione con quattro termini, in altro mio lavoro ⁽¹⁾. Ho posto in rilievo che un problema fisico normale, e corrispondente ai quesiti che originano dalla pratica, si imposta prescrivendo i valori di U all'origine come funzione $U_0(t)$ arbitrariamente data per tutti i valori di t a partire da $t = -\infty$, e ricercando la $U(x, t)$ prodotta da quello stato arbitrario. Questa impostazione differisce da quella classica di Cauchy perchè contiene una funzione arbitraria e non due, e in una dimensione corrisponde, sotto certi rapporti, a quello che è il problema di determinare il campo prodotto dagli elettroni nello spazio. La mancanza della seconda funzione arbitraria di Cauchy nei

(1) *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo LII (1928), fascicolo secondo (in corso di stampa).

dati iniziali, è la circostanza che apre la via agli integrali più generali di cui Ritz ha lamentato l'apparizione.

Nel caso dell'equazione (2), le condizioni all'infinito non sono d'aiuto, perchè le onde non si smorzano a distanza; quindi senza necessità di analisi elevata acquistiamo la certezza che le condizioni classiche del tipo considerato da Lorentz, — cioè il dare semplicemente $U(x, t) = U_0(t)$ per $x = 0$, insieme con qualsivoglia vincolo di regolarità e di comportamento asintotico, — non bastano per determinare quella soluzione che pure fisicamente è ben caratterizzata dall'enunciato del problema. L'integrale più generale consentito da quelle condizioni matematiche contiene perturbazioni che si allontanano dell'origine verso l'infinito, e perturbazioni che dall'infinito vanno verso l'origine; per risolvere il problema fisico, soltanto le prime devono essere mantenute.

Nella detta Memoria ho integrato la famiglia delle equazioni a cui appartiene la (2) col metodo degli operatori funzionali; e allora le condizioni necessarie per determinare la soluzione sono venute nettamente in evidenza. Le soluzioni espresse coi detti operatori ammettono valutazioni multiple; e per scegliere quella che corrisponde al problema fisico bisogna far intervenire la *condizione di successione*, così enunciata: la causa deve precedere l'effetto. La $U(x, t)$ per ogni coppia di valori x, t , deve dipendere da tutti i valori di U_0 che corrispondono alle epoche antecedenti, non a quelle susseguenti all'istante considerato ⁽¹⁾.

La differenza tra il problema matematico impostato nella forma tradizionale e quello fisico enunciato ora, consiste in questo: nel secondo non ricerchiamo uno stato perturbato qualunque che sia *compatibile* con $U_0(t)$, cerchiamo invece quello che è *prodotto* da $U_0(t)$. La relazione tra causa ed effetto entra nell'enunciato, e deve essere tradotta in matematica, facendo intervenire la dipendenza fra anteriore e posteriore. Per quanto io sappia, una condizione funzionale come questa non è stata considerata nelle trattazioni consuete dei problemi differenziali, perchè i metodi della matematica classica non si prestano bene a tenerne conto. Col metodo degli operatori funzionali, essa si traduce nella seguente: la valutazione di ogni operatore con la formola generale ⁽²⁾:

$$(3) \quad f\left(\frac{d}{dt}\right)F(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\alpha = 0 \\ T = \infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-T}^{+T} Q(\alpha, \omega) f(\omega) \frac{e^{\omega t}}{e^{\omega \tau}} F(\tau) d\tau$$

(1) Questa condizione è stata poi ritrovata da Wiener, che non aveva conoscenza dei miei lavori del 1905 sugli operatori funzionali, e che ha denominato operatori *retrospettivi* quelli che soddisfano alla condizione medesima. Veggasi N. WIENER, *The operational Calculus*, in «Mathematische Annalen», Bd. 95 (1926) pp. 557-584.

(2) Cfr. la citata Memoria nel «Circolo Matematico di Palermo», formola (3); e il mio lavoro *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate da problemi di elettrodinamica* «Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana», vol. IX (1905), pp. 651-699, Art. 20, form. (27).

deve essere fatta scegliendo come percorso d'integrazione nel piano della variabile complessa ω una linea che vada da $\omega \rightarrow -i\infty$ sino a $\omega \rightarrow +i\infty$ lasciando a sinistra i punti singolari al finito di $f(\omega)$. La formola (3) per la sua stessa struttura impone una scelta nel cammino d'integrazione, e allora l'intervento della condizione di successione si presenta naturale. Dall'applicazione che ho fatta agli integrali di propagazione risulta che essa condizione vale come l'imposizione di una delle funzioni arbitrarie tipo Cauchy.

4. — Nel problema degli elettroni, come in quello delle onde sonore nello spazio, le circostanze si presentano del tutto analoghe. È superfluo fare intervenire le condizioni all'infinito; forse appunto il richiamo a queste è ciò che ha condotto su falsa strada. Deve invece anche qui ricordarsi che noi non cerchiamo uno stato perturbato qualunque che soddisfi alle equazioni differenziali del campo e sia compatibile con la funzione $\rho(x, y, z, t)$ che esprime la distribuzione elettronica data nello spazio e nel tempo; cerchiamo invece quel particolare stato che è *prodotto* dalla stessa distribuzione. Esso stato deve soddisfare alla condizione di successione; e questa quando è considerata in congiunzione con la struttura lineare delle equazioni del campo, porta con sé, (notiamo per incidente) anche la dipendenza di carattere additivo. Ne segue questo corollario: quando $\rho(x, y, z, t)$ è nulla in tutto lo spazio e per tutti i valori di t anteriori a una certa epoca t_0 , risulta nullo il campo cercato, in tutto lo spazio, per $t = t_0$.

Il corollario così ottenuto esclude il termine quarto di Ritz (onde che convergono e divergono nello spazio vuoto da materia); il semplice enunciato della condizione di successione esclude il termine secondo (onde convergenti sulla materia); l'uno e l'altro insieme escludono il termine terzo (onde di tipo combinato). Resta solo il primo termine, che è quello che si deve conservare.

Le onde convergenti che Ritz segnala come una conseguenza delle equazioni differenziali contraria alla realtà, non sono fisicamente impossibili. Si possono generare onde che partendo dalla superficie interna di una sfera vadano a convergere su un elettrone collocato al centro, e determinino il suo stato di moto. Lasciando invece vuoto il centro si hanno onde che, proseguendo al di là, divergono da un punto dello spazio libero; e se la sfera materiale viene rimossa in questo tempo, queste onde proseguono irradando verso l'infinito. Le une e le altre sono semplicemente contrarie all'enunciato del problema che Lorentz e Ritz considerano.

5. — Ricordiamo che, proseguendo la sua critica, Ritz l'ha presentata anche sotto un altro aspetto: le equazioni differenziali del campo sono reversibili; quindi, egli osserva, non possono descrivere adeguatamente fenomeni che soddisfano al secondo principio della termodinamica, e che quindi

sono irreversibili e incompatibili con qualunque moto perpetuo. La risposta è contenuta nella condizione di successione; in effetto, tenendo conto di questa condizione, il moto perpetuo resta escluso, perchè le onde divergenti che rimangono come unico termine della soluzione dissipano l'energia convogliandola verso l'infinito senza termini che producano compenso.

Ricordiamo ancora che Lorentz ha espresso un'idea che si avvicina al nostro punto di vista, e ha intuito la verità quando, come argomento per conservare solo i termini coi potenziali ritardati, ha detto « Escluderemo tutte le altre onde dalla teoria, ammettendo una volta per sempre che soltanto gli elementi carichi siano punti di partenza delle perturbazioni. Escluderemo pure tutti quegli stati della materia che sono completamente indipendenti dalla materia carica. Ammetteremo che se quest'ultima non esistesse, l'etere resterebbe costantemente in riposo ». Queste formulazioni non sono precise, e, come ha mostrato Ritz, non conducono a un enunciato matematico sufficiente per precisare il risultato. La condizione di successione le include tutte e le completa.

Un altro enunciato fisico è stato poi collegato da Ritz al problema che qui ci preoccupa, e alla questione dell'irreversibilità, quando egli ha ricordato che « ... le regioni remote dello spazio e inaccessibili all'esperienza intervengono nelle ipotesi in modo preponderante: se ci conducessero onde convergenti, i nostri ragionamenti, che tengono conto solo delle cause agenti nelle regioni vicine, non darebbero nemmeno un'approssimazione grossolana. Ma fortunatamente sappiamo *a priori*, per una lunga esperienza, che le onde lontane divergono, e questo ci permette di trascarle senza dimostrazione ». Ma il legame fra queste diverse questioni non sussiste. Oggi è conosciuto che esiste una radiazione cosmica, la quale può anche essere proveniente da regioni remote, può essere convergente o divergente, e può essere anche intensa, senza che il problema di trovare quel particolare campo che è dovuto a particolari cariche ne venga influenzato.

6. — *In conclusione:* La critica rivolta da Ritz alla fondazione della teoria elettromagnetica sopra equazioni differenziali di campo rimane confutata.

Nell'impostazione classica dei problemi di fisica matematica, l'insufficienza non era nelle equazioni differenziali, ma nelle condizioni accessorie. Basta modificare queste, e in luogo di una delle condizioni tipo Cauchy, o delle condizioni all'infinito, introdurre la condizione funzionale che equivale a quella di successione, per ottenere che gli integrali restino determinati dai dati che si presentano di consueto nei problemi effettivi.

Elettrotecnica. — *Misura delle dissipazioni locali di energia entro una parte circoscritta del circuito magnetico.* Nota II ⁽¹⁾ del Corrisp. L. Lombardi e di P. LOMBARDI.

DISPOSITIVI SPERIMENTALI.

In una precedente Nota ⁽²⁾ fu esposta la teoria di un nuovo dispositivo wattometrico per la misura dell'energia dissipata entro una parte circoscritta del circuito magnetico, nel quale si utilizzano due avvolgimenti indotti, rispettivamente collegati alle due spirali di un elettrocinamometro, e destinati uno alla misura del flusso principale e l'altro a quella della forza magnetomotrice impiegata a mantenerlo nel tronco considerato.

Nell'Istituto Elettrotecnico della R. Scuola di Ingegneria di Roma, durante il mese di giugno, vennero apparecchiati i mezzi per la verifica del metodo ⁽³⁾, dei quali, per l'interesse che potranno offrire in ricerche analoghe, viene qui data una sommaria descrizione, riservando ad una Nota ulteriore la comunicazione dei risultati ottenuti.

La principale difficoltà, prevista nell'enunciato della teoria, era di poter disporre di un elettrocinamometro così sensibile, da permettere la misura sopra campioni di materiale magnetico non eccessivamente voluminosi, senza che la resistenza della spirale accoppiata al condensatore nel primo circuito, e la reattanza di quella inclusa nel secondo, di fronte alle rispettive reattanza e resistenza complessive assumessero grandezze tali, da modificare apprezzabilmente la differenza di fase tra le correnti in essi circolanti. Questa difficoltà si è vinta peraltro agevolmente mediante l'impiego di un elettrocinamometro a riflessione della Ditta Allocchio & Bacchini, del quale le due spirali fisse hanno resistenza complessiva a 30° di 90 ohm ed una induttanza di 0.061 henry, e l'unica spirale mobile ha la resistenza di 170 ohm ed una induttanza di 0.0107 henry. Il filo di cui sono costituite le prime può portare una corrente di alcuni decimi di ampere; quello della seconda è previsto per pochi centesimi. Uno stretto involucro di celluloidi racchiude interamente la spirale mobile, e fornisce un adeguato smorzamento ad aria. La taratura dell'apparecchio venne eseguita con corrente alternata di 45 periodi a 1'', per evitare l'influenza del campo magnetico terrestre, collegando in serie le spire fisse e mobili, e calcolando la intensità in base alla diffe-

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1928.

(2) « Rendiconti » dell'Accademia, vol. VII, fasc. 12, 1° sem. 1928, p. 962.

(3) L'organizzazione della parte sperimentale venne essenzialmente affidata all'insegnante di misure elettriche, ing. Paolo Lombardi.

renza di potenziale applicata ed alla resistenza del circuito, di fronte alla quale, per l'ordine di grandezza adottato (fra 5000 e 10000 ohm) la reattanza esercitava un'azione del tutto trascurabile.

La costante amperometrica, la quale si rivela perfettamente inalterata per tutte le deviazioni comprese nell'intervallo della scala, con riferimento ad ogni divisione di questa è risultata alla temperatura di 30°:

$$A = \frac{\delta}{I^2} = 2.86 \times 10^7.$$

Entro questo medesimo intervallo l'effetto di ripulsione, dovuto alle massime correnti sopportabili da una delle spirali in presenza dell'altra, chiusa in corto circuito, è risultato trascurabile.

La spirale piatta per la misura della tensione magnetica, secondo le indicazioni di Rogowski, venne eseguita al tornio sopra due nastri gemelli di fibra dello spessore di circa 2 mm. e della larghezza di circa 32, lunghi 96 cm. avvolgendovi quattro strati di filo di rame del diametro di 0.4 mm. isolato in cotone, con interposizione di sottili striscie di carta per conservare la perfetta uniformità dell'avvolgimento, e renderne più facili i piccoli scorrimenti relativi all'atto della curvatura del sistema. Risultarono così in complesso 48 spire per ogni centimetro di lunghezza, della superficie media di circa 3.6 cmq. La costante di Rogowski, che misura la superficie complessiva delle spire per ogni centimetro di lunghezza, venne una prima volta accuratamente determinata col metodo da lui stesso indicato, concatenando la spirale in esame con un'altra, avente un numero conosciuto di spire, e invertendo in questa una corrente di nota intensità; e una seconda disponendo tutta la spirale all'asse di un lungo solenoide, atto a fornire un campo quasi perfettamente uniforme, di cui parimenti si invertiva la direzione mentre la spirale era collegata a un galvanometro balistico, opportunamente tarato mediante un campione di mutua induzione. Il valore medio trovato con le due misure, fra loro concordanti a meno di 1 %, fu di 175 cmq. La resistenza ohmica della spirale è risultata a 25° di 61 ohm; la induttanza, misurata col ponte di Anderson nella posizione stessa in cui l'apparecchio venne utilizzato durante le esperienze, fu di 0.0095 henry, laddove il valore calcolato in base alla costante di Rogowski risulterebbe dell'ordine di 0.0102 prescindendo dalla influenza delle estremità, per cui i due valori si controllano bene a vicenda.

Il campione, sul quale si volevano eseguire le misure, era costituito da uno dei quattro pacchi di lamiera normali di ferro legato forniti dalla casa Siemens unitamente all'apparecchio di Epstein, destinato alle prove dei ferri industriali, e perfettamente analogo a quello utilizzato allo stesso scopo dal prof. Rogowski nel suo terzo lavoro già citato ⁽¹⁾. L'apparecchio è co-

(1) « Archiv für Elektrotechnik », vol. IV, 1916, fasc. 9.

stituito di quattro spirali primarie, lunghe 43 cm. e composte ognuna di 150 spire della complessiva resistenza di 0.1 ohm e induttanza di 0.7 milihenry. Coassialmente ad ognuna di esse è disposta una spirale analoga, composta di altrettante spire di filo più sottile, della resistenza di 0.8 ohm; queste spirali sono destinate ad alimentare la spirale voltometrica del wattometro, per evitare la necessità della correzione dovuta nei modelli più antichi alla resistenza delle spirali primarie, e sono perfettamente adatte nel nostro caso per la misura del flusso principale. I quattro pacchi sono costituiti di lamiere di ferro legato della larghezza di 30 mm., della lunghezza di 500 mm. e dello spessore di 0.5 mm. separate da fogli di carta seta, e ritenute in fascio prismatico mediante nastro isolante. Quando essi sono collocati in posto, e fortemente stretti mediante gli appositi bulloni, costituiscono un circuito magnetico di sezione costante, la cui riluttanza si accresce in misura limitata per la presenza dei giunti, ma la cui magnetizzazione, in grazia di opportuna distribuzione delle spire primarie, risulta sensibilmente uniforme, con che si rende possibile nel modo più semplice la determinazione della cifra di perdita in relazione ai valori normali della frequenza e della induzione, prescritti per le prove. Poichè ognuno dei pacchi ha il peso di 2.5 kg. ed una cifra normale di perdita assai modesta, tenuto conto della sensibilità limitata dell'elettrodinamometro si palesò la convenienza di operare ad una frequenza relativamente alta, per ottenere deviazioni bene apprezzabili nell'intervallo di magnetizzazione che più interessa nella pratica, sopra e sotto il ginocchio di massima permeabilità.

Nelle considerazioni poste a base della teoria si è già vista la importanza di realizzare nella tensione applicata alle spirali magnetizzanti una forma quasi perfettamente sinusoidale, affinchè assuma questa stessa forma anche la variazione del flusso, e le armoniche superiori, che inevitabilmente si manifestano nella forza magnetomotrice al crescere della saturazione, risultino senza effetto nella misura wattometrica.

A questa condizione non soddisfacevano perfettamente le principali sorgenti a nostra disposizione; non la rete di distribuzione cittadina, che risente marcatamente le armoniche di f. e. m. dovute a una parte degli alternatori di vecchio tipo, oltre di che è alimentata alla frequenza troppo bassa di 45 periodi per 1"; non un vecchio alternatore a otto poli della casa Siemens coll'indotto a disco, privo di ferro, che fornisce a piccolo carico una f. e. m. abbastanza regolare, ma, al crescere di questo, subisce troppo fortemente gli effetti della reazione, e non poteva, nel caso nostro, azionarsi a frequenza superiore a 55 periodi per 1"; non una convertitrice trifase della Società Elettromeccanica Lombarda, che è di tipo perfettamente moderno a quattro poli, ma non può fornire una frequenza superiore a una cinquantina di periodi, e, sebbene pel tipo del suo avvolgimento a distribuzione continua fornisca una curva di f. e. m. molto prossima alla sinusoidale, risente tuttavia le armoniche elevate dovute ai denti; non finalmente un al-

ternatore trifase del Tecnomasio Italiano, che può azionarsi con motore a corrente continua alla frequenza di 60 periodi per 1'', ed è avvolto a stella, in modo da non risentire fra i morsetti di fase l'influenza delle armoniche 3^a e 9^a, ma per la potenza limitata subisce a sua volta un'apprezzabile reazione da parte delle correnti erogate, onde la curva della sua tensione concatenata si va gradualmente deformando.

Posti nel bivio di eseguire le misure con tensione non perfettamente sinusoidale, senza correggere in alcun modo la forma della forza magnetomotrice, ovvero di eliminare, per quanto era possibile, le irregolarità di questa, lasciando gradualmente accentuare le deformazioni della curva del flusso, dopo ripetute indagini preliminari abbiamo adottato questo secondo ripiego, e deciso di alimentare il circuito magnetizzante con la tensione concatenata dell'alternatore del Tecnomasio, che fornisce la frequenza e tensione più elevata; includendo però nel circuito una reattanza induttiva abbastanza forte, da attenuare nella maggiore misura le armoniche superiori della corrente.

Gli oscillogrammi rilevati, che non possono trovare spazio in questa Nota riassuntiva ⁽¹⁾, hanno bene confermato la possibilità di raggiungere per questa via il nostro scopo, atteso che con la inclusione di 0.04 henry, che alla frequenza 60 offrono una reattanza di 30 ohm con una resistenza poco superiore a 2 ohm, la corrente assorbita dall'apparecchio Epstein nell'intervallo inferiore al ginocchio di massima permeabilità risulta quasi perfettamente sinusoidale, e la deformazione si inizia solo col progredire della saturazione, senza che si rendano manifeste armoniche superiori di ordine molto elevato. Queste si palesano bensì nella curva di variazione del flusso, e sotto questo riguardo le considerazioni teoriche già svolte potrebbero indurre nel concetto che fosse più appropriato il collegamento della spirale flussometrica con una opportuna resistenza ohmica, e quello della spirale Rogowski col condensatore.

Salvochè una breve riflessione conduce ad un risultato opposto, atteso che la spirale Rogowski, impiegata a misurare tensioni magnetiche di poche centinaia di amperfilì, fornisce tensioni elettriche di pochi centesimi di volt, mediante le quali non è agevole ottenere correnti di carica adeguate con condensatori ad aria ovvero a mica, i quali soli hanno un angolo trascurabile di ritardo per imperfetta polarizzazione.

A controbilanciare l'esiguità di tali correnti sorgerebbe la necessità di attingere correnti relativamente elevate della spirale flussometrica, limitando la resistenza nel suo circuito; ma si avrebbe l'inconveniente di creare una sensibile reazione nel circuito magnetico, e di accentuare gli errori di fase dovuti alla reattanza di induzione.

Per queste considerazioni in tutte le misure definitive abbiamo dato la preferenza al collegamento del condensatore in serie con la spirale flusso-

(1) Verranno pubblicati in una Memoria più ampia in « Archiv für Elektrotechnik ».

metrica dell'apparecchio Epstein e con quella fissa dell'elettrodinamometro, che può sopportare le correnti più elevate, ed abbiamo sempre collegato in serie la spirale Rogowski con quella mobile dell'elettrodinamometro e con una resistenza supplementare, adatta a compensare gli errori inevitabili di fase di entrambi i circuiti.

È difatti chiaro che la presenza di resistenza ohmica nel circuito del condensatore, e l'eventuale ritardo di polarizzazione del dielettrico, hanno entrambi per effetto di diminuire l'angolo, di cui la corrente relativa è spostata in avanti rispetto alla f. e. m., e l'errore corrispondente potrebbe calcolarsi per ogni misura, a somiglianza di quanto si fa per la influenza della reattanza della spirale voltometrica nelle misure wattometriche. Non altrimenti la presenza della reattanza nel circuito della spirale Rogowski ha per effetto di ritardarne la corrente indotta rispetto alla f. e. m., che in questo caso si utilizza per la misura della tensione magnetica.

I due errori si manifestano fortunatamente nel medesimo senso trigonometrico, onde sulla misura wattometrica influisce la loro semplice differenza, e questa può con grande vantaggio annullarsi, proporzionando convenientemente le resistenze ohmiche dell'uno e dell'altro circuito. A chiarire l'ordine delle grandezze che qui intervengono, basterà ricordare che la maggior parte delle nostre misure venne eseguita con un condensatore di precisione a mica della casa Tinsley, di cui venne variata la capacità da 0.5 ad 1 microfarad, con che la reattanza di capacità alla frequenza di 60 periodi variava da 5320 a 2660 ohm, e le correnti assorbite sotto le tensioni di 10 a 40 volt risultavano comprese fra 2 e 15 millesimi di ampere; queste non potevano pertanto reagire in misura apprezzabile sul circuito magnetico, nè causare nella resistenza elettrica alcuna apprezzabile dissipazione di energia. Ora, peraltro, la resistenza elettrica si riduceva con grande approssimazione a quella della spirale fissa dell'elettrodinamometro, ossia all'ordine di 90 ohm, e la reattanza di induzione della stessa spirale era dell'ordine di 23 ohm; quella della spirale flussometrica, calcolata in presenza del nucleo di ferro, tenendone a base la permeabilità differenziale nell'intervallo medio delle misure, non eccedeva 15 ohm; così la reattanza totale d'induzione, pari ad una quarantina di ohm, si sottraeva da quella di capacità, lasciando sussistere una reattanza risultante dell'ordine di 5280 a 2620 ohm, di fronte a cui la resistenza complessiva non eccedeva 1.7 a 3.4 % e poteva occasionare uno spostamento di fase di 1° a 2°. Di fronte a questo non è senz'altro da ritenersi interamente trascurabile l'errore di fase dovuto alla polarizzazione imperfetta della mica, che può salire a parecchi minuti primi; ma l'ordine di grandezza non ne risulta grandemente alterato, e può perfettamente compensarsi mediante la inclusione di una adatta resistenza ohmica nel circuito della spirale Rogowski e di quella mobile dell'elettrodinamometro. Queste in verità posseggono globalmente una induttanza dell'ordine di 0.02 henry, cui alla frequenza 60 corrisponde una reattanza di 7.5 ohm,

e per fornire quegli stessi spostamenti di fase hanno bisogno di una resistenza di 440 a 220 ohm. Quest'ultima è di poco inferiore alla somma delle resistenze delle spirali accoppiate, per cui la compensazione può realizzarsi senza resistenza supplementare, diminuendo leggermente sotto $1 \mu F$ la capacità; la prima può realizzarsi con un supplemento di circa 200 ohm.

Riconosciuta la esattezza del principio, fu d'altronde agevole ottenere sperimentalmente la condizione di compensazione, alimentando il circuito della spirale mobile e di quella Rogowski, allontanata dalla sua sede, mediante una f. e. m. di fase identica a quella della spirale flussometrica, ottenuta da una spirale ausiliaria avvolta sul medesimo nucleo di ferro, e regolando la resistenza supplementare in modo che la deviazione dell'elettrodinamometro, mentre la spirale fissa era alimentata dalla corrente flussometrica attraverso al condensatore, risultasse annullata. Impiegando a produrre quella corrente ausiliaria una decina di spire, che coi valori medi della induzione fornivano una f. e. m. in fase con la secondaria di 1 a 2 volt, la intensità della corrente nella spirale mobile raggiungeva parecchi millesimi di ampere, e la sensibilità del metodo permetteva di verificare la quadratura con l'approssimazione di alcune unità (di resistenza) per mille.

In tali condizioni era anche facile accertare l'influenza della reattanza della spirale flussometrica, variabile con la permeabilità differenziale del nucleo nei diversi intervalli della magnetizzazione, e adottare per ogni serie di misure il valore della resistenza, che meglio corrispondeva alla compensazione nelle condizioni medie. Il metodo potrebbe applicarsi, se non con grande approssimazione, almeno con notevole speditezza, per determinare l'angolo di perdita dei condensatori di tipo meno perfetto, e dei cavi industriali.

Chimica. — *Sopra le scissioni di alcuni acidi solfoidrossamici*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del Socio A. ANGELI, D. BIGIAVI e ZWI JOLLES.

Nel corso di alcune ricerche sopra le scissioni che possono subire i prodotti della forma:

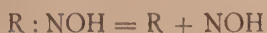


nei quali l'atomo di azoto è unito direttamente allo zolfo oppure all'azoto, abbiamo notati alcuni fatti che se da un lato servono a dar ragione di alcune eccezioni che vennero poste in rilievo, dall'altro rettificano alcuni dati che erano stati trovati da altri sperimentatori.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università degli Studi di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1928.

Come è noto, queste sostanze in presenza di alcali cedono con grande facilità il nitrossile:



il quale ha grande tendenza a polimerizzarsi per dare acido iponitroso e successivamente protossido di azoto:

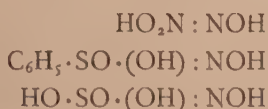


oppure a sommarsi, in modo più o meno rapido, con alcuni composti come, p. es., le aldeidi ovvero i nitrosoderivati; nel primo caso si formano acidi idrossammici:



La velocità di questa addizione è in stretta relazione con la struttura delle sostanze che si pongono a reagire.

Finora queste reazioni sono state studiate soprattutto nel caso dei sali dei composti:



i quali presentano una grande rassomiglianza nel comportamento: tutti infatti cedono nitrossile e poi danno origine all'acido iponitroso.

Vennero invece riscontrate alcune differenze nel comportamento rispetto alle aldeidi: a questo riguardo il compianto dott. F. Raschig⁽¹⁾ fa notare che impiegando l'idrossilammminsolfonato sodico e benzaldeide, la ricerca dell'acido idrossammico (colorazione violetta con cloruro ferrico) non riesce bene, perchè, secondo l'autore, per effettuare la scissione:



è necessaria la presenza di una grande quantità di alcali non solo, ma altresì bisogna operare alla temperatura di 70°.

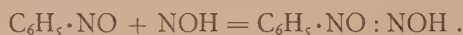
Noi abbiamo potuto confermare l'osservazione di Raschig circa il risultato della reazione, ma d'altra parte non siamo d'accordo con lui sopra le cause.

Si è veduto infatti che nella scissione si pone in libertà solfito sodico; e siccome per la ricerca dell'acido idrossammico che eventualmente si è formato, è necessario aggiungere alcune gocce di cloruro ferrico, si comprende subito che in queste condizioni il sale ferrico viene immediatamente ridotto a sale ferroso, che non fornisce più la caratteristica colorazione vio-

(1) RASCHIG, *Schwefel und Stickstoffstudien*, p. 89.

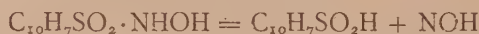
letta. Inoltre abbiamo potuto constatare che anche per aggiunta di solfito alle soluzioni violette di acidi idrossammici e cloruro ferrico, la colorazione va man mano scomparendo ed infine si ha un liquido perfettamente incolore, il quale solamente dopo lungo contatto con l'aria va riprendendo una tinta violacea.

Anche l'altra asserzione del dott. Raschig, che riguarda la temperatura di scissione, non corrisponde alla realtà. Invece di operare con le aldeidi, noi abbiamo impiegato il nitrosobenzolo ed abbiamo potuto constatare che la reazione si compie con grande rapidità anche a bassa temperatura; siccome in questo caso i solfiti e quindi l'acido solforoso, non alterano i prodotti che si sono formati, acidificando il liquido ed estraendo con etere si ricava subito la nitrosufenilidrossilammina purissima che si è formata per addizione del nitrossile al nitrosobenzolo:



Un'altra rettifica la dobbiamo fare a proposito dei prodotti che si formano nel caso di una scissione analoga che venne osservata molti anni or sono ⁽¹⁾ impiegando gli acidi naftalinsolfoidrossammici.

Anche queste sostanze, per azione degli alcali, si decompongono nell'identico modo:



in acido naftalinsolfonico e nitrossile.

Nella letteratura di quel tempo ai due acidi naftalinsolfonici venivano assegnati i punti di fusione:

Acido α -naftalinsolfonico	p. f. 84°
» β -naftalinsolfonico	» 103°

e siccome il prodotto di partenza era sicuramente acido α -naftalinsolfonico, dal quale per le successive trasformazioni si arrivava ad un'acido naftalinsolfonico che fondeva a 103°, se ne dedusse che durante l'azione degli alcali sopra l'acido α -naftalinsolfoidrossammico doveva avvenire una migrazione del residuo solforato dalla posizione α a quella β .

Alcuni anni or sono Hinsberg ⁽²⁾ ha avuto occasione di preparare acido α -naftalinsolfonico allo stato di grande purezza ed ha potuto constatare che il prodotto da lui ottenuto, contrariamente a tutti i dati riferiti dalla letteratura, fondeva a 103°.

Questo fatto ci ha indotti a ripetere le antiche esperienze ed i nuovi risultati, in buona armonia con i dati a cui è pervenuto Hinsberg, ci hanno

(1) ANGELI, ANGELICO, SCURTI, « Gazz. Chim. Ital. », 33 (1903), II, 296.

(2) « Ber. », 50 (1917), 472 nota.

riconfermato il numero allora trovato riguardo al punto di fusione dell'acido solfinico ottenuto, ed hanno posto in evidenza che nella scissione si forma realmente acido α -naftalinsolfinico; la sconcordanza dei dati riferiti dalla letteratura è dovuta alla grande facilità con cui si alterano gli acidi solfinici, e tale fatto rende oltremodo difficile il pervenire a prodotti puri.

DATI SPERIMENTALI.

I. *Reazione del nitrosobenzolo con sale sodico dell'acido idrossilamminsolfinico.* — Gr. 0.5 di nitrosobenzolo si sciolgono a caldo in 10 cc. di alcool; si aggiunge a temperatura ordinaria gr. 1 del sale sodico di acido idrossilamminsolfinico, successivamente 5 cc. di acqua e poi goccia a goccia idrato sodico concentrato fino a reazione nettamente alcalina. Il liquido perde rapidamente la colorazione verde per passare a un rosso intenso non molto stabile, che tosto vira ad un giallo bruno. Si diluisce con acqua e quindi si estrae con etere. Il liquido acquoso limpido si acidifica con H_2SO_4 diluito in presenza di etere; l'etere si colora in giallo chiaro e su vetro da orologio separa cristalli lucenti bianchi di nitrosufenilidrossilammina che fondono a 59° decomponendosi con vivace sviluppo di gas intorno a 90° .

II. *Acido α -naftalinsolfoidrossammico.* — Gr. 4.2 di sodio sciolti in 60 cc. di alcool assoluto, si aggiungono ad una soluzione acquosa di 13 grammi $NH_2OH \cdot HCl$. Si filtra il cloruro sodico formatosi, si aggiungono ancora 60 cc. di alcool assoluto e poi poco a poco gr. 12.8 di cloruro dell'acido α -naftalinsolfonico. Si svapora il liquido; il residuo si estrae ripetutamente con etere. L'estratto eterico, dopo distillazione del solvente si presenta come un olio denso che si rapprende in una massa cristallina di acido α -naftalinsolfoidrossammico. Da acqua, in cui è poco solubile anche a caldo, si separa sotto forma di lamine sottili madreperlacee, fondenti a 153° con decomposizione. (N % trovato 6.06; per $C_{10}H_9O_3NS$ N % calcolato 6.27).

Azione degli alcali: gr. 0.5 di acido, sospesi in pochi cc. di acqua, per aggiunta di alcune gocce di idrato potassico passano in soluzione con una colorazione gialla intensa del liquido con contemporaneo sviluppo di gas. Si concentra la soluzione, si riprende con poca acqua e poi si aggiunge lentamente H_2SO_4 diluito: fiocchetti cristallini biancastri di acido α -naftalinsolfinico (gr. 0.4). Dall'acqua cristallizza in aghetti fini che fondono a 98° (misto con campione id.). Con H_2SO_4 conc. dà una intensa colorazione azzurra fugace. (S % trovato 16.15; per $C_{10}H_8O_2S$ S % calcolato 16.69).

III. *Acido β -naftalinsolfoidrossammico.* — Si eseguisce la preparazione nello stesso modo come per l' α , impiegando però invece di α il cloruro dell'acido β -naftalinsolfonico. L'estratto eterico, dopo svaporamento del solvente, contiene acido β -naftalinsolfoidrossammico, il quale a differenza dell' α si ha subito in minuti cristallini bianchi. Da acqua, in cui è molto meno solubile dell' α , cristallizza in squame lucenti simili a quelle dell' α , che fon-

dono a 153° con decomposizione. Il p. f. misto dei due idrossammici: la massa rammollisce a 143° e fonde a 146° con debole decomposizione. Tanto l' α che il β -idrossammico non si colorano con acido solforico concentrato. (N % trovato 6.07; S % trovato 14.69; per $C_{10}H_9O_3NS$ N % calcolato 6.27; S % calcolato 14.70).

L'acido β -naftalinsolfoidrossammico, scaldato per 10' con eccesso di anidride acetica, dà un diacetilderivato. Da ligroina, in cui è poco solubile anche a caldo, si separa in cristallini candidi, aggruppati a forma di stelle che fondono a 89° . (N % trovato 4.51; per $C_{14}H_{13}O_5NS$ N % calcolato 4.56).

Reazioni dell'acido β -naftalinsolfoidrossammico:

a) *Azione degli alcali.* Gr. 0.5 di acido si trattano in capsula con poca acqua e qualche goccia di idrato sodico. La sostanza che aveva l'aspetto della naftalina, si va lentamente trasformando in una più compatta e granulosa, il sale sodico; ma a differenza dell' α , non ingiallisce e non dà sviluppo gassoso. Occorre scaldare verso 60° perchè rapidamente il sale si scioglia nel liquido che assume una tinta gialla e si ha sviluppo di gas. Si concentra, si riprende il sale con poca acqua calda (a freddo si separa il sale dell'acido solfinico in squame madreperlacee) e si acidifica con H_2SO_4 diluito: si separa l'acido β -naftalinsolfinico. Dall'etere si ha in minuti cristallini bianchi fondenti a 103° (p. f. misto con campione id.); con H_2SO_4 concentrato si colora in verde sporco.

b) *Reazione con nitrosobenzolo.* Si aggiunge l'acido β (gr. 0.65) ad una soluzione alcolica di gr. 0.31 di nitrosobenzolo; si versa poi una soluzione acquoso-alcolica di gr. 0.1 di sodio. Il liquido passa subito da una tinta verde a gialla. Si svapora e si diluisce poi con acqua. Con $BaCl_2$ precipitato fioccoso biancastro costituito dai sali del β -solfinico e della nitrosofenilidrossilammina. Il precipitato, sospeso in acqua, si acidifica quanto basta con HCl diluito e si opera come segue: 1° per separare la nitrosofenilidrossilammina, si agita il liquido con etere di petrolio, che, dopo svaporamento, separa questa sotto forma di cristallini aghiiformi bianchi fondenti a 59° e che a 75° - 80° danno tumultuoso sviluppo di gas; 2° successivamente si estrae il liquido acido con etere; dopo distillazione del solvente, rimane l'acido β -naftalinsolfinico, che si identifica nel modo che è detto sopra.

Chimica-fisica. — *La fusibilità degli elementi e il numero elettronico.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. P. VINASSA.

Si afferma comunemente che la fusibilità degli elementi è una funzione periodica del peso atomico. Non si può però negare che sussistano numerose irregolarità, come ad esempio quella dei tre corpi Cu, Ag e Au; quella dei metalli alcalini ecc.

Nè minori irregolarità si notano nelle rappresentazioni della fusibilità in rapporto al volume atomico ⁽²⁾.

Occorreva dunque tentare una nuova via che rendesse possibile una maggior regolarità nella rappresentazione dell'importantissimo fenomeno della fusione.

Il pensiero che mi ha guidato in questa ricerca è ancora quello da me ripetutamente espresso, e cioè che il peso atomico, riferendosi al nucleo, ci dà un concetto prevalentemente statico, mentre il numero elettronico (che in questo caso è anche il numero atomico) è quello che deve avere maggiore importanza nei fatti fisici, ai quali in modo speciale prendono parte gli elettroni periferici e non il nucleo positivo. Pertanto la fusibilità di un corpo dovrà essere in rapporto con tali elettroni più che col nucleo. Se effettivamente sussiste un rapporto tra il numero elettronico degli elementi e la temperatura assoluta di fusione si dovrebbe avere un numero semplice della relazione $T_f : N_e$; indicandosi con T_f la temperatura di fusione e con N_e il numero elettronico dell'elemento.

Chiamiamo coefficiente di fusione ϵ il numero derivante dalla relazione:

$$\frac{T_f}{N_e} = \epsilon .$$

Il corpo che ha la massima semplicità nella sua simmetria ed è il primo che abbia un numero elettronico significativo è l'He = 2. Deve sussistere una relazione semplice per questo corpo: e difatti si ha:

$$\frac{T_f}{N_e} = \frac{1^{\circ}}{2} = 0.5 .$$

Questo numero 0.5 dovrà dunque essere come l'unità di misura per tutti quanti gli elementi.

Ebbene, risulta che: *tutti gli elementi presentano un coefficiente di fusione ϵ , il quale è un multiplo esatto di 0.5.*

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1928.

(2) Vedasi ad esempio: TRAUBE in «Zeitschr. für anorg. Chemie», 40, p. 372.

In altri termini: se facciamo il coefficiente 0.5 dell'He = 1, i coefficienti di tutti quanti i rimanenti elementi sono rappresentati da numeri interi.

Ciò che è dimostrato dalla tabella nella pagina seguente ⁽¹⁾.

Le differenze tra il valore calcolato e quello trovato, come si vede, sono minime e rientrano nell'ordine degli errori sperimentali ⁽²⁾.

Esprimendo graficamente questi valori di ϵ si può costruire la figura seguente:

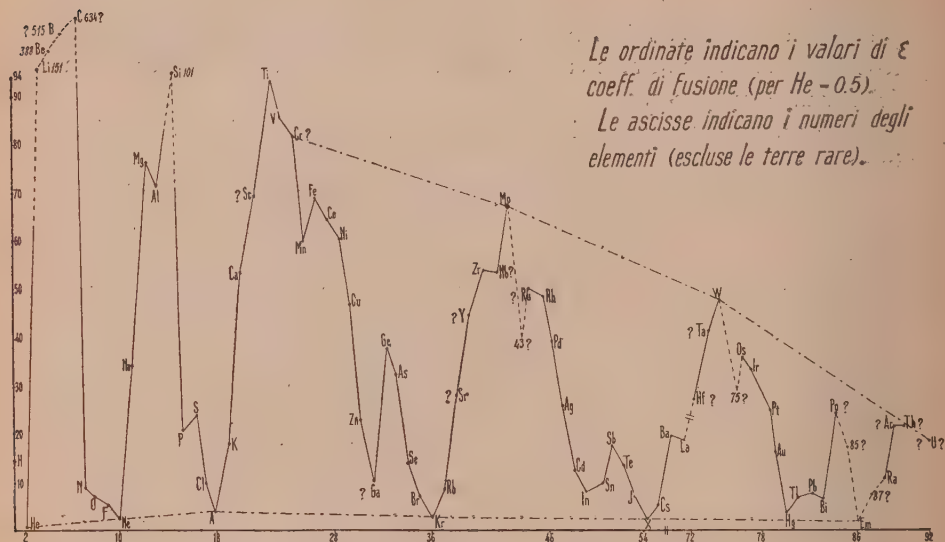


Fig. 1. — Coefficienti di fusione degli elementi.

Da essa risulta subito come questo valore di ϵ vada gradualmente diminuendo per la quasi totalità dei corpi dello stesso gruppo. Fanno solamente eccezione i metalloidi e i gaz nobili compresi entro l'equilibrio 18 dell'A. Tra i metalli, sole eccezioni il Mo ed il W della serie Cr-U.

Unendo difatti con una linea questi 4 corpi risulta una spezzata convessa verso l'alto. Mentre riunendo i punti di fusione dei rimanenti corpi, o si ha una linea inclinata quasi perfettamente retta (per Co - Rh - Ir, Ga - In - Cl e Sc - Y - La) o una spezzata concava verso l'alto.

Risulterebbe dunque che, in generale, via via che cresce il numero degli elettroni occorre una sempre minore quantità di calore proporzionale per ottenere la fusione del corpo.

(1) I valori delle temperature di fusibilità, riportati alla temperatura assoluta (-273°), sono stati ripresi dalle recenti tabelle del Landolt o dalle Critical Tables americane. I valori dubbi sono scritti in corsivo, quelli più sicuri sono in neretto.

(2) La sola differenza un poco notevole è quella dell'Sb dovuta forse alla polimorfia di questo corpo.

TABELLA I.

Coefficienti di fusione degli elementi.

Numero	Elemento	Coefficiente di fusione		Temperatura assoluta di fusione		Numero	Elemento	Coefficiente di fusione		Temperatura assoluta di fusione	
		He=0.5	He = 1	Calcolata	Osservata			He=0.5	He = 1	Calcolata	Osservata
1	H	14	28	14°	14°	38	Sr	28	56	1664°	ca 1073°
2	He	0.5	1	1	1	39	Y	45	90	1755	? 1760
3	Li	151	302	453	453	40	Zr	55	110	2200	2200
4	Be	388	766	1552	1551 ± 5	41	Nb	54	108	2214	ca 2220
5	B	515	1030	2575	ca 2573	42	Mo	68	136	2856	2840 ± 20
6	C	634	1268	3804	ca 3800	44	Ru	51.5	103	2266	> 2223
7	N	9	18	63	62.5	45	Rh	51	102	2244	2243
8	O	7	14	56	54.6	46	Pd	40	80	1840	1830
9	F	5.5	11	49.5	50	47	Ag	26	52	1222	1233
0	Ne	2.5	5	25	24.5	48	Cd	12.5	25	600	594
1	Na	34	68	374	371	49	In	8.5	17	436	429
2	Mg	77	154	924	923	50	Sn	10	20	500	504.8
3	Al	72	144	936	933	51	Sb	18	36	918	903.5
4	Si	101	202	1414	1414	52	Te	14	28	728	726
5	P	21	42	315	317	53	J	3.5	7	371	386
6	S	24	48	384	385.8	54	X	2.5	5	135	133
7	Cl	10	20	170	171	55	Cs	5.5	11	302.5	301.5
8	A	4.5	9	81	83	56	Ba	20	40	1120	1123
9	K	17.5	35	332.5	335.5	57	La	19	38	1083	1083
0	Ca	54	108	1080	1073-1081	72	Hf	27.5	55	1980	ca 1973
1	Sc	70	140	1470	ca 1473	73	Ta	42.5	85	3102.5	3071-3123
2	Ti	94	188	2068	2073 ± 20	74	W	49.5	99	3663	3645-3665
3	V	86.5	173	1989.5	1983	76	Os	36.5	73	2774	2773
4	Cr	83	166	1992	> 1973	77	Ir	34	68	2618	2623
5	Mn	60.5	121	1512.5	1513	78	Pt	26	52	2028	2043
6	Fe	69.5	139	1807	1806	79	Au	17	34	1343	1336-1340
7	Co	65.5	131	1768.5	1763 ± 2	80	Hg	3	6	240	234.1
8	Ni	61.5	123	1722	1725 ± 2	81	Tl	7	14	567	576
9	Cu	46	92	1334	1337	82	Pb	7.5	15	615	601
0	Zn	23	46	690	692	83	Bi	6.5	13	539	544
1	Ga	10	20	310	ca 303	84	Po	24.5	49	2058	? 2073
2	Ge	38.5	77	1232	1231.5	86	Em	2	4	172	ca 160
3	As	33	66	1089	1090	88	Ra	11	22	968	973
4	Se	14.5	29	493	490-493	89	Ac	22	44	1958	ca 1973
5	Br	7.5	15	262.5	265	90	Th	22	44	1980	> 1973
6	Kr	3	6	108	104	92	U	18	36	1656	1573-1673
7	Rb	8.5	17	314.5	312						

Ciò che è perfettamente logico, date le nostre cognizioni sulla disposizione periferica sempre più lassa degli elettroni. Pei pochissimi corpi che non seguono una tale regola occorre ammettere che, prima della fusione, si abbiano trasformazioni interne nell'architettura elettronica, le quali richiedano una quantità di calore destinata non ancora alla fusione ma a questo speciale lavoro. La qual cosa potrà esser facilmente dimostrata sperimentalmente.

È interessante analizzare più accuratamente questo grafico. Esso ci dice intanto che l'equilibrio 18 (A) segna una netta distinzione.

Seguendo la posizione dei coefficienti di fusione degli elementi secondo il loro aggruppamento periodico, cioè in senso orizzontale si rileva subito che i *gaz nobili sono quelli che hanno il minor coefficiente di fusione*. La linea che li unisce sale regolarmente da He ad A, poi scende leggermente verso Em, tenendosi sempre al disotto di tutti quanti gli altri coefficienti, ivi compreso quello di Hg, che ha il minimo coefficiente tra tutti i metalli.

Andamento simile hanno gli alogeni e il gruppo dell'O. Naturalmente si ha pure ascesa tra N e P, compresi entro l'equilibrio 18. Il gruppo dell'As si distacca affatto.

Se si analizza il grafico secondo la serie successiva degli elementi, sempre si nota la rapida ascesa verso la punta del C, Si, Ti e le rapide discese ⁽¹⁾ da questi corpi a quelli con molecola pluriatomica (gruppi: N, O, F).

Risulta quindi che il coefficiente di fusibilità dal minimo dei gaz nobili ⁽²⁾ passa gradatamente allo stadio $(E^n) \cdot 1$, $(E^n) \cdot 2$, $(E^n) \cdot 3$ per raggiungere il massimo con $(E^n) \cdot 4$. Da qui ridiscende rapidamente ai tipi a molecola pluriatomica (metalloidi) per raggiungere ancora il minimo del gaz nobile successivo.

Abbiamo dunque regolarissimi gli stadi

$(E^n) \cdot 1$	— Li	Na	K	Rb	Cs	87 ?
$(E^n) \cdot 2$	— Be	Mg	Ca	Sr	Ba	Ra
$(E^n) \cdot 3$	— B	(Al)	Sc	Y	(La)	Ac
$(E^n) \cdot 4$	— C	Si	Ti	Zr	Hf	Th

che sono via via sempre meno fusibili, coi soli piccoli scarti di limitato valore dell'Al e del La, che ho segnato tra parentesi.

Sono pure regolarissimi gli stadi (insussistenti allo stato monoatomico):

$(E^n) \cdot 5$	— N	P	As	Sb
$(E^n) \cdot 6$	— O	(S)	Se	Te
$(E^n) \cdot 7$	— F	Cl	Br	J

(1) Rispetto a questa brusca caduta avrò occasione di dire in una prossima Nota.

(2) Indico con (E^n) un equilibrio nobile in generale, e cioè sia quello (E^2) dell'He, sia quello (E^4) dei rimanenti gaz nobili.

che sono via via sempre più fusibili colla sola eccezione, di limitato valore, del S.

Colla presenza dell'equilibrio senario si ha qualche irregolarità negli elementi a fusibilità decrescente: V, Cr, Mn, cui non rispondono come ho già accennato Mo e W. Di 43 e 75 nulla sappiamo di sicuro.

Colle triadi comincia una serie discendente, che presenta una punta mediana, e nella quale pure si ha una regolarità quasi assoluta, avendosi solo qualche piccolo spostamento in Sn, Tl, Pb e Bi.

Regolare è la discesa del coefficiente nelle triadi; anzi per Fe, Co e Ni è regolarissima⁽¹⁾ tanto da essere tutti i valori su di una retta.

Più facilmente fusibili risultano Ni, Pd e Pt corrispondenti all'equilibrio finale senario 4.6. E con ciò si ritrova una analogia coi gaz nobili. Invece in modo assolutamente opposto, a quanto si è notato per gli equilibri nobili, si comportano i primi tre dei corpi corrispondenti a stadi successivi. Noi troviamo difatti a coefficiente decrescente i corpi seguenti:

$$\begin{array}{l} (E^6) \cdot 1 - \text{Cu} \mid \text{Ag} \mid \text{Au} \\ (E^6) \cdot 2 - \text{Zn} \mid \text{Cd} \mid \text{Hg} \\ (E^6) \cdot 3 - \text{Ga} \mid \text{In} \mid (\text{Tl}) \end{array}$$

colla sola eccezione del Tl, che presenta un piccolo scarto.

Invece lo stadio $(E^6) \cdot 4$ con Ge, Sn e Pb, analogamente a quanto accadeva nell'equilibrio nobile, tornano ad essere più difficilmente fusibili. Si può quindi concludere nel modo seguente: *La fusibilità degli elementi è una funzione del numero degli elettroni, ed è in rapporto colla loro disposizione simmetrica.*

Come corollario può avere interesse indagare sul corpo che dovrebbe solidificare allo zero assoluto.

Riprendiamo la semplice relazione già accennata. Occorre che essa possa ridursi a zero, cioè:

$$\epsilon = 0 = \frac{0^0}{N_e}$$

Ora questo è praticamente possibile quando $N_e = 0$. Ma $N_e = 0$ è solamente il protone. Questo dunque dovrebbe solidificare allo zero assoluto.

(1) Ciò lascia adito a dubbi sulla esattezza delle determinazioni dei punti di fusione degli altri membri, specialmente per quelli della seconda triade.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Identità di Bianchi e omografia di gravitazione.* Nota di T. BOGGIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Continuando nell'ordine di idee sviluppato nelle due Note precedenti, testè pubblicate in questi « Rendiconti » col titolo: *Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo*, e *L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo* — Note che citerò brevemente con *Nota I* e *Nota II* — espongo una nuova dimostrazione, semplicissima, dell'identità di Bianchi per la derivata della omografia di Riemann, poi ne faccio l'applicazione al calcolo del gradiente del vettore dell'omografia di Riemann, dal quale poi si è condotti in modo naturale e ovvio all'omografia di gravitazione di Einstein, il cui gradiente risulta nullo.

1. *Identità di Bianchi per l'omografia di Riemann.* — Fra i differenziali superficiali dell'omografia di Riemann R intercede una relazione molto notevole, che si chiama identità di Bianchi, e che ora stabiliremo.

Siano $d'Q, \delta Q, d'Q$ tre spostamenti infinitesimi arbitrari del punto Q nello spazio curvo C_n , ad n dimensioni, che si considera, e siano $d\mathfrak{R}, \delta\mathfrak{R}, d'\mathfrak{R}$ i differenziali superficiali corrispondenti dell'omografia \mathfrak{R} ; allora l'identità di Bianchi può scriversi:

$$(I) \quad d'\mathfrak{R} \cdot dQ \delta Q + d\mathfrak{R} \cdot \delta Q d'Q + \delta\mathfrak{R} \cdot d'Q dQ = 0.$$

Infatti, dalla (8) della *Nota II*, indicando con $\delta'Q$ un altro spostamento infinitesimo di Q in C_n , si deduce:

$$\mathfrak{R} dQ \delta Q \delta'Q = \delta d\delta'Q - d\delta\delta'Q,$$

perciò prendendo il differenziale superficiale col simbolo d' risulta:

$$d'(\mathfrak{R} dQ \delta Q) \cdot \delta'Q = d'\delta d\delta'Q - d'd\delta\delta'Q - \mathfrak{R} dQ \delta Q d'\delta'Q;$$

ora, la (8) citata sussiste per un qualunque vettore infinitesimo $d'Q$ tangente allo spazio curvo in Q , quindi sussisterà anche se al posto di $d'Q$ si pone il vettore $d'\delta'Q$, che pure è tangente a C_n in Q , perciò si ha:

$$\mathfrak{R} dQ \delta Q d'\delta'Q = \delta dd'\delta'Q - d\delta d'\delta'Q,$$

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

e sostituendo:

$$d'(\mathfrak{H} dQ \delta Q) \cdot \delta' Q = d' \delta d \delta' Q - d' d \delta \delta' Q - \delta d d' \delta' Q + d \delta d' \delta' Q;$$

se ora sommiamo questa eguaglianza colle altre due che se ne deducono permutando circolarmente i tre differenziali d' , d , δ , si trova che al secondo membro viene zero, perchè i termini si elidono evidentemente a due a due, e perciò risulta:

$$d'(\mathfrak{H} dQ \delta Q) \cdot \delta' Q + d(\mathfrak{H} \delta Q d' Q) \cdot \delta' Q + \delta(\mathfrak{H} d' Q dQ) \cdot \delta' Q = 0,$$

od ancora, a causa della arbitrarietà di $\delta' Q$:

$$d'(\mathfrak{H} dQ \delta Q) + d(\mathfrak{H} \delta Q d' Q) + \delta(\mathfrak{H} d' Q dQ) = 0;$$

questa è una prima forma dell'identità di Bianchi. Sviluppando i differenziali superficiali, e tenendo conto della (10') della *Nota II*, e della proprietà: $d\delta Q = \delta dQ$ stabilita nella *Nota I*, si conclude che i termini contenenti dei differenziali secondi di Q si elidono a due a due, e rimangono solo i tre termini che figurano nella (1), che così risulta dimostrata.

Scrivendo nella (1) il 1° termine al 3° posto ed osservando che si può scrivere $d\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' dQ$, ove \mathfrak{H}' indica la derivata di \mathfrak{H} rispetto a Q (che sarà quindi una omografia di 4° ordine) si può dare alla (1) la forma notevole:

$$(2) \quad \mathfrak{H}' dQ \delta Q d' Q + \mathfrak{H}' \delta Q d' Q dQ + \mathfrak{H}' d' Q dQ \delta Q = 0;$$

ed è chiaro che si può scrivere la (2) anche così:

$$(2') \quad \mathfrak{H}' abc + \mathfrak{H}' bca + \mathfrak{H}' cab = 0,$$

ove a, b, c sono vettori qualunque, tangenti a C_n in Q .

Vediamo così che l'identità di Bianchi si può immaginare ottenuta dalla proprietà ciclica espressa dalla (14') della *Nota II*, sostituendo ad \mathfrak{H} la sua derivata $d\mathfrak{H}/dQ$ (1).

Il 1° membro della (2') è un'omografia ordinaria.

La dimostrazione, coi metodi ordinari (2), delle formule equivalenti alla (2), relative ai simboli di Riemann, è più complicata.

2. *Vettore dell'omografia di Riemann.* — Nella *Nota I* abbiamo ricordata la definizione di vettore di un'omografia d'ordine maggiore di 1; orbene, se si considera l'omografia \mathfrak{H} , che è di 3° ordine, il suo vettore, cioè $v\mathfrak{H}$, è un'omografia ordinaria, che indicheremo con ψ , cioè porremo:

$$(3) \quad \psi = v\mathfrak{H};$$

(1) Coi metodi ordinari si presenta invece la derivata covariante dei simboli di Riemann.

(2) LEVI-CIVITA, op. cit., p. 208; BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, p. 349, 2ª edizione (Spoerri, Pisa, 1902).

è chiaro che la ψ trasforma vettori tangenti a C_n in Q in vettori pure tangenti a C_n in Q .

Applicando la seconda delle (16) della Nota I, si ha:

$$(4) \quad \psi a = \sum \Re a a_i a_i,$$

ove a è un vettore qualunque tangente a C_n in Q , ed a_1, a_2, \dots, a_n sono vettori unitari, a due a due ortogonali, e tangenti a C_n in Q .

L'omografia ψ è stata dedotta dalla \Re per *contrazione*, o, come anche si suol dire, per *saturazione degli indici*. Ora, esaminando il 2° membro della (4) si scorge che anche le espressioni

$$(a) \quad \sum \Re a_i a a_i, \quad \sum \Re a_i a_i a,$$

che sono le uniche che si possano dedurre dalla (4) permutando i vettori a, a_i , corrispondono ad altre saturazioni di indici, ma esse non danno nulla di nuovo, perchè essendo, in virtù della (10') della Nota II, $\Re bac = -\Re abc$, si vede che la prima delle (a) vale $-\psi$, mentre la seconda delle (a) è identicamente nulla.

Stabiliamo ora l'importante proprietà che l'omografia ψ è una *dilatazione*, cioè $K\psi = \psi$.

Infatti, dalla (4), ricordando la (16) della Nota II, poi la (10'') e la (12') della stessa Nota, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \psi a \times b &= \sum \Re a a_i a_i \times b = \sum \Re a_i b a \times a_i = -\sum \Re b a_i a \times a_i = \\ &= \sum \Re b a_i a_i \times a; \end{aligned}$$

ora l'ultimo membro vale $\psi b \times a$, cioè $K\psi a \times b$, e confrontato col primo membro ci dice appunto che $K\psi = \psi$.

3. *Gradiente del vettore dell'omografia di Riemann.* — Sia μ_r un'omografia ordinaria, funzione del punto Q , che trasformi vettori tangenti a C_n in Q in vettori pure tangenti a C_n in Q ; allora, analogamente a quanto si fa negli spazi euclidei (*Espaces*, p. 55) chiameremo *gradiente*⁽¹⁾ *superficiale* di μ_r , o *gradiente* di μ_r in C_n , e lo indicheremo con $\text{Grad } \mu_r$, il vettore definito dalla relazione:

$$(5) \quad \text{Grad } \mu_r = \nabla \frac{d\mu_r}{dQ}.$$

(1) Alcuni autori tedeschi chiamano *divergenza* di μ il vettore che noi chiamiamo *gradiente* di μ ; ora, tale denominazione non è affatto ammissibile, perchè se, in particolare, lo spazio è euclideo, e la μ si riduce ad una funzione numerica u , cioè si ha $\mu_{rs} = 0$, per $r \neq s$, è $\mu_{rr} = u$, allora la *divergenza* di u viene ad essere l'ordinario *gradiente* di u .

Dovrebbe bastare questa incongruenza per fare abbandonare la denominazione di *divergenza* di un tensore e adottare quella di *gradiente*, che è già, da una ventina d'anni, stata proposta dal prof. Burali-Forti e adottata da vari autori.

Dalla 2^a delle (17) della *Nota I* si deduce tosto che tale vettore è tangente a C_n in Q .

Ne segue che il gradiente superficiale di $v\mathfrak{R}$, cioè di ψ è dato da:

$$(6) \quad \text{Grad } \psi = v \frac{d\psi}{dQ}.$$

Ora stabiliremo la seguente notevole relazione:

$$(7) \quad \text{Grad } \psi = \text{Grad } I_1 \psi / 2.$$

Per questo, osserviamo intanto che dalla (3) e dalla seconda delle (2) della *Nota II* si ha:

$$d\psi = v d\mathfrak{R} = v(\mathfrak{R}' dQ) = (v\mathfrak{R}') dQ,$$

quindi, sostituendo nella (6) e tenendo conto della seconda delle (17) della *Nota I* risulta:

$$(8) \quad \text{Grad } \psi = v(v\mathfrak{R}') = \sum_i v\mathfrak{R}' \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i = \sum_i \sum_j \mathfrak{R}' \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j.$$

Per calcolare ora l'ultimo membro conviene ricorrere all'identità di Bianchi, nella quale figura pure la \mathfrak{R}' ; da essa si trae:

$$\mathfrak{R}' \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j dQ + \mathfrak{R}' \mathbf{a}_j dQ \mathbf{a}_i + d\mathfrak{R} \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = 0,$$

da cui:

$$\mathfrak{R}' \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j dQ \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j + \mathfrak{R}' \mathbf{a}_j dQ \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j + d\mathfrak{R} \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = 0;$$

ora, dalla *Osservazione* finale del n. 1 della *Nota II*, si deduce che la (10''), come pure le (12'), (16) sussistono se al posto di \mathfrak{R} si pone un suo differenziale qualunque $\delta\mathfrak{R}$, cioè $\mathfrak{R}'\delta Q$, od anche $\mathfrak{R}'\mathbf{a}$ (essendo \mathbf{a} un vettore tangente a C_n in Q), e allora trasformando gli ultimi due termini mediante la (10'') risulta:

$$\mathfrak{R}' \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j dQ \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j - \mathfrak{R}' \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i dQ \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j - d\mathfrak{R} \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = 0,$$

od anche, applicando la (12'):

$$\mathfrak{R}' \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j dQ \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j + \mathfrak{R}' \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i dQ \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_i - d\mathfrak{R} \cdot \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = 0;$$

ora trasformiamo i primi due termini mediante le (16) ed avremo:

$$\mathfrak{R}' \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j \times dQ + \mathfrak{R}' \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \times dQ - d\mathfrak{R} \cdot \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = 0.$$

Di qui e dalla (8) si ha senz'altro:

$$2 \text{ Grad } \psi \times dQ - \sum_i \sum_j d\mathfrak{R} \cdot \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = 0;$$

ma in virtù della seconda delle (16) e della (13) della *Nota I*, e delle (2) della *Nota II*, il secondo termine si trasforma successivamente in

$$\begin{aligned} - \sum_j \nabla d\mathfrak{R} \cdot \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_j &= - I_1 \nabla d\mathfrak{R} = - I_1 d\nabla\mathfrak{R} = - dI_1 \nabla\mathfrak{R} = \\ &= - (\text{Grad } I_1, \psi) \times dQ, \end{aligned}$$

perciò sostituendo si deduce, essendo dQ arbitrario: $2 \text{ Grad } \psi - \text{Grad } I_1 \psi = 0$, da cui segue la (7).

La (7) mostra l'opportunità di introdurre l'omografia, che è anzi una dilatazione:

$$(9) \quad \theta = \psi - I_1 \psi / 2,$$

per la quale si ha $\text{Grad } \theta = 0$.

Secondo la teoria della relatività einsteiniana, la θ , per il caso dello spazio-tempo a 4 dimensioni, si chiama *omografia di gravitazione*; la (7) esprime allora che *il gradiente superficiale della omografia di gravitazione è nullo in tutto lo spazio curvo considerato*.

In prossime pubblicazioni mi occuperò degli spazi curvi a 3 dimensioni e della curvatura di Riemann per uno spazio curvo.

Matematica. — *Ricerca di un'espressione razionale per le potenze di una matrice di secondo ordine.* Nota ⁽¹⁾ di SILVIA MARTIS in BIDDAU, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Dopo che il Sylvester ebbe dato i primi esempi di formole atte a definire ⁽²⁾, in casi di sufficiente generalità, una matrice potenza o radice di un'altra, non sono mancati tentativi per estendere la definizione e per ricavare formole esplicite atte alla calcolo effettiva.

Il prof. Bottasso, nel suo studio sulle omografie vettoriali del piano ⁽³⁾, ottenne risultati dai quali si può ricavare la potenza ennesima di una matrice di secondo ordine

$$(1) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$$

simbolo operatorio di una sostituzione lineare omogenea in due variabili. Il metodo del prof. Bottasso è fondato sull'uso dell'equazione caratteristica di Cayley, e conduce a formole ricorrenti.

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1928.

(2) J. J. SYLVESTER, *Sur les puissances et les racines des substitutions linéaires*. «C.-R. de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 94 (1882), pp. 55-59.

(3) M. BOTTASSO, *Omografie vettoriali nel piano*. «Rendiconti Circolo Matematico di Palermo», tomò XXXV (1913), pp. 1-46.

Gli studi recenti del prof. Giorgi, che lo hanno condotto alla definizione generale di una $f(\Phi)$ di tipo qualunque, hanno nuovamente suscitato ricerche di questo tipo. Seguendo questo nuovo indirizzo la dott.ssa E. Porcu-Tortrini, in diverse sue Note ⁽¹⁾ ha dato varie espressioni della potenza ennesima di una matrice del secondo ordine, in funzione dei suoi elementi e dei suoi invarianti. La prima di queste Note ottiene gli elementi della Φ^n razionalmente, ma per mezzo di espressioni ricorrenti come quelle del Bottasso. La seconda e la terza Nota fanno intervenire le radici dell'equazione (equazione caratteristica)

$$(2) \quad D(\rho) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} - \rho & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

e non riescono quindi razionali.

Il prof. L. Fantappiè ha dato di recente una formola generale ⁽²⁾ per calcolare gli elementi di una $f(\Phi)$ qualunque, ma anche questa non conduce ad espressioni razionali.

Limitandomi al caso di una Φ di secondo ordine, mostrerò qui come il problema di determinare gli elementi di Φ^n , per n intero, in funzione di quelli di Φ , si possa risolvere con formole che *non sono ricorrenti* e che *non contengono irrazionalità*.

Prendo come punto di partenza la formola data dal prof. Fantappiè e che, per $n = 2$, era stata data sotto una forma diversa, anche dalla dott.ssa E. Porcu-Tortrini ⁽³⁾.

Dette ρ_1 e ρ_2 le radici, che supponiamo dapprima distinte, dell'equazione caratteristica (2), questa formola si scrive:

$$(3) \quad \Phi^n = \begin{vmatrix} \frac{\rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1}}{\rho_1 - \rho_2} - \varphi_{22} \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} & \varphi_{12} \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} \\ \varphi_{21} \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} & \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_1^{n+1}}{\rho_2 - \rho_1} - \varphi_{11} \frac{\rho_2^n - \rho_1^n}{\rho_2 - \rho_1} \end{vmatrix}.$$

Indico con 2γ e δ gli invarianti di Φ , cioè pongo

$$(4) \quad \gamma = \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2} \quad \delta = \varphi_{11} \varphi_{22} - \varphi_{12} \varphi_{21}.$$

(1) *Sulle potenze delle matrici di secondo ordine*. «Atti della Pontificia Accademia delle Scienze nuovi Lincei», anno LXXX (seduta del 20 febbraio 1927), pp. 150-153; *Calcolo delle potenze delle matrici di secondo ordine mediante riduzione alla forma canonica*. Id., anno LXXX (seduta del 24 aprile 1927), pp. 172-176; *Terzo procedimento per il calcolo delle potenze delle matrici di second'ordine*. Id., anno LXXX, sessione VII del 19 giugno 1927.

(2) L. FANTAPPIÈ, *Le calcul des matrices*. «C.-R. des séances de l'Académie des Sciences», t. 186, p. 619, séance du 5 mars 1928.

(3) E. PORCU-TORTRINI, *Calcolo delle funzioni qualunque di matrici di second'ordine*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. VII, serie 6°, 1928, p. 206.

Indico inoltre con R il discriminante della (2), cioè

$$(5) \quad R = \frac{(\varphi_{11} - \varphi_{22})^2 - 4\varphi_{12}\varphi_{21}}{4}.$$

Tenendo allora conto che

$$(6) \quad \rho_1 = \gamma + \sqrt{R} \quad \rho_2 = \gamma - \sqrt{R}$$

posso scrivere

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1^n = \gamma^n + \binom{n}{1} \gamma^{n-1} \sqrt{R} + \binom{n}{2} \gamma^{n-2} \sqrt{R^2} + \binom{n}{3} \gamma^{n-3} \sqrt{R^3} + \dots \\ \quad \dots + \binom{n}{n-1} \gamma \sqrt{R^{n-1}} + \sqrt{R^n} \\ \rho_2^n = \gamma^n - \binom{n}{1} \gamma^{n-1} \sqrt{R} + \binom{n}{2} \gamma^{n-2} \sqrt{R^2} - \binom{n}{3} \gamma^{n-3} \sqrt{R^3} + \dots \\ \quad \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \gamma \sqrt{R^{n-1}} + (-1)^n \sqrt{R^n} \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \rho_1 - \rho_2 = 2\sqrt{R}.$$

Per conseguenza, se n è pari si scriverà

$$(9) \quad \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} = \binom{n}{1} \gamma^{n-1} + \binom{n}{3} \gamma^{n-3} R + \dots + \binom{n}{n-1} \gamma R^{\frac{n-2}{2}}$$

e se n è dispari

$$(10) \quad \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} = \binom{n}{1} \gamma^{n-1} + \binom{n}{3} \gamma^{n-3} R + \dots + R^{\frac{n-1}{2}}.$$

Queste due espressioni si possono riunire in una sola indicando con N_0 il massimo intero contenuto in $\frac{n-1}{2}$, e scrivendo

$$(11) \quad \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} = \sum_{r=0}^{r=N_0} \binom{n}{2r+1} \gamma^{n-2r-1} R^r.$$

Similmente, ponendo $n+1$ in luogo di n , e indicando con N_1 il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$, si ha

$$(12) \quad \frac{\rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1}}{\rho_1 - \rho_2} = \sum_{r=0}^{r=N_1} \binom{n+1}{2r+1} \gamma^{n-2r} R^r.$$

Gli elementi della matrice Φ^n risultano allora tutti espressi razionalmente ed esplicitamente in funzione di quelli della Φ , e precisamente si ottiene

$$(13) \quad \Phi^n = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix}$$

dove

$$(14) \quad \begin{cases} \psi_{11} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+1}{2r+1} \gamma^{n-2r} R^r - \varphi_{22} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{2r+1} \gamma^{n-2r-1} R^r \\ \psi_{12} = \varphi_{12} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{2r+1} \gamma^{n-2r-1} R^r \\ \psi_{21} = \varphi_{21} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{2r+1} \gamma^{n-2r-1} R^r \\ \psi_{22} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+1}{2r+1} \gamma^{n-2r} R^r - \varphi_{11} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{2r+1} \gamma^{n-2r-1} R^r. \end{cases}$$

Queste espressioni assumono una forma limite particolare nel caso in cui le due radici ρ_1 e ρ_2 siano uguali (caso parabolico). In questo caso $R = 0$, e si ottiene, dopo facili trasformazioni:

$$(15) \quad \begin{cases} \psi_{11} = (n+1)\gamma^n - n\varphi_{22}\gamma^{n-1} = \left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right)^n + \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2} \left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right)^{n-1} \\ \psi_{12} = n\varphi_{12}\gamma^{n-1} = \varphi_{12}n \left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right)^{n-1} \\ \psi_{21} = n\varphi_{21}\gamma^{n-1} = \varphi_{21}n \left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right)^{n-1} \\ \psi_{22} = (n+1)\gamma^n - n\varphi_{11}\gamma^{n-1} = \left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right)^n - \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2} \left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right)^{n-1}. \end{cases}$$

Confido che queste formole (nelle quali, ricordo bene, il simbolo γ usato da me, non ha lo stesso significato del γ usato dagli autori precedenti) possano riuscire di utilità diretta nelle applicazioni.

Matematica. — *Alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche.* Nota ⁽¹⁾ di G. SUPINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Una funzione armonica regolare è determinata, come è noto, all'interno di un campo C quando siano assegnati i valori assunti da essa sul contorno s di C; tuttavia, salvo campi specialissimi, non è facile conoscere la funzione armonica così individuata. Mi sono quindi proposto la ricerca di funzioni maggioranti alle funzioni armoniche assegnate sul contorno; e ciò non soltanto per avere un valore approssimato della funzione incognita, ma, piuttosto, per iniziare una ricerca sull'andamento di una funzione armonica all'interno di un campo in relazione coi valori assunti sul contorno. Il risultato permette di dedurre qualche limitazione notevole per la funzione di Green; altre conseguenze saranno esposte in successivi lavori.

2. Si consideri il campo C, semplicemente connesso, limitato dal contorno s. Supponiamo, per fissare le idee, che C sia a due dimensioni. Se su s sono dati i valori U_s (variabili con continuità, salvo al più, in un numero finito di punti) e se s ammette la tangente in ogni punto (e anche essa varia con continuità od ha, al più, un numero finito di discontinuità) si può determinare la funzione U armonica in C e che su s è uguale a U_s per mezzo di un potenziale di doppio strato.

Si pone, come è noto:

$$(1) \quad U_A = \frac{1}{2\pi} \int_s \mu(P) \frac{\cos \varphi}{r} ds_P$$

dove r indica la distanza del punto A generico interno al campo dal punto P variabile sul contorno, φ indica l'angolo della normale interna in P con la retta \overline{PA} , $\mu(P)$ rappresenta una funzione dei punti di s che si determina per mezzo della equazione integrale:

$$(2) \quad \pi \mu(P) + \lambda \int_s \mu(P') \frac{\cos \varphi}{r} ds_{P'} = 2\pi U(P) \quad (P, P' \text{ punti di } s)$$

ove si ponga $\lambda = 1$ (problema di Dirichlet interno). Per questo valore di λ

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1928.

la (2) può essere risolta con approssimazioni successive; un procedimento semplice a questo scopo si basa sull'osservazione che se P è su s è

$$\int_s \frac{\cos \varphi}{r} ds_{P'} = \pi \quad \left(r = \overline{PP'}; \varphi = \widehat{PP'n}; n \text{ normale interna in } P \right)$$

sicchè la (2) si può scrivere (per $\lambda = 1$) nella forma

$$2\pi\mu(P) + \int_s [\mu(P') - \mu(P)] \frac{\cos \varphi}{r} ds_{P'} = 2\pi U(P).$$

Poniamo

$$\mu_0(P) = U(P), \quad \mu_1(P) = \frac{1}{2\pi} \int_s [\mu_0(P) - \mu_0(P')] \frac{\cos \varphi}{r} ds_{P'}$$

e in generale

$$\mu_n(P) = \frac{1}{2\pi} \int_s [\mu_{n-1}(P) - \mu_{n-1}(P')] \frac{\cos \varphi}{r} ds_{P'}.$$

La serie (di Neumann)

$$\mu_0(P) + \mu_1(P) + \dots + \mu_n(P) + \dots$$

convergente, nelle condizioni poste per s e U_P ha per somma la funzione $\mu(P)$ cercata, e quindi la (1) determina la funzione armonica che risolve il problema.

3. Dividiamo il contorno s , che ora supponiamo *convesso*, in due parti σ_1 e σ_2 . Serviamoci della serie di Neumann per determinare un valore maggiorante per $\mu(P)$ nell'ipotesi che la funzione U assegnata, sia uguale alla costante M in σ_1 , uguale a zero in σ_2 , e sia *limitata* in C .

Per le condizioni esposte risulta

$$\mu_0(P) = \begin{cases} M & \text{su } \sigma_1 \\ 0 & \text{su } \sigma_2 \end{cases}$$

e quindi dalla relazione integrale che determina $\mu_1(P)$ si ha

$$\mu_1(P) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_2} M \frac{\cos \varphi}{PP'} d\sigma_2 & \text{se } P \text{ è su } \sigma_1 \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} M \frac{\cos \varphi}{PP'} d\sigma_1 & \text{se } P \text{ è su } \sigma_2 \end{cases}$$

Osserviamo ora che la serie di Neumann ha carattere *ricorrente*; cioè posto che essa partendo dal primo termine $\mu_0(P)$ determini la fun-

zione armonica (1) che assume su C i valori dati $U(P) = \mu_0(P)$ ne segue che, escludendo i primi n termini essa determina la funzione armonica che assume su C il valore rappresentato da $\mu_n(P)$. Da questa osservazione si deduce che se a $\mu_n(P)$ si sostituisce una funzione maggiorante, la serie di Neumann, per proprietà elementari delle funzioni armoniche, determina una funzione $\bar{U}(P)$ che sostituita nella (1) dà luogo ad un valore \bar{U}_A maggiore (o al più uguale) a quello della funzione armonica U che prende effettivamente i valori $U(P)$ sul contorno. Ciò posto, si sostituisca a $\mu_1(P)$ la funzione

$$\mu'_1(P) = \begin{cases} M \frac{\gamma}{2\pi} & \text{se } P \text{ è su } \sigma_1 \\ 0 & \text{se } P \text{ è su } \sigma_2 \end{cases}$$

nella quale γ è l'angolo visuale *massimo* secondo cui da un punto qualunque di σ_1 si vede il contorno σ_2 ; in ogni punto di C e $\mu'_1(P) \geq \mu_1(P)$ perchè su σ_2 , $\mu_1(P)$ è negativa mentre $\mu'_1(P)$ è nulla e su σ_1 è

$$\mu_1(P) = \frac{M}{2\pi} \int_{\sigma_2} \frac{\cos \varphi}{PP'} d\sigma_2 \leq \frac{M}{2\pi} \gamma \quad (\gamma \leq \pi).$$

Noto $\mu'_1(P)$, si può determinare $\mu'_2(P)$; se a questa sostituiamo, procedendo in modo perfettamente identico a quello seguito, una funzione $\mu''_2(P)$ maggiorante rispetto a $\mu'_2(P)$ risulterà

$$\mu''_2(P) = \begin{cases} M \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right)^2 & \text{se } P \text{ è su } \sigma_1 \\ 0 & \text{se } P \text{ è su } \sigma_2 \end{cases}$$

È ormai chiaro che la serie

$$\mu_0 + \mu'_1 + \dots + \mu_n^{(n)} + \dots$$

maggiorante alla serie di Neumann tende a $\frac{M}{1 - \frac{\gamma}{2\pi}}$ su σ_1 e a zero su σ_2 ; avremo così dalla (1)

$$(4) \quad U_A \leq \frac{M}{2\pi - \gamma} \int_{\sigma_1} \frac{\cos \varphi}{r} d\sigma_1$$

od anche in modo equivalente,

$$(5) \quad U_A \leq \frac{M}{2\pi - \gamma} \omega_A$$

dove ω_A è l'angolo visuale secondo cui da A è visto il contorno σ_1 .

Se la parte σ_1 del contorno tende a zero allora γ tende a π ; si hanno così le formule

$$(4') \quad U_A \leq \frac{M}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\cos \varphi}{r} d\sigma_1 \quad (5') \quad U_A \leq M \frac{\omega_A}{\pi}.$$

Si osserverà facilmente che la funzione armonica definita dalla (4') è maggiorante alla funzione U data su s anche se il campo C non è convesso purchè l'angolo visuale secondo cui da σ_1 si vede σ_2 risulti $\leq \pi$. Nel caso generale, se $\gamma \geq \pi$ allora le formule precedenti non sono valide perchè non si può dire che su σ_2 sia $\mu_1 < 0$.

Non si presentano difficoltà per tener conto anche di questo caso: il calcolo si svolge in modo sostanzialmente analogo a quello fin qui seguito e si ottiene

$$(4'') \quad U_A \leq \frac{M}{\pi} \left\{ \left| \int_{\sigma_1} \frac{\cos \varphi}{r} d\sigma_1 \right| + \left| \int_{\sigma'} \frac{\cos \varphi}{r} d\sigma' \right| \right\}$$

essendo σ' l'insieme dei punti P' di σ_2 tali che l'angolo di $\overline{PP'}$ con la normale in un punto P qualunque di σ_1 risulta maggiore di $\frac{\pi}{2}$.

4. Le considerazioni precedenti possono essere applicate per ritrovare e completare qualche risultato relativo alla funzione di Green. Ricordiamo perciò che una funzione armonica U determinata in un campo per mezzo dei suoi valori al contorno, è completamente nota se si conosce in questo campo la funzione di Green; in ogni punto A interno al campo è

$$(6) \quad U_A = \frac{1}{2\pi} \int_s U(P) \frac{\partial G_P^A}{\partial n_P} dS_P$$

dove P è un punto generico del contorno s ed n è la normale interna in P . Dividiamo s in due parti σ_1 e σ_2 e sia

$$U(P) = \begin{cases} M & \text{su } \sigma_1 \\ 0 & \text{su } \sigma_2. \end{cases}$$

La (6) diviene

$$U_A = \frac{M}{2\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\partial G_P^A}{\partial n_P} d\sigma_1$$

e se σ_1 tende a zero e confrontiamo questa espressione con la (4') (ricordando che $\frac{\partial G_P^A}{\partial n_P}$ è positiva in ogni punto del contorno) possiamo affermare

che la derivata normale in un punto P del contorno della funzione di Green relativa al punto P e ad un punto A interno al campo è minore od eguale a

$$\frac{2 \cos(n, r)}{r} \quad (r = \overline{AP})$$

tutte le volte che il campo è convesso. Il risultato può essere espresso in forma diversa ricordando i lavori di E. E. Levi⁽¹⁾ e P. Lévy⁽²⁾ nei quali si dimostra che, in punti prossimi al contorno è

$$G_B^A = 2 \log r + b_B^A$$

$$\frac{\partial G_B^A}{\partial n} = \frac{2 \cos(n, r)}{r} + b_{1B}^A \quad (r = \overline{AB})$$

dove b, b_1 sono funzioni limitate. Dai numeri precedenti si deduce che se il campo C è convesso b_1 è certamente negativa e minore in valore assoluto di $-\frac{2 \cos(n, r)}{r}$: se il campo non è convesso si ricavano facilmente dalla (4'') valori maggioranti per i diversi punti del suo contorno. Si trova così che la limitazione $b_{1B}^A < 0$ vale per tutti quei punti B di s la cui tangente lascia il contorno stesso tutto da una parte.

Matematica. — *Studi di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni.* Nota⁽³⁾ di A. TONOLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In due lavori in corso di pubblicazione nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », ho studiato dal punto di vista della ordinaria geometria differenziale, le superficie immerse negli spazi lineari a cinque e a quattro dimensioni. Le quistioni ivi trattate sono state esaminate da diversi autori sotto l'aspetto più generale, sia riguardo allo spazio ambiente, sia riguardo alle dimensioni della varietà considerata. Era opportuno però scendere all'esame di casi particolari per mettersi più in contatto col problema, facendone un'analisi minuta, e per vedere più da vicino il giuoco che fa in esso il numero delle dimensioni dello spazio 2-tangente della superficie, rilevando nel contempo i bei fatti analitici che sono connessi con la quistione. Queste le ragioni che mi hanno condotto a intraprendere simili

(1) Cfr. E. E. LEVI, *Sur l'application des équations intégrales au problème de Riemann.* « Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen », 1908.

(2) Cfr. P. LÉVY, *Sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour*, « Acta Math. », t. 42, 1919, pp. 207-267.

(3) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1928.

ricerche. Mancanza di spazio mi costringe dare in questa Nota soltanto un riassunto del lavoro relativo alle superficie dello spazio S_4 , la cui pubblicazione è a più lunga scadenza dell'altro.

§ 1. *Le superficie generiche dello spazio lineare S_4 .* Riferiamo i punti dello spazio lineare S_4 ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z, t , e siano

$$(1) \quad x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), t = t(u, v),$$

le equazioni parametriche di una superficie Σ di questo spazio. Chiamo *superficie generiche* di S_4 quelle nelle quali lo spazio 2-tangente ha il numero massimo di dimensioni, cioè quello dello spazio ambiente, e *superficie di punti assiali* o *superficie assiali* ⁽¹⁾ quelle nelle quali le dimensioni di questo spazio sono tre. Ho fatto lo studio delle superficie generiche nel modo seguente. Sia

$$(2) \quad ds^2 = a_{11} du^2 + 2 a_{12} du dv + a_{22} dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare d'una superficie Σ generica di S_4 , e indichiamo con $x_{rs}, y_{rs}, z_{rs}, t_{rs}$ ($r, s = 1, 2$) le derivate seconde covarianti delle funzioni (1) rispetto alla forma (2). Fissiamo due sistemi di normali che formano una coppia principale secondo il criterio recentemente trovato dal Vitali ⁽²⁾, e diciamo X_i, Y_i, Z_i, T_i ($i = 1, 2$) i coseni direttori di due normali dei due sistemi spiccate da uno stesso punto di Σ . Consideriamo le due forme

$$(3) \quad f = f_{11} du^2 + 2 f_{12} du dv + f_{22} dv^2$$

$$(4) \quad g = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2,$$

ove si è posto:

$$f_{rs} = S X_1 x_{rs}, \quad g_{rs} = S X_2 x_{rs}.$$

Le forme (2), (3), (4) sono le *tre forme differenziali quadratiche fondamentali di Σ* . Introduciamo le « rotazioni »

$$(5) \quad p_r = S X_2 X_{1/r},$$

ove $X_{1/1}, X_{1/2}$ denotano le derivate parziali $\frac{\partial X_1}{\partial u}, \frac{\partial X_1}{\partial v}$. I due gruppi di equazioni fondamentali di Σ sono:

$$(I) \quad x_{rs} = f_{rs} X_1 + g_{rs} X_2.$$

(1) Il vocabolo assiale è di E. E. LEVI. Questo autore lo introduce nella Memoria: *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio*. [« Annali della Regia Scuola Normale di Pisa », vol. X (1905), p. 61].

(2) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà, e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*. [« Annales de la Société polonaise de mathématique »,

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{1/r} = - \sum_i^2 f_{ir} x^{(i)} + p_r X_2 \\ X_{2/r} = - \sum_i^2 g_{ir} x^{(i)} - p_r X_1. \end{array} \right.$$

Nelle equazioni (II) le $x^{(i)}$ sono le derivate contravarianti della funzione $x = x(u, v)$ rispetto alla forma (2). Le condizioni di illimitata integrabilità dei gruppi (I), (II) conducono a sei equazioni, date la prima volta dal Servant⁽¹⁾, cinque delle quali formano una estensione delle equazioni di Gauss e di Codazzi delle superficie dello spazio ordinario. Cinque di queste sei equazioni contengono elementi estranei alla quistione, quali sono le rotazioni; le ho eliminate, ed ho ottenuto — in totale — quattro relazioni invariantive che vincolano soltanto i coefficienti delle tre forme fondamentali. Ho dimostrato che queste quattro relazioni sono eziandio sufficienti ad assicurare in S_4 l'esistenza di una superficie (e di una sola a meno di moti rigidi), la quale ha come forme fondamentali tre forme differenziali quadratiche prestabilite, i cui coefficienti sono vincolati dalle relazioni suddette. Nello sviluppo della ricerca si troverà che i coefficienti di queste tre forme sono legati anche da una quinta relazione. Questa traduce il fatto che la coppia di sistemi di normali è principale secondo Vitali. Tale scelta ha il vantaggio di rendere più agile la trattazione che abbiamo fatto delle superficie generiche di S_4 .

§ 2. *Le superficie assiali di S_4 .* È noto che le superficie assiali di S_4 sono le superficie dello spazio S_3 , i coni, i cilindri e le sviluppabili di S_4 . Sia Σ una superficie assiale di S_4 , che non sia in un S_3 , di equazioni parametriche (1), e il cui quadrato dell'elemento lineare sia dato dalla forma (2). Diciamo X_1, Y_1, Z_1, T_1 i coseni direttori di una normale che fa parte dell'unico sistema di normali che giace nel suo spazio 2-tangente. Poniamo:

$$f_{rs} = S X_1 x_{rs},$$

e consideriamo la forma

$$(6) \quad f = f_{11} du^2 + 2 f_{12} du dv + f_{22} dv^2.$$

Le forme (2) e (6) costituiscono le due forme differenziali quadratiche fondamentali delle superficie assiali di S_4 . Lo spazio 2-tangente di Σ essendo ora a tre dimensioni, esisterà in S_4 una direzione ad esso normale. Diciamo X_2, Y_2, Z_2, T_2 i suoi coseni direttori, e introduciamo le rotazioni (5).

(1) M. SERVANT, *Sur une extension des formules de Gauss*. [« Bulletin de la Société mathématique de France », t. XXX (1902)].

I due gruppi di equazioni fondamentali di Σ sono ora i seguenti:

$$(I) \quad x_{rs} = f_{rs} X_1.$$

$$(II) \quad \begin{cases} X_{1/r} = - \sum_i^2 f_{ir} x^{(i)} + p_r X_2 \\ X_{2/r} = - p_r X_1. \end{cases}$$

Ho espresso le condizioni di illimitata integrabilità dei gruppi (I), (II) nella forma seguente: La forma (2) ha nullo l'invariante di Gauss, e la forma (6) ha nullo il suo discriminante, ed è proporzionale al quadrato del differenziale d'una funzione φ , definita a mezzo delle rotazioni p_1, p_2 . Se il coefficiente μ di proporzionalità è funzione delle coordinate curvilinee di Σ , questa funzione φ soddisfa ad una equazione alle derivate parziali del secondo ordine. Se invece μ è una costante, la funzione φ soddisfa ad un sistema differenziale pure del secondo ordine. Nel primo caso la funzione μ è integrale di una equazione alle derivate parziali del prim'ordine. Importa notare che queste equazioni si presentano sotto una forma notevole, perchè i primi membri sono dei parametri differenziali costruiti nel modo seguente: Siano φ_{rs} le derivate seconde covarianti della φ fatte con referenza alla forma (2), della quale diciamo a il discriminante, e indichiamo con $\overline{\varphi}_{rs}$ i complementi algebrici degli elementi φ_{rs} del determinante $|| \varphi_{rs} ||$. Posto:

$$(7) \quad \varphi^{(rs)} = \frac{\overline{\varphi}_{rs}}{a},$$

ho dimostrato che queste funzioni $\varphi^{(rs)}$ formano un sistema doppio contravariante di Ricci. Consideriamo la forma

$$(8) \quad \varphi_{11} du^2 + 2 \varphi_{12} du dv + \varphi_{22} dv^2,$$

e assumiamo come elementi reciproci degli elementi φ_{rs} le funzioni (7). Allora il primo membro dell'equazione cui soddisfa la funzione φ è il parametro differenziale del primo ordine di questa funzione rispetto alla forma (8). L'equazione relativa alla funzione μ (invariante) è formata così: il primo membro è il parametro differenziale misto delle funzioni φ, μ costruito nel modo testè dichiarato, e il secondo membro è il rapporto fra il quadrato del determinante funzionale di queste funzioni, e il prodotto di μ per il discriminante a della forma (2). Ho dimostrato che tutte queste condizioni sono eziandio sufficienti ad assicurare l'esistenza di una superficie dello spazio S_4 (e di una sola se si prescinde dai suoi moti rigidi), la quale ha come forme fondamentali due forme differenziali quadratiche prestabilite, soddisfacenti alle condizioni ora dichiarate. Nella dimostrazione di questo teorema è contenuto eziandio un criterio per riconoscere sulle forme quando

si ha un cono, quando un cilindro e quando una sviluppabile. Il criterio è questo: Si eseguisca dapprima sulle forme assegnate

$$\begin{aligned} a_{11} du^2 + 2 a_{12} du dv + a_{22} dv^2 \\ f_{11} du^2 + 2 f_{12} du dv + f_{22} dv^2, \end{aligned}$$

la trasformazione di variabili che le rende simultaneamente ortogonali. Esse devono acquistare l'aspetto

$$\begin{aligned} a_{11} du^2 + a_{22} dv^2 \\ f_{11} du^2, \end{aligned}$$

dove a_{22} è funzione della sola variabile v ⁽¹⁾. Si cambi questa variabile in modo che risulti $a_{22} = 1$. La prima forma deve assumere il tipo

$$\{ a(u) v + b(u) \}^2 du^2 + dv^2.$$

Se si ha $a(u)$ nullo, la superficie è un cilindro; se $a(u)$ non è nullo, si formi il rapporto $\frac{b(u)}{a(u)}$. Se esso è una costante la superficie è un cono; se esso contiene la variabile u la superficie è una sviluppabile.

Meccanica. — *Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche.* Nota II di G. COLONNETTI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. C. GUIDI.

Non è difficile estendere al caso di un sistema elastico affatto qualunque il teorema dimostrato nella Nota I per il solo caso speciale delle tratture reticolari.

Immaginiamo infatti di aver da fare con un solido elastico occupante un certo spazio V , certamente connesso, eventualmente anche a connessione multipla. È noto che uno stato di coazione elastica del tipo il più generale si può pensar generato imprimendo idealmente ai singoli elementi che compongono il solido certe deformazioni piccolissime, e del resto affatto arbitrarie, che si possono definire nel modo più semplice e più generale dandone le sei componenti ⁽³⁾

$$e_x, e_y, e_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}.$$

(1) Oppure il seguente:

$$\begin{aligned} a_{11} du^2 + a_{22} dv^2 & \quad a_{11} = a_{11}(u) \\ f_{22} dv^2. \end{aligned}$$

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(3) Cfr. G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*, vol. I (Torino, 1928) p. 322 e sg.

Naturalmente queste deformazioni non soddisferanno, in generale, alle condizioni di congruenza ⁽¹⁾; perciò la compagine del sistema si potrà mantenere immutata solo a condizione che i singoli elementi reagiscano mutuamente dando origine ad una distribuzione ben determinata di tensioni, le cui componenti speciali - incognite del problema che ci accingiamo a discutere - denoteremo al solito con

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}.$$

Dette

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$$

le componenti della deformazione *elastica* che in ciascun elemento accompagna le predette tensioni, sovrapponendosi alla deformazione *impressa*, è noto che si potranno sempre scrivere le sei relazioni

$$\begin{aligned} e_x + \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_y + \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_z + \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ g_{yz} + \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & g_{zx} + \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & g_{xy} + \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

u, v, w essendo tre funzioni delle coordinate - continue, uniformi e piccolissime rispetto alle dimensioni del solido, e dotate di derivate prime pure continue, uniformi e piccolissime a fronte dell'unità - funzioni le quali si possono ovviamente interpretare come le tre componenti degli spostamenti con cui si passa dalla configurazione iniziale del solido, precedente ad ogni deformazione impressa, al suo stato di coazione attuale.

Se si indica con

$$\varphi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$$

l'energia potenziale elastica, espressa come funzione (quadratica) delle componenti della deformazione elastica, le componenti speciali di tensione si possono scrivere sotto la forma

$$\sigma_x = \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y}, \quad \dots, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}.$$

Ciò posto, immaginiamo, nello spazio V occupato dal solido elastico dato, tracciato ad arbitrio un diaframma Σ , vale a dire una superficie contenuta tutta entro V la quale non seghi se stessa ed abbia il suo contorno sulla superficie del solido.

Se si suppone lungo quel diaframma operato un taglio, lo stato di coazione del solido elastico dato si può conservare, dopo il taglio, immutato, se si immaginano applicate alle due faccie del taglio due distribuzioni

(1) Cfr. G. COLONNETTI, op. cit., p. 18.

di forze ovunque equivalenti alle tensioni interne che prima si trasmettevano attraverso la superficie Σ .

Nei riguardi del solido tagliato queste tensioni si debbono naturalmente riguardare come delle forze esterne; se perciò indichiamo con X_n, Y_n, Z_n le componenti secondo i tre assi coordinati, riferite come sempre all'unità di area, della forza superficiale che deve ritenersi applicata all'elemento generico di normale n della superficie Σ , e se teniamo conto che le analoghe componenti per l'altra faccia dello stesso elemento (dove la normale è $-n$) risultano eguali a $-X_n, -Y_n, -Z_n$ le condizioni di equilibrio del solido tagliato si possono notoriamente riassumere nella relazione

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Sigma} [X_n (\delta u_{\alpha} - \delta u_{\beta}) + Y_n (\delta v_{\alpha} - \delta v_{\beta}) + Z_n (\delta w_{\alpha} - \delta w_{\beta})] d\Sigma = \\ & = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right] dV \end{aligned} \right.$$

nella quale $\delta u_{\alpha}, \delta v_{\alpha}, \delta w_{\alpha}$ stanno ad indicare i valori delle componenti dello spostamento virtuale di un punto generico di Σ considerato come appartenente all'una faccia del taglio, e $\delta u_{\beta}, \delta v_{\beta}, \delta w_{\beta}$ quelli delle analoghe componenti per lo stesso punto considerato come appartenente all'altra faccia, laddove con $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{zx}, \delta \gamma_{xy}$ si intendono denotati i valori delle sei componenti di deformazione nel particolare stato di coazione (virtuale) che i predetti spostamenti determinerebbero nel solido.

Se si suppone che il moto relativo delle due faccie del taglio sia un semplice moto rigido nello spazio, che cioè, dette l', m', n', p', q', r' sei costanti, si abbia

$$\delta u_{\beta} - \delta u_{\alpha} = l' + q' z - r' y$$

$$\delta v_{\beta} - \delta v_{\alpha} = m' + r' x - p' z$$

$$\delta w_{\beta} - \delta w_{\alpha} = n' + p' y - q' x$$

la coazione virtuale si riduce notoriamente ad una distorsione di Volterra⁽¹⁾.

Date quelle costanti - *caratteristiche della distorsione* - questa riesce completamente definita: si possono cioè determinare in modo unico le componenti u', v', w' degli spostamenti, e conseguentemente le sei componenti della deformazione

$$\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z, \gamma'_{yz}, \gamma'_{zx}, \gamma'_{xy}$$

(1) Cfr. V. VOLTERRA, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplément connexes*, « Ann. Ec. Norm. », (3), XXIV, sept.-nov. 1907.

ed in funzione di esse si può esprimere il secondo membro della (I) sotto la forma

$$\int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \epsilon'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \epsilon'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_z} \epsilon'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \gamma'_{yz} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \gamma'_{zx} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \gamma'_{xy} \right] dV.$$

Ma questo integrale può vantaggiosamente scriversi anche in un altro modo.

Consideriamo infatti la distorsione come per sè stante, vale a dire come se, invece di sovrapporsi allo stato di coazione dato, sussistesse da sola nel solido preso nel suo stato iniziale non deformato. E cerchiamo di definire lo stato di equilibrio da essa distorsione determinato applicando la solita equazione (I) ed assumendo come spostamenti virtuali proprio quegli u, v, w che abbiamo riconosciuti capaci di far passare il solido elastico dallo stato iniziale non deformato allo stato di coazione che abbiamo preso a studiare.

Allora, siccome questi spostamenti sono continui su Σ , il primo membro di quella equazione si annulla identicamente, e resta

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \right)' (\epsilon_x + \epsilon_x) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \right)' (\epsilon_y + \epsilon_y) + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' (\gamma_{xy} + \gamma_{xy}) \right] dV = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \right)' \epsilon_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \right)' \epsilon_y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_z} \right)' \epsilon_z + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \right)' g_{yz} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \right)' g_{zx} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' g_{xy} \right] dV = \\ & = - \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \right)' \epsilon_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \right)' \epsilon_y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_z} \right)' \epsilon_z + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \right)' \gamma_{yz} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \right)' \gamma_{zx} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' \gamma_{xy} \right] dV. \end{aligned}$$

Ma per una nota, e d'altronde facilmente dimostrabile, proprietà delle funzioni quadratiche

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \right)' \epsilon_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \right)' \epsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' \gamma_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \epsilon'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \epsilon'_y + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \gamma'_{xy}.$$

Si può quindi anche scrivere

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \right)' \epsilon_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \right)' \epsilon_y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_z} \right)' \epsilon_z + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \right)' g_{yz} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \right)' g_{zx} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' g_{xy} \right] dV = \\ & = - \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \epsilon'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \epsilon'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_z} \epsilon'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \gamma'_{yz} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \gamma'_{zx} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \gamma'_{xy} \right] dV. \end{aligned}$$

Concludendo l'equazione (I) diviene

$$\int_{\Sigma} [X_n (l' + q' z - r' y) + Y_n (m' + r' x - p' z) + Z_n (n' + p' y - q' x)] d\Sigma = \\ = \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \right)' e_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \right)' e_y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_z} \right)' e_z + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \right)' g_{yz} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \right)' g_{zx} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' g_{xy} \right] dV.$$

Se poi si mettono da una parte in evidenza le sei caratteristiche della distorsione, e se dall'altra parte si sostituiscono alle derivate dell'energia potenziale elastica le sei componenti speciali di tensione che esse misurano, si trova

$$(II) \left\{ \begin{aligned} & l' \int_{\Sigma} X_n d\Sigma + m' \int_{\Sigma} Y_n d\Sigma + n' \int_{\Sigma} Z_n d\Sigma + p' \int_{\Sigma} (Z_n y - Y_n z) d\Sigma + \\ & + q' \int_{\Sigma} (X_n z - Z_n x) d\Sigma + r' \int_{\Sigma} (Y_n x - X_n y) d\Sigma = \\ & = \int_V [\sigma'_x e_x + \sigma'_y e_y + \sigma'_z e_z + \tau'_{yz} g_{yz} + \tau'_{zx} g_{zx} + \tau'_{xy} g_{xy}] dV. \end{aligned} \right.$$

Ma i sei integrali relativi a Σ altro non sono che le sei caratteristiche del sistema di tensioni che su Σ stessa si sviluppano in dipendenza del dato stato di coazione del solido.

Ed è evidente che la (II) si presta al calcolo di queste sei caratteristiche: basta valersi, nell'applicarla, della libertà di scelta della distorsione ausiliaria, e supporre che il moto relativo delle due faccie del taglio si riduca ad una semplice traslazione parallela ad uno degli assi coordinati, ovvero ad una rotazione attorno allo stesso.

Fisica Matematica. — *Studio del campo elettrico nei mezzi omogenei anisotropi.* Nota di B. ROSSI, presentata⁽¹⁾ dal Corrispondente P. BURGATTI.

1. Il problema della determinazione del campo elettrico nei mezzi anisotropi differisce dell'analogo problema relativo ai mezzi isotropi pel fatto che la corrispondenza fra il vettore forza elettrica e il vettore spostamento non è rappresentata da una omotetia, ma da una omografia di carattere più generale. Questa circostanza introduce notevoli complicazioni di calcolo

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(quando si faccia uso del metodo cartesiano) cosicchè il problema è stato finora affrontato da pochi ⁽¹⁾ e da nessuno, per quanto mi consta, esaurientemente trattato, neppure nei casi particolari più semplici.

Di una questione dal punto di vista matematico perfettamente analoga, e cioè della distribuzione delle correnti in un conduttore anisotropo, si occupò K. E. Müller ⁽²⁾. Il suo lavoro però non conduce a risultati conclusivi, nè, d'altra parte, appare condotto in ogni punto col necessario rigore.

Mi propongo, in questa Nota, di mostrare come, applicando la teoria delle omografie vettoriali, la trattazione risulti notevolmente semplificata e si giunga spesso, con grande facilità, all'effettiva determinazione del campo.

2. Le equazioni, che determinano il campo in un dielettrico anisotropo, sono formalmente identiche a quelle, che valgono per un dielettrico isotropo; soltanto, come già s'è accennato, al posto della costante dielettrica occorre introdurre una *omografia dielettrica*, che nel seguito verrà indicata con ϵ . Si dimostra che ϵ deve essere una dilatazione. L'esperienza prova che le sue tre componenti secondo le direzioni unite (che individueremo mediante i vettori unitari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) sono quantità positive. Potremo quindi porre:

$$(1) \quad \epsilon = \alpha^2$$

essendo α la dilatazione definita dalle equazioni:

$$\alpha \mathbf{i} = \sqrt{\epsilon \mathbf{i} \times \mathbf{i}} \cdot \mathbf{i} \quad ; \quad \alpha \mathbf{j} = \sqrt{\epsilon \mathbf{j} \times \mathbf{j}} \cdot \mathbf{j} \quad ; \quad \alpha \mathbf{k} = \sqrt{\epsilon \mathbf{k} \times \mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}.$$

L'equazione, che lega la forza elettrica \mathbf{E} allo spostamento \mathbf{D} è:

$$(2) \quad \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D} \quad \text{ossia} \quad \alpha^2 \mathbf{E} = \mathbf{D}.$$

Essendo il campo del vettore \mathbf{E} irrotazionale, si può scrivere:

$$(3) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$$

e, indicando con ρ la densità volumetrica di elettricità, l'equazione di Poisson diventa:

$$(4) \quad \text{div } \epsilon \text{ grad } \varphi = -4 \pi \rho.$$

Questa equazione va integrata tenendo conto che, alla superficie dei conduttori, la funzione φ deve assumere i valori costanti $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ che rappresentano i potenziali (supposti noti) dei conduttori stessi. Se, anzichè i potenziali, sono date le cariche q_1, q_2, \dots dei singoli conduttori, $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

(1) Vedi p. es., MASSARDI, *Campo elettromagnetico in un mezzo anisotropo*, «Nuovo Cimento», 3, 407, 1912 e 8, 331, 1914.

(2) *Ein Beitrag zur Theorie der Elektrizitätsströmung in anisotropen Körpern*, «Ann. d. Phys.», 67, 201, 1922.

rappresentano quantità costanti, ma indeterminate, e si debbono aggiungere le ulteriori condizioni:

$$(5) \quad \int_{\sigma_1} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{n} d\sigma_1 = -4\pi q_1 \quad ; \quad \int_{\sigma_2} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{n} d\sigma_2 = -4\pi q_2 ; \dots$$

dove le integrazioni vanno estese alle superficie $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ dei conduttori.

3. Convieni, per risolvere il problema proposto, rappresentare il campo C , sede dei fenomeni elettrostatici, che stiamo studiando, in un campo C_1 , facendo corrispondere al punto generico P di C quel punto P_1 di C_1 , che è definito dall'equazione:

$$(6) \quad P_1 - O_1 = \alpha^{-1} (P - O)$$

dove O ed O_1 sono punti fissi rispettivamente di C e di C_1 . Diremo corrispondenti due figure di C e di C_1 quando sono formate di punti corrispondenti; corrispondenti due funzioni $f(P)$ ed $F(P_1)$ quando assumono valori eguali in punti corrispondenti. Si riconosce facilmente che le superficie $f(P) = \text{cost.}$ hanno come corrispondenti le superficie $F(P_1) = \text{cost.}$

Ad un elemento lineare nel campo C , parallelo al vettore unitario τ , corrisponde un elemento lineare in C_1 , parallelo al vettore $\tau_1 = \alpha^{-1} \tau$; se ds e ds_1 sono le lunghezze di questi due elementi, si ha:

$$(7) \quad ds_1 = \operatorname{mod} \tau_1 \cdot ds = \operatorname{mod} \alpha^{-1} \tau \cdot ds.$$

Analogamente, ad un elemento di superficie normale al vettore unitario \mathbf{n} corrisponde un elemento di superficie normale al vettore $\mathbf{n}_1 = R\alpha^{-1} \mathbf{n}$ e, dette $d\sigma$ e $d\sigma_1$ le aree dei due elementi, risulta:

$$(8) \quad d\sigma_1 = \operatorname{mod} \mathbf{n}_1 \cdot d\sigma = \operatorname{mod} R\alpha^{-1} \mathbf{n} \cdot d\sigma.$$

Infine, se dS e dS_1 sono due elementi di volume corrispondenti, si ha:

$$(9) \quad dS_1 = I_3 \alpha^{-1} \cdot dS \quad (1).$$

La trasformazione (6), essendo lineare, conserva l'ordine delle curve e delle superficie; in particolare fa corrispondere a rette, rette; a piani, piani; a quadriche, quadriche, ecc.

Siano ora $f(P)$ ed $F(P_1)$ due funzioni scalari corrispondenti. Dalla relazione: $F(P_1) = f(P)$ si deduce:

$$\operatorname{grad} F(P_1) \times dP_1 = \operatorname{grad} f(P) \times dP = \operatorname{grad} f(P) \times \alpha dP_1 = \alpha \operatorname{grad} f(P) \times dP_1$$

(1) Queste due ultime formule si deducono assai facilmente dalle identità:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} dP \wedge \alpha^{-1} \partial P &= R\alpha^{-1} (dP \wedge \partial P) \\ \alpha^{-1} dP \wedge \alpha^{-1} \partial P \times \alpha^{-1} \partial P &= I_3 \alpha^{-1} \cdot dP \wedge \partial P \times \partial P \end{aligned}$$

ponendo:

$$\mathbf{n} d\sigma = dP \wedge \partial P \quad \text{e} \quad dS = dP \wedge \partial P \times \partial P.$$

da cui (essendo dP_r un vettore infinitesimo qualunque):

$$(10) \quad \text{grad } F(P_r) = \alpha \text{ grad } f(P).$$

Analogamente, se $\mathbf{v}(P)$ e $\mathbf{V}(P_r)$ sono due funzioni vettoriali corrispondenti, si ha:

$$(11) \quad \frac{d\mathbf{V}(P_r)}{dP_r} = \frac{d\mathbf{v}(P)}{dP} \alpha.$$

Si deduce da questa, ricordando che $I_1 \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} \alpha \right) = I_1 \left(\alpha \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right) = I_1 \frac{d\alpha \mathbf{v}}{dP}$:

$$(12) \quad \text{div } \mathbf{V}(P_r) = \text{div } \alpha \mathbf{v}(P).$$

E combinando la (12) colla (10)

$$(13) \quad \Delta F(P_r) = \text{div } \alpha^2 \text{ grad } f(P).$$

4. Passiamo ora alla determinazione del campo nel mezzo anisotropo. Siano dati i potenziali $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ dei singoli conduttori e supponiamo, pel momento, che la densità volumetrica di elettricità sia dovunque finita. Prenderemo più tardi in esame il caso in cui si presentino, in seno al dielettrico, distribuzioni puntiformi, lineari o superficiali di elettricità ⁽¹⁾.

Consideriamo perciò nel campo C_r un sistema di conduttori, i quali corrispondano, nel senso più sopra precisato, ai conduttori dati nel campo C , siano portati a potenziali rispettivamente eguali ai potenziali di questi ultimi e si trovino immersi in un dielettrico isotropo di costante dielettrica eguale ad 1. Immaginiamo di più in C_r una carica spaziale distribuita con densità R , essendo R la funzione corrispondente di ρ :

$$(14) \quad R(P_r) = \rho(P).$$

Supponiamo di aver calcolato il potenziale Φ del campo elettrico in C_r ; questa funzione soddisfa in tutti i punti del campo all'equazione:

$$(15) \quad \Delta \Phi(P_r) = -4\pi R(P_r)$$

ed assume sulla superficie dei conduttori i valori costanti dati $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Consideriamo poi la funzione φ corrispondente di Φ , definita da:

$$(16) \quad \varphi(P) = \Phi(P_r).$$

Per la (13) e la (15) la funzione φ soddisfa in tutti i punti del campo C all'equazione:

$$\text{div } \alpha^2 \text{ grad } \varphi(P) = -4\pi \rho(P)$$

ed acquista sulla superficie dei conduttori i valori dati $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Essa

(1) Distribuzioni superficiali si presentano ora soltanto sulla superficie dei conduttori.

dunque rappresenta il potenziale del campo elettrico nel mezzo anisotropo, che ci proponevamo di determinare.

Per un'osservazione fatta, le superficie equipotenziali in C sono corrispondenti delle superficie equipotenziali in C_1 . Alle linee di forza in C_1 però corrispondono in C non le linee di forza (che sono ovviamente le traiettorie normali delle superficie equipotenziali ora determinate) ma le linee di spostamento. Infatti ad un elemento lineare di C_1 parallelo al vettore $\text{grad } \Phi(P_1)$ corrisponde un elemento lineare di C parallelo al vettore $\alpha \text{ grad } \Phi(P_1) = \alpha^2 \text{ grad } \varphi(P)$.

Fra le cariche dq e dQ di due corrispondenti elementi di volume intercede, in conseguenza della (9) e della (14), la relazione:

$$(17) \quad dq = I_3 \alpha dQ.$$

Questa medesima equazione lega anche le cariche di due corrispondenti elementi di superficie dei conduttori in C e in C_1 ⁽¹⁾; se ne deduce (tenendo conto della (8) e ricordando che, essendo α una dilatazione $R\alpha^{-1} = I_3 \alpha^{-1} \cdot \alpha$) che le densità superficiali di elettricità $\omega(P)$ ed $\Omega(P_1)$ soddisfano alla equazione:

$$(18) \quad \omega(P) = \text{mod } \alpha n \cdot \Omega(P_1).$$

Si deduce anche che se, anzichè i potenziali, sono date le cariche q_i dei singoli conduttori, la funzione $\Phi(P_1)$ andrà determinata colla condizione che le cariche dei corrispondenti conduttori in C_1 siano $Q_i = I_3 \alpha^{-1} \cdot q_i$.

5. Vediamo ora come il procedimento vada modificato quando in C siano presenti cariche puntiformi, lineari o superficiali in seno al dielettrico. Consideriamo perciò queste distribuzioni come casi limite della distribuzione volumetrica, che si presentano qualora una carica finita sia racchiusa in un volume infinitesimo; intendendosi con ciò che le tre dimensioni di questo, oppure soltanto due o una di esse, siano piccolissime rispetto alle altre grandezze, che entrano in considerazione.

I risultati del paragrafo precedente portano alle seguenti conclusioni:

a) Se in C vi è una carica e concentrata nel punto P , per determinare Φ dobbiamo immaginare concentrata nel punto P_1 , corrispondente di P , la carica

$$(19) \quad E = I_3 \alpha^{-1} \cdot e,$$

b) Se in C vi è una carica distribuita con densità lineare $\mu(P)$ lungo l'elemento ds , parallelo al vettore unitario τ , in C_1 dobbiamo immaginare

(1) Indicando coi medesimi simboli dq e dQ queste cariche, si ha infatti:

$$\begin{aligned} dq &= \mathbf{D} \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = \mathbf{D} \times d\mathbf{P} \wedge \partial\mathbf{P} = -\alpha \text{ grad } \Phi \times \alpha d\mathbf{P}_1 \wedge \alpha \partial\mathbf{P}_1 \\ dQ &= -\text{grad } \Phi \times d\mathbf{P}_1 \wedge \partial\mathbf{P}_1 \end{aligned}$$

da cui segue la (17).

una carica, distribuita lungo il corrispondente elemento ds_1 , con una densità $M(P_1)$ soddisfacente all'equazione:

$$M(P_1) ds_1 = I_3 \alpha^{-1} \cdot \mu(P) ds$$

da cui si deduce, per la (7)

$$(20) \quad M(P_1) = \frac{I_3 \alpha^{-1}}{\text{mod } \alpha^{-1} \tau} \mu(P).$$

c) Se in C vi è una carica distribuita con densità superficiale $\omega(P)$ sopra l'elemento $d\sigma$, normale al vettore unitario \mathbf{n} , in C_1 dobbiamo immaginare una carica distribuita sul corrispondente elemento $d\sigma_1$ con una densità $\Omega(P_1)$ soddisfacente all'equazione:

$$\Omega(P_1) d\sigma_1 = I_3 \alpha^{-1} \cdot \omega(P) d\sigma$$

da cui si deduce, per la (8):

$$(21) \quad \Omega(P_1) = \frac{\omega(P)}{\text{mod } \alpha \mathbf{n}} \quad (1).$$

6. Applichiamo il metodo esposto ad alcuni casi particolari e cominciamo col determinare il campo di una sola carica puntiforme e concentrata in un punto O di un mezzo omogeneo anisotropo indefinito. Il campo corrispondente in C_1 sarà in questo caso quello di una carica puntiforme $E = I_3 \alpha^{-1} \cdot e$ concentrata in O_1 . Si ha quindi:

$$(22) \quad \Phi(P_1) = \frac{I_3 \alpha^{-1} \cdot e}{\text{mod}(P_1 - O_1)}.$$

Le superficie equipotenziali sono le sfere:

$$(P_1 - O_1) \times (P_1 - O_1) = \text{cost.}$$

e le linee di forza sono semirette uscenti da O_1 . Ne segue che le superficie equipotenziali in C sono gli ellissoidi omotetici:

$$\alpha^{-1}(P - O) \times \alpha^{-1}(P - O) = \text{cost.}, \quad \text{ossia: } \alpha^{-2}(P - O) \times (P - O) = \text{cost.}$$

Gli assi di questi ellissoidi sono paralleli alle direzioni unite dell'omografia dielettrica ed hanno una lunghezza proporzionale alle radici delle componenti di questa omografia secondo tali direzioni. Le linee di spostamento sono rette uscenti da O . Le linee di forza, invece sono curve e costituiscono le traiettorie normali delle superficie equipotenziali. Il valore del potenziale, che si deduce dalla (22) è:

$$(23) \quad \varphi(P) = \frac{I_3 \alpha^{-1} \cdot e}{\text{mod } \alpha^{-1}(P - O)}.$$

(1) Avevamo già incontrato questa equazione a proposito della distribuzione superficiale di elettricità sui conduttori.

Si ricavano per la forza elettrica e lo spostamento le espressioni: ...

$$(24) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = I_3 \alpha^{-1} \cdot e \frac{\alpha^{-2} (P - O)}{[\text{mod } \alpha^{-1} (P - O)]^3} \quad (1)$$

$$(25) \quad \mathbf{D} = -\alpha^2 \text{grad } \varphi = I_3 \alpha^{-1} \cdot e \frac{P - O}{[\text{mod } \alpha^{-1} (P - O)]^3}.$$

Si ha da quest'ultima formula la conferma che le linee di spostamento sono rette passanti per O.

7. Proponiamoci ora di determinare il campo prodotto nel mezzo omogeneo anisotropo indefinito da una carica distribuita lungo il segmento AB, parallelo al vettore unitario τ , con densità lineare costante μ . Consideriamo perciò in C_1 una carica distribuita con densità lineare $M = \frac{I_3 \alpha^{-1}}{\text{mod } \alpha^{-1} \tau} \mu$ lungo il corrispondente segmento $A_1 B_1$. Il potenziale generato da questa carica nel punto P_1 è:

$$(26) \quad \Phi(P_1) = M \log \frac{\text{mod } (P_1 - A_1) + \text{mod } (P_1 - B_1) + \text{mod } (B_1 - A_1)}{\text{mod } (P_1 - A_1) + \text{mod } (P_1 - B_1) - \text{mod } (B_1 - A_1)}.$$

Le superficie equipotenziali sono ellissoidi di rotazione, aventi come equazione:

$$(27) \quad \text{mod } (P_1 - A_1) + \text{mod } (P_1 - B_1) = k$$

dove k è una costante positiva. Non è difficile riconoscere che questa equazione può mettersi sotto la forma:

$$(28) \quad \beta^{-1} (P_1 - O_1) \times (P_1 - O_1) = 1$$

dove O_1 è il punto di mezzo del segmento $A_1 B_1$ e la dilatazione β è definita da:

$$(29) \quad \beta = \frac{k^2 - (B_1 - A_1)^2}{4} + \frac{1}{4} H(B_1 - A_1, B_1 - A_1).$$

Per quanto abbiamo detto, segue dalla (26) che il potenziale in C ha l'espressione:

$$(30) \quad \varphi(P) = \frac{I_3 \alpha^{-1}}{\text{mod } \alpha^{-1} \tau} \mu \log \frac{\text{mod } \alpha^{-1} (P - A) + \text{mod } \alpha^{-1} (P - B) + \text{mod } \alpha^{-1} (B - A)}{\text{mod } \alpha^{-1} (P - A) + \text{mod } \alpha^{-1} (P - B) - \text{mod } \alpha^{-1} (B - A)}.$$

(1) Notiamo che, indicando con γ un'omografia qualunque, si ha:

$$\begin{aligned} \text{grad mod } \gamma(P - O) &= \text{grad } [\gamma(P - O) \times \gamma(P - O)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{mod } \gamma(P - O)} K \frac{d\gamma(P - O)}{dP} \gamma(P - O) \\ &= \frac{K\gamma \cdot \gamma(P - O)}{\text{mod } \gamma(P - O)}. \end{aligned}$$

Le superficie equipotenziali sono gli ellissoidi di equazione:

$$(31) \quad (\alpha\beta\alpha)^{-1} (P - O) \times (P - O) = 1$$

essendo, come si ricava facilmente dalla (29):

$$\alpha\beta\alpha = \frac{k^2 - \alpha^{-2}(B - A) \times (B - A)}{4} \alpha^2 + \frac{1}{4} H(B - A, B - A).$$

8. Nelle prossimità di O, cioè in punti la cui distanza degli estremi del segmento AB è grandissima rispetto alla distanza dal centro del segmento stesso, il campo coincide sensibilmente con quello che sarebbe prodotto da una carica distribuita colla medesima densità lineare costante lungo tutta la retta, a cui il segmento AB appartiene.

Seguendo il metodo precedentemente indicato si trova, dopo alcune semplificazioni, che in tal caso il potenziale ha l'espressione:

$$(32) \quad \varphi(P) = - \frac{2I_3\alpha^{-1}}{\text{mod } \alpha^{-1}\tau} \mu \log \text{mod } \alpha[\tau \wedge (P - O)] + \text{cost.}$$

Da cui, applicando l'osservazione della nota (7) all'omografia $\alpha(\tau \wedge)$, si deduce:

$$(33) \quad \mathbf{E} = - \text{grad } \varphi = - \frac{2I_3\alpha^{-1}}{\text{mod } \alpha^{-1}\tau} \mu \frac{\tau \wedge \alpha^2 [\tau \wedge (P - O)]}{\{\alpha[\tau \wedge (P - O)]\}^2}$$

$$(34) \quad \mathbf{D} = \alpha^2 \text{grad } \varphi = - \frac{2I_3\alpha}{\text{mod } \alpha^{-1}\tau} \mu \frac{\alpha^{-2}\tau \wedge [\tau \wedge (P - O)]}{\{\alpha[\tau \wedge (P - O)]\}^2}.$$

Si deduce dall'esame di queste formule (o si riconosce direttamente considerando il campo ausiliario nel mezzo isotropo C_r e tenendo conto delle relazioni, che intercedono fra questo e il campo nel mezzo anisotropo) che le superficie equipotenziali sono cilindri ellittici, aventi le generatrici parallele a τ e tangenti agli ellissoidi $\alpha^{-2}(P - O) \times (P - O) = \text{cost.}$; che le linee di forza sono curve giacenti in piani normali a τ ; che le linee di spostamento sono rette normali al vettore $\alpha^{-2}\tau$.

9. Abbiassi infine in C un conduttore a forma di ellissoide, di equazione:

$$\beta^{-2}(P - O) \times (P - O) = 1$$

e sia q la sua carica totale. Per determinarne il campo, consideriamo il conduttore corrispondente in C_r , di equazione:

$$(35) \quad \gamma^{-2}(P_r - O_r) \times (P_r - O_r) = 1$$

(dove si è posto per brevità $\gamma^2 = \alpha^{-1}\beta^2\alpha^{-1}$) ed immaginiamolo carico della quantità di elettricità $Q = I_3\alpha^{-1} \cdot q$. Si sa che le superficie equipotenziali, nel campo C_r costituiscono una famiglia di ellissoidi omofocali, di equazione:

$$(\gamma^2 + \lambda)^{-1}(P_r - O_r) \times (P_r - O_r) = 1$$

dove λ rappresenta un parametro positivo. La densità di elettricità in un punto P_1 della superficie del conduttore è:

$$(36) \quad \Omega(P_1) = \frac{Q}{4\pi I_1 \gamma \bmod \gamma^{-2}(P_1 - O_1)}.$$

Tralasciando, per brevità, il calcolo del potenziale, della forza elettrica e dello spostamento, passiamo alla determinazione delle superficie equipotenziali nel mezzo anisotropo e della distribuzione dell'elettricità sul conduttore in esso immerso. L'equazione delle prime, che si deduce dalla (35), è:

$$(37) \quad (\beta^2 + \lambda\alpha^2)^{-1}(P - O) \times (P - O) = 1.$$

Quanto alla densità di elettricità, si ricava dalla (36), tenendo conto della (21), dopo facili riduzioni:

$$(38) \quad \omega(P) = \frac{q}{4\pi I_1 \beta} \frac{\bmod \alpha n}{\bmod \alpha \beta^{-2}(P - O)}$$

n è un vettore unitario, normale alla superficie del conduttore. Si ha quindi:

$$n = \frac{\text{grad} [\beta^{-2}(P - O) \times (P - O)]}{\bmod \text{grad} [\beta^{-2}(P - O) \times (P - O)]} = \frac{\beta^{-2}(P - O)}{\bmod \beta^{-2}(P - O)},$$

e, sostituendo nella (38):

$$(39) \quad \omega(P) = \frac{q}{4\pi I_1 \beta} \frac{1}{\bmod \beta^{-2}(P - O)}.$$

Giungiamo così alla seguente notevole conclusione:

La distribuzione dell'elettricità sopra un ellissoide conduttore immerso in un mezzo omogeneo anisotropo indefinito è indipendente dall'omografia dielettrica del mezzo e coincide con quella che si presenta quando il dielettrico è isotropo.

Se l'ellissoide si riduce alla sfera di raggio r

$$r^{-2}(P - O) \times (P - O) = 1$$

la distribuzione dell'elettricità sulla superficie del conduttore risulta uniforme; le superficie equipotenziali sono in tal caso gli ellissoidi di equazione:

$$(r^2 + \lambda\alpha^2)^{-1}(P - O) \times (P - O) = 1.$$

I loro assi coincidono colle direzioni unite dell'omografia dielettrica.

10. Tralasciamo la trattazione di altri casi particolari, che potrebbe essere condotta in modo del tutto simile. Ci basta far rilevare come il metodo, che abbiamo esposto ed illustrato con alcuni esempi permetta in ogni caso di ricondurre il problema della determinazione del campo in un mezzo anisotropo ad un problema analogo relativo ad un mezzo isotropo.

Fisica. — *Sul nuovo fenomeno di diffusione.* Nota di A. CARRELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio M. CANTONE.

Il Raman ⁽²⁾ ha recentemente accertato, mediante accurate esperienze, che la luce diffusa lateralmente da un liquido non ha la stessa frequenza della radiazione primaria. Esclusa la possibilità di un fenomeno di fluorescenza, egli ha potuto stabilire usando in un primo tempo luce bianca che si aveva emissione di radiazioni di aumentata lunghezza d'onda, accertandosi della variazione suddetta col metodo del doppio filtro di Stokes; poscia con l'impiego di luce monocromatica ha stabilito che la variazione di lunghezza d'onda ha valori ben determinati; egli in effetti ha osservato, oltre la riga della stessa frequenza della riga incidente, righe spostate verso le lunghezze d'onda crescenti. Pare che tale fenomeno sia accompagnato da uno spettro continuo, ed è da notare infine che gli spostamenti sono notevoli. Il Raman ⁽³⁾ considera questa nuova radiazione come originata da un effetto Compton che nella zona visibile si presenterebbe più cospicuo; il Rocard e il Cabannes invece considerano questo fenomeno come un battimento ottico, cioè come dovuto alla sovrapposizione alla frequenza ν della luce eccitatrice di frequenze caratteristiche delle molecole del liquido. In effetti in quelli sottoposti da Raman all'osservazione si ha ragione di ritenere che esse abbiano molecole contenenti dipoli oscillanti con caratteristiche frequenze. I suddetti autori si fondano nelle loro considerazioni sulla teoria classica, e fanno un calcolo approssimativo delle intensità delle due frequenze, quella maggiore e quella minore della frequenza della luce eccitatrice, trovandole uguali. Lo scopo di questa Nota è di stabilire in primo luogo se l'interpretazione proposta da Cabannes e Rocard può accettarsi, e ciò mediante il calcolo delle intensità relative alle varie frequenze in base alle teorie recenti della diffusione; e poscia di stabilire relazioni passanti fra l'intensità della luce diffusa della stessa frequenza e l'intensità di questa nuova radiazione diffusa.

L'effetto Raman sarebbe in realtà il fenomeno di diffusione di frequenze di combinazione $\nu + \nu_{QP}$, $\nu - \nu_{QP}$ dove ν_{QP} è una frequenza caratteristica dell'atomo o molecola che diffonde il fenomeno previsto da Smekal e studiato nelle sue particolarità da Heisenberg e Kramers e da Schrödinger.

Per il calcolo delle intensità abbiamo dinanzi a noi due possibilità, o riferirci alla teoria della dispersione sviluppata con la meccanica di Heisenberg, o riferirci alla teoria sviluppata da Schrödinger in base alla concezione

(1) Nella seduta del 17 giugno 1928.

(2) *Nature*, maggio 1928.

(3) « *Compt. Rend.* », to. 186, pp. 1107, 1201 (1928).

ondulatoria; con entrambi i procedimenti si ritrovano le formule ben note della teoria classica, ma si prevedono ancora due effetti e precisamente la cosiddetta « dispersione negativa » e la diffusione della luce con frequenze diverse da quella incidente. Tra le due teorie però vi sono, com'è ben noto, diversità notevoli; noi tratteremo questo problema con la meccanica delle matrici; supponiamo un atomo che si trovi nello stato energetico P e che su questo atomo arrivi radiazione elettromagnetica il cui campo elettrico parallelo all'asse x sia dato dall'espressione $E \cos 2\pi\nu t$. Domandiamo quale è il valore del momento elettrico dell'atomo parallelamente allo stesso asse x : la teoria giunge alla conclusione che vi sarà un momento variabile di frequenza ν uguale a quella della radiazione incidente, ma inoltre un momento variabile con frequenze diverse $\nu + \nu_{PQ}$ e $\nu - \nu_{PQ}$. I due momenti, quello variabile con la stessa frequenza ν e quello variabile con frequenze diverse sono dati dalle espressioni

$$M_P = \left[\frac{1}{2\hbar} \sum_{E_Q > E_P} \frac{(a_{PQ})^2 \nu_{QP}}{\nu_{QP}^2 - \nu^2} - \frac{1}{2\hbar} \sum_{E_P > E_Q} \frac{(a_{PQ})^2 \nu_{PQ}}{\nu_{PQ}^2 - \nu^2} \right] E \cos 2\pi\nu t$$

e

$$\begin{aligned} M'_P = & \left[\frac{1}{4\hbar} \sum_R \sum_{E_Q < E_P + h\nu} \left(\frac{a_{QR} a_{RP}}{\nu_{RQ} + \nu} - \frac{a_{RP} a_{QR}}{\nu_{PR} + \nu} \right) \right] E \cos 2\pi(\nu + \nu_{PQ})t + \\ & + \left[\frac{1}{4\hbar} \sum_R \sum_{E_Q < E_P - h\nu} \left(\frac{a_{RP} a_{QR}}{\nu_{RP} + \nu} - \frac{a_{RP} a_{QR}}{\nu_{QR} + \nu} \right) \right] E \cos 2\pi(\nu - \nu_{PQ})t. \end{aligned}$$

La pressione di queste frequenze distinte è essenzialmente dipendente dal fatto che oltre un certo numero di monadi, siano essi atomi o molecole, nello stato P, un certo numero di essi è negli stati energetici Q.

Ora noi per semplicità consideriamo un caso schematico perchè da questo poi non è difficile passare a quelli che sono stati riscontrati in realtà, e supponiamo per fissare le idee che vi sia un certo numero di molecole nello stato energetico più basso, lo stato 1, ed inoltre un certo numero di molecole nello stato 2. Per giungere a risultati confrontabili con quelli dell'esperienza noi consideriamo questi due livelli energetici molto vicini fra di loro; abbiamo inoltre stati stazionari distinti da questi (1 e 2) e tali che $E_n - E_1, E_n - E_2 \gg E_2 - E_1$.

In sostanza noi consideriamo due stati energetici vicini 1 e 2 quali due stati vibratorii diversi di una molecola ed inoltre stati energetici n distinti corrispondenti a vari salti elettronici. Abbiamo da considerare in tali condizioni il momento elettrico relativo agli atomi nello stato 1 con possibilità di variazioni nello stato 2 e quindi con frequenze di combinazione, ed il momento elettrico relativo agli atomi nello stato 2 con le stesse possibilità di variazioni. Noi supporremo che ν frequenza della luce eccitatrice sia di poco

inferiore alle frequenze dei salti elettronici e quindi molto maggiore di

$$\nu_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h}.$$

Consideriamo il valore di M_1 ; questo diventa

$$M_1 = \left[\frac{1}{2h} \frac{(a_{12})^2 \nu_{21}}{\nu_{21}^2 - \nu^2} + \frac{1}{2h} \sum_n \frac{a_{1n} \nu_{n1}}{\nu_{n1}^2 - \nu^2} \right] E \cos 2\pi \nu t.$$

In M_1 la sommatoria rispetto a Q si riduce ad unico termine e dei due tipi di frequenze $\nu + \nu_{PQ}$, $\nu + \nu_{QP}$, che in questo caso si riducono a $\nu - \nu_{21}$, $\nu + \nu_{21}$, compare soltanto il primo, poichè abbiamo ammesso

$$\nu_{21} < \nu \quad \text{cioè} \quad E_Q < E_P + h\nu.$$

Dunque otteniamo

$$M'_1 = \left[\frac{1}{4h} \sum_n \left(\frac{a_{2n} a_{1n}}{\nu_{n2} + \nu} - \frac{a_{2n} a_{1n}}{\nu_{n1} + \nu} \right) \right] E \cos 2\pi(\nu - \nu_{21})t.$$

Consideriamo ora gli altri due momenti dovuti alle molecole che si trovano nello stato 2 e cioè M_2 e M'_2 . Per M_2 si ha evidentemente

$$M_2 = \left[\frac{1}{2h} \sum_n \frac{(a_{n2})^2 \nu_{n2}}{\nu_{n2}^2 - \nu^2} - \frac{(a_{21})^2 \nu_{21}}{\nu_{21}^2 - \nu^2} \right] E \cos 2\pi \nu t.$$

Per M'_2 dobbiamo tener presente che in questo caso $P = 2$ e $Q = 1$ quindi $E_P > E_Q$; anche ora la sommatoria rispetto a Q si riduce ad un unico termine, ed in questo caso delle due frequenze $\nu + \nu_{PQ}$ e $\nu + \nu_{QP}$ può ottenersi solo la $\nu + \nu_{PQ} = \nu + \nu_{21}$ perchè la $\nu + \nu_{QP}$ può comparire solo per $E_Q < E_P - h\nu$ cioè per $\nu < \nu_{21}$ mentre ora abbiamo $\nu \gg \nu_{21}$.

M'_2 dunque diventa

$$M'_2 = \left[\frac{1}{4h} \sum_n \left(\frac{a_{2n} a_{1n}}{\nu_{n1} + \nu} - \frac{a_{2n} a_{1n}}{\nu_{n2} + \nu} \right) \right] E \cos 2\pi(\nu + \nu_{21})t.$$

Supponiamo che sia N il numero di molecole dell'unità di volume e di queste N_1 si trovino nello stato 1 e N_2 nello stato 2, il momento elettrico dell'unità di volume sarà dato da

$$N_1 M_1 + N_1 M'_1 + N_2 M_2 + N_2 M'_2$$

e cioè per la parte variabile con la frequenza ν

$$\frac{1}{2h} \left\{ (N_1 - N_2) \frac{(a_{12})^2 \nu_{21}}{\nu_{21}^2 - \nu^2} + N_1 \sum_n \frac{(a_{n1})^2 \nu_{n1}}{\nu_{n1}^2 - \nu^2} + N_2 \sum_n \frac{(a_{n2})^2 \nu_{n2}}{\nu_{n2}^2 - \nu^2} \right\} E \cos 2\pi \nu t$$

per la parte variabile con la frequenza $\nu - \nu_{21}$

$$\frac{N_1}{4h} \sum_n \frac{a_{2n} a_{1n} \nu_{21}}{(\nu + \nu_{n2})(\nu - \nu_{n1})} E \cos 2\pi(\nu - \nu_{21})t$$

e per la parte variabile con la frequenza $\nu + \nu_{21}$

$$\frac{N_2}{4h} \sum_n \frac{a_{2n} a_{1n} \nu_{21}}{(\nu + \nu_{n1})(\nu - \nu_{n1})} E \cos 2\pi(\nu + \nu_{21})t.$$

È interessante notare che nel caso che $N_2 = 0$ e cioè tutti gli atomi si trovano nello stato 1 non soltanto si annulla l'irraggiamento con frequenza $\nu + \nu_{21}$, ma anche quello con frequenza $\nu - \nu_{21}$, perchè nel momento elettrico compaiono le quantità a_{2n} che diventano nulle nel caso che nessun atomo si trovi nello stato 2 e quindi non è possibile parlare di ampiezza a_{2n} corrispondente al salto $2 \rightarrow n$. È cioè indispensabile per la comparsa di tutte e due le frequenze di combinazione che tutte e due le grandezze a_{1n} , a_{2n} siano diverse da zero. In base alle formule scritte si può passare facilmente al calcolo delle intensità ricordando che

$$\frac{1}{2h} (a_{1n})^2 \nu_{n1} = \frac{e^2}{4\pi^2 m} f_{n1}$$

quindi

$$a_{1n} = \left(\frac{2h}{\nu_{n1}} \frac{e^2}{4\pi^2 m} f_{n1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le formole scritte precedentemente, indicando $\frac{N_1}{N}$ e $\frac{N_2}{N}$ con F_1 e F_2 e

$$\left(\frac{f_{n2} f_{n1} \nu_{21}^2}{\nu_{n1} \nu_{n2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{con } f_{n21},$$

diventano

$$\frac{e^2 N}{4\pi^2 m} \left\{ \frac{(F_1 - F_2) f_{21}}{\nu_{21}^2 - \nu^2} + F_1 \sum_n \frac{f_{1n}}{\nu_{n1}^2 - \nu^2} + F_2 \sum_n \frac{f_{2n}}{\nu_{n2}^2 - \nu^2} \right\} E \cos 2\pi \nu t = N \alpha E \cos 2\pi \nu t$$

$$\frac{N}{2} \frac{e^2 F_1}{4\pi^2 m} \left\{ \sum_n \frac{f_{n21}}{(\nu + \nu_{n2})(\nu - \nu_{n1})} \right\} E \cos 2\pi(\nu - \nu_{21})t = N \alpha_- E \cos 2\pi(\nu - \nu_{21})t$$

$$\frac{N}{2} \frac{e^2 F_2}{4\pi^2 m} \left\{ \sum_n \frac{f_{n21}}{(\nu + \nu_{n1})(\nu - \nu_{n2})} \right\} E \cos 2\pi(\nu + \nu_{21})t = N \alpha_+ E \cos 2\pi(\nu + \nu_{21})t.$$

Ora il rapporto fra la intensità della luce incidente e quella della luce diffusa dalla monade con frequenza ν è proporzionale a $\alpha^2 \nu^4$; lo stesso rapporto relativo all'unità di volume è dato da $N \alpha^2 \nu^4$; per la luce diffusa con frequenza $\nu - \nu_{21}$ si ha invece la espressione $N \alpha_-^2 (\nu - \nu_{21})^4$, quindi fra le intensità della luce diffusa con le frequenze ν e $\nu - \nu_{21}$ passa il rapporto

$$\frac{I_-}{I} = \left(\frac{\nu - \nu_{21}}{\nu} \right)^4 \frac{\alpha_-^2}{\alpha^2}$$

e fra le intensità delle due luci di frequenza $\nu + \nu_{21}$ e $\nu - \nu_{21}$ il rapporto

$$\frac{I_+}{I_-} + \left(\frac{\nu + \nu_{21}}{\nu - \nu_{21}} \right)^4 \frac{\alpha_+^2}{\alpha_-^2}$$

Per semplificare ancora i calcoli supponiamo che si possa considerare la molecola con un sol centro di assorbimento nell'ultravioletto. La sommatoria rispetto a n si riduce ad unico termine ed inoltre $f_{n1} = f_{n2} = 1$, quindi, almeno in prima approssimazione:

$$\alpha = \frac{e^2 F_1}{4 \pi^2 m} \frac{1}{\nu_{1n}^2 - \nu^2} + \frac{e^2 F_2}{4 \pi^2 m} \frac{1}{\nu_{2n}^2 - \nu^2}$$

supponendo $\frac{1}{\nu_{21}^2 - \nu^2}$ trascurabili rispetto a $\frac{1}{\nu_{1n}^2 - \nu^2}$ perchè $\nu_{1n} \sim \nu$ e $\nu_{21} \ll \nu$; si ottiene inoltre

$$\alpha_- = \frac{1}{2} \frac{e^2 F_1}{4 \pi^2 m} \frac{f_{21n}}{(\nu + \nu_{n2})(\nu - \nu_{n1})}$$

$$\alpha_+ = \frac{1}{2} \frac{e^2 F_2}{4 \pi^2 m} \frac{f_{21n}}{(\nu + \nu_{n1})(\nu - \nu_{n2})}.$$

Il numero di monadi nello stato 2 è sempre molto piccolo in rapporto al numero di nomadi nello stato 1; in prima approssimazione si può quindi ritenere

$$\alpha = \frac{e^2}{4 \pi^2 m} \frac{1}{\nu_{1n}^2 - \nu^2}$$

quindi

$$\frac{I_-}{I} = \frac{f_{21n}^2 (\nu_{1n}^2 - \nu)^2}{4 (\nu + \nu_{n2})^2 (\nu - \nu_{n1})^2} \left(\frac{\nu - \nu_{21}}{\nu} \right)^4$$

cioè poichè senza grande errore può porsi $(\nu + \nu_{n2})(\nu - \nu_{n1}) = \nu^2 - \nu_{n1}^2$,

$$\frac{I_-}{I} \sim \frac{1}{4} \frac{\nu_{n1}^2}{\nu_{n1} \nu_{n2}}$$

$$\frac{I_+}{I_-} \sim \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

Otteniamo dunque: l'intensità della luce diffusa con lunghezza d'onda maggiore ha un'intensità che dipende principalmente dal quadrato del rapporto delle frequenze dell'ultrarosso ν_{21} e dell'ultravioletto ν_{n1}, ν_{n2} .

Supponendo che la frequenza ν_{n1} corrisponda a circa 300 $\mu\mu$ e che la frequenza ν_{21} corrisponda a circa 3 μ si ottiene un'intensità della luce di Raman che è all'incirca 2.5×10^{-3} volte più piccola dell'intensità della luce di Tyndall. Inoltre il rapporto delle intensità fra la luce di frequenza

maggiore e quella minore è data dal quadrato del rapporto delle due concentrazioni atomiche nei due stati 1 e 2.

Concludendo: l'effetto Raman può considerarsi quale irraggiamento diffuso previsto dalla teoria quantistica della diffusione; e si arriva così a prevedere un'intensità della luce di Raman molto inferiore a quella ordinaria. Il numero di righe che si osservano dipende dal numero di frequenze caratteristiche della monade nell'ultravioletto; ma se l'interpretazione data è giusta deve anche riscontrarsi nella luce diffusa la presenza di frequenze maggiori di quella eccitatrice, la cui intensità però è minore di quella delle frequenze che seguono la legge di Stokes.

Ricerche ulteriori potranno confermare i risultati esposti in questa Nota.

Fisica. — *La risonanza ottica secondo la meccanica ondulatoria.* Nota II di E. PERSICO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. GAR-BASSO.

Riprendiamo le equazioni (12) e (12') della Nota I ⁽²⁾ e scriviamole, ponendo in evidenza i moduli ρ e gli argomenti θ delle λ , mediante le (4). Dividendo le equazioni rispettivamente per $e^{i\theta'}$ ed $e^{i\theta_j''}$ e ponendo anche ora $\theta_j'' - \theta' = \theta_j$ ($j = 1, 2, 3$) avremo

$$\dot{\rho}' + i\rho'\dot{\theta}' = A\rho' \sum_k \rho_k''^2 + \frac{\pi i}{h} P \sum_k A_k \rho_k'' e^{-i[(\omega - \omega_0)t - \theta_k]}$$

$$\dot{\rho}_j'' + i\rho_j''\dot{\theta}_j'' = -A\rho_j'' \rho'^2 + \frac{\pi i}{h} P A_j \rho' e^{i[(\omega - \omega_0)t - \theta_j]} \quad (j = 1, 2, 3)$$

ovvero, separando le parti reali da quelle immaginarie

$$(13) \quad \dot{\rho}' = A\rho' \sum_k \rho_k''^2 + \frac{\pi}{h} P \sum_k A_k \rho_k'' \sin [(\omega - \omega_0)t - \theta_k]$$

$$(13') \quad \dot{\rho}_j'' = -A\rho_j'' \rho'^2 + \frac{\pi}{h} P A_j \rho' \sin [(\omega - \omega_0)t - \theta_j]$$

$$\dot{\theta}' = \frac{\pi}{h} P \sum_k A_k \frac{\rho_k''}{\rho'} \cos [(\omega - \omega_0)t - \theta_k]$$

$$\dot{\theta}_j'' = \frac{\pi}{h} P A_j \frac{\rho'}{\rho_j''} \cos [(\omega - \omega_0)t - \theta_j] \quad (j = 1, 2, 3).$$

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) Questi « Rendiconti », fasc. 1-2, 2° sem., 1928, p. 55.

Poichè in queste equazioni non figurano separatamente θ_j'' e θ_j' , ma solo la loro differenza θ_j , conviene sostituire alle ultime due equazioni quella ottenuta sottraendole membro a membro, e cioè

$$(14) \quad \dot{\theta}_j = \frac{\pi}{h} P \left\{ A_j \frac{\rho_j'}{\rho_j''} \cos [(\omega - \omega_0) t - \theta_j] - \sum_k A_k \frac{\rho_k''}{\rho_j'} \cos [(\omega - \omega_0) t - \theta_k] \right\} \\ (j = 1, 2, 3).$$

Si tratta di integrare il sistema di equazioni (13), (13'), (14) e di sostituire nella (8') i valori trovati per ρ' per le ρ'' e le θ'' , per avere le caratteristiche della radiazione emessa.

A tale scopo osserviamo anzitutto che nel secondo membro di (13') il primo termine rappresenta il decremento di ρ_j'' (o del numero di atomi eccitati nello stato u_j) dovuto alla tendenza spontanea che essi hanno a passare nello stato inferiore: il secondo termine invece rappresenta l'aumento di ρ_j'' dovuto all'azione eccitatrice della luce incidente. È naturale ammettere che nello stato di regime queste due cause di variazione debbano equilibrarsi e che quindi le ρ_j'' (e quindi anche ρ') si mantengano costanti. Cerchiamo quindi una soluzione particolare del sistema, che renda $\rho' = \rho_j'' = 0$. Si vede subito che le equazioni (13) e (13') sono soddisfatte supponendovi le ρ costanti, e inoltre le θ_j tali che

$$(15) \quad (\omega - \omega_0) t - \theta_j = \alpha_j = \text{cost.} \quad (j = 1, 2, 3).$$

I valori delle α_j saranno ricavati dalle (14). Abbiamo dunque il seguente sistema di relazioni fra le costanti ρ' , ρ_1'' , ρ_2'' , ρ_3'' , α_1 , α_2 , α_3 :

$$(16) \quad 0 = A\rho' \sum_k \rho_k''^2 + \frac{\pi}{h} P \sum_k A_k \rho_k'' \sin \alpha_k$$

$$(16') \quad 0 = -A\rho_j'' \rho_j' + \frac{\pi}{h} P A_j \sin \alpha_j \\ (17) \quad \frac{h}{\pi P} (\omega - \omega_0) = A_j \frac{\rho_j'}{\rho_j''} \cos \alpha_j - \sum_k A_k \frac{\rho_k''}{\rho_j'} \cos \alpha_k \quad \left. \vphantom{\frac{h}{\pi P} (\omega - \omega_0)} \right\} (j = 1, 2, 3)$$

cui va aggiunta la (5). Si noti però che la (16) è una conseguenza delle (16'), il che è legato all'esistenza dell'integrale primo già rilevato.

Tra le (16') e le (17) possiamo eliminare le α per procurarci le ρ'' , e la risoluzione può farsi rigorosamente senza difficoltà. Ma poichè, nelle circostanze fisicamente realizzabili, le ρ'' sono assai piccole rispetto a ρ' , il che corrisponde a dire che solo una piccola frazione degli atomi è eccitata, noi potremo limitarci a trovare una soluzione approssimata, trascu-

rando $\left(\frac{\rho''}{\rho'}\right)^2$, e ritenendo ρ' uguale a 1. Con tale approssimazione, si ricava da (16') e (17)

$$A\rho_j'' = \frac{\pi P}{h} A_j \sin \alpha_j$$

$$(\omega - \omega_0) \rho_j'' = \frac{\pi P}{h} A_j \cos \alpha_j$$

da cui, quadrando e sommando, e risolvendo poi rispetto a ρ_j'' ,

$$(18) \quad \rho_j'' = \frac{\pi P}{h} \frac{A_j}{\sqrt{A^2 + (\omega - \omega_0)^2}}.$$

Dalle stesse equazioni si ricavano le α_j (il cui significato fisico si vedrà tra breve) che sono tutte eguali fra loro e perciò le indicheremo tutte con α : esse sono date da

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{\omega - \omega_0}.$$

Risulta perciò dalla (15) che anche le θ_j sono tutte eguali tra di loro, e date da

$$\theta_j = (\omega - \omega_0) t - \alpha.$$

Per conoscere ora le caratteristiche della radiazione di risonanza, riprendiamo l'espressione (8') delle componenti del momento elettrico che dà origine (secondo il modello di Schrödinger) alla radiazione stessa, e poniamovi $\rho' = 1$ e per ρ_j'' , θ_j i valori dati dalle formule (17) e (15) (ove in essa si cambi l'indice j con l). Osserviamo anzitutto che l'argomento del coseno diviene

$$\omega_0 t + \theta_l = \omega_0 t + (\omega - \omega_0) t - \alpha = \omega t - \alpha$$

e la (8) si scrive quindi

$$(20) \quad p_l = \frac{2\pi e P}{h} \frac{A_l}{\sqrt{A^2 + (\omega - \omega_0)^2}} \cos(\omega t - \alpha).$$

Adunque la variabilità di θ_l col tempo fa sì che la frequenza della luce di risonanza non sia $\omega_0/2\pi$, cioè quella dell'emissione spontanea, ma $\omega/2\pi$ cioè quella della luce incidente. Si osservi che questo risultato è quello stesso a cui condurrebbe la teoria puramente classica, basata sulle oscillazioni forzate di un risonatore, mentre la teoria quantistica di Bohr, secondo la quale l'atomo, portato nello stato di eccitazione dalla luce incidente, emette la luce di risonanza nel tornare allo stato naturale, farebbe prevedere evidentemente il contrario. Il fatto sperimentale che la luce di risonanza

nanza è coerente alla luce eccitatrice (fatto provato dal fenomeno della riflessione di risonanza) dimostra che la frequenza emessa è precisamente quella della luce incidente, conformemente alla nostra teoria.

Dalla (20) poi si vede che le p_i sono proporzionali alle A_i , il che significa che la luce di risonanza è polarizzata come la luce incidente (qualunque sia la direzione di osservazione) e che la sua intensità è proporzionale all'intensità di questa. Ora, l'esperienza ha mostrato che, quando si escluda accuratamente qualsiasi campo magnetico, la luce di risonanza è effettivamente polarizzata nella direzione di quella incidente. Infine dalla (20) si può ricavare l'intensità della luce di risonanza in funzione della frequenza $\omega/2\pi$ della luce incidente, e si vede che essa è proporzionale a

$$(21) \quad \frac{I}{\sqrt{A^2 + (\omega - \omega_0)^2}}.$$

Questa funzione rappresenta una curva della solita forma a campana, col massimo (finito) per $\omega = \omega_0$. Se, come avviene generalmente, la luce incidente non è rigorosamente monocromatica, ma presenta uno spettro continuo o una riga piuttosto larga, talchè in vicinanza di ω_0 la sua intensità possa ritenersi uniforme, allora anche la luce di risonanza non è rigorosamente monocromatica, e la sua distribuzione spettrale è rappresentata dalla funzione (21) la quale rappresenta quindi anche la distribuzione dell'assorbimento nello spettro della luce incidente. La « larghezza » della riga d'assorbimento (cioè il doppio dello scarto $(\omega - \omega_0)$ per il quale l'intensità è metà della massima) risulta $2A$, e quindi, nella scala delle vere frequenze, A/π , e poichè $0.18 A$ è la larghezza naturale della riga emessa spontaneamente, si può dire che la larghezza naturale della riga di risonanza nelle condizioni predette sia circa $5/3$ di quella della riga di emissione spontanea. Questa larghezza risulta ad ogni modo trascurabile rispetto a quella prodotta dall'effetto Doppler, anche a temperatura ordinaria (p. es., per la D_2 del Na la larghezza naturale della riga di risonanza è $7.5 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$, mentre l'effetto Doppler produce un allargamento dell'ordine di $400 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$). Ciò è d'accordo con le esperienze di Dunoyer e Wood, e di Strutt i quali, misurando la larghezza della riga di risonanza a 550° assoluti e tenendo conto dell'effetto Doppler, hanno concluso che la larghezza allo zero assoluto sarebbe (entro i limiti di accuratezza delle misure) nulla.

Chimica. — *La separazione dell'ittrio puro dalle terre ittriche* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di G. CANNERI, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Numerosi sono i metodi finora adoperati per separare grossolanamente l'ittrio dalle altre terre. Se però è relativamente facile arrivare ad una miscela di ittrio, erbio, olmio e tulio con grande prevalenza del primo, non è cosa altrettanto facile ottenere dell'ittrio perfettamente esente da questi elementi che tenacemente lo accompagnano. I più recenti lavori sull'argomento hanno appunto messo in rilievo tale difficoltà. I preparativi che tanto Auer von Welsbach quanto Prandtl hanno fornito ad Hönigschmid e Meuwsen ⁽³⁾ per la revisione del peso atomico di questo elemento, erano stati ottenuti sottoponendo il materiale, già preventivamente arricchito, ai più svariati metodi di purificazione.

Durante alcune mie precedenti ricerche sopra la formazione di carbonati doppi degli elementi delle terre ho avuto modo di rilevare la profonda differenza di comportamento che l'ittrio mostra di fronte agli altri specialmente per quanto riguarda il grado di solubilità del carbonato nelle soluzioni dei carbonati alcalini e il grado di stabilità dei carbonati doppi di fronte all'azione idrolizzante dell'acqua. Da tali osservazioni mi persuasi che un metodo di purificazione dell'ittrio fondato sopra l'idrolisi dei carbonati doppi o sulla cristallizzazione frazionata dei medesimi, avrebbe condotto, con molta probabilità, a risultati soddisfacenti. Per ragioni di opportunità pratica scelsi il carbonato sodico come mezzo precipitante e dai primi assaggi sperimentali mi apparve subito di gran lunga preferibile il metodo della cristallizzazione frazionata a quello della idrolisi parziale che offre difficoltà sperimentali tali da annullare qualsiasi vantaggio di fronte ad altri metodi molto più spediti.

Questo da me introdotto, per quanto mi consta, per la prima volta alla separazione delle terre ittriche, non presenta difficoltà sperimentali che superino quelle che si incontrano nell'impiego di metodi che si fondano sopra la separazione di prodotti ben cristallizzati dalle loro acque madri. I carbonati doppi col sodio precipitano per riscaldamento dei liquidi limpidi ottenuti aggiungendo alle soluzioni nitriche fredde delle terre tanta soluzione di carbonato sodico fino a ridisciogliere il precipitato formatosi, e si spremono alla pompa con grande facilità. La cristallizzazione del liquido contenente in soluzione la terra si fa avvenire per riscaldamento moderato e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1928.

(3) «Z. anorg. allgem. chem.», 140-341 (1924).

separando successivamente le diverse porzioni meno solubili. Tali porzioni si uniscono poi rispettivamente con quelle che provengono dalle frazioni adiacenti nello schema solito di frazionamento. Una certa pratica del metodo permette allo sperimentatore di poter giudicare dell'entità della massa solida separatasi durante il riscaldamento e di provvedere in tempo giusto al filtraggio, onde suddividere la frazione totale in parti tra loro proporzionali. Il riscaldamento prolungato porta alla precipitazione completa della massa disciolta in modo che, solo per una misura di prudenza, quando si presume che la separazione sia stata completa, si neutralizza con acido minerale il liquido e si saggia poi con acido ossalico.

Il materiale da me adoperato era costituito da nove frazioni, (in tutto gr. 500 di ossidi), ottenute suddividendo le tre frazioni di coda provenienti da una diecina di chilogrammi di ossidi della gadolinite che avevano subito i seguenti processi di preliminarizzare arricchimento. Mediante i doppi solfati col potassio si era eliminata la massima parte delle terre ceriche. La successiva cristallizzazione dei doppi nitrati col magnesio, fino ad ottenere delle frazioni di coda incristallizzabili, permise di arricchire notevolmente quest'ultime delle terre ittriche. In fine la precipitazione degli ossalati, in soluzione nitrica, condusse ad una frazione estrema il cui ossido aveva un peso atomico di 108.

Ero così pervenuto ad un prodotto molto ricco in ittrio. Infatti la soluzione concentrata dava uno spettro debole di assorbimento nel quale si potevano agevolmente riconoscere le bande caratteristiche dell'erbio e dell'olmio. E presumibile che in questa frazione estrema e, più che mai, nelle due adiacenti, che furono poi anche queste prelevate per l'ulteriore frazionamento, fossero contenuti oltre il tulio anche terbio ed itterbio. I due ultimi avrebbero dovuto concentrarsi nelle frazioni intermedie.

Furono, come ho detto, prelevate le ultime tre frazioni di coda e poichè contenevano tracce di cerio, che a differenza delle altre terre ceriche non si era potuto allontanare in modo completo, ne furono liberate in modo quantitativo mediante la precipitazione con ammoniaca diluita in presenza di acqua ossigenata. Dopo questo trattamento ciascuna delle tre frazioni, preventivamente sciolta sotto forma di doppio carbonato col sodio, dette origine ad altre tre frazioni che furono poi razionalmente ordinate per costituire, nello schema, le nove frazioni di partenza.

Dopo circa trenta serie di cristallizzazioni, durante le quali i prodotti più solubili, l'ittrio, venivano a raccogliersi nelle frazioni di coda, la frazione estrema fornì un ossido perfettamente bianco, che in soluzione nitrica satura a caldo e sotto un forte spessore, non presentava se non un debolissimo spettro dell'erbio. L'esame sistematico degli spettri di assorbimento delle diverse frazioni, procedendo dalla coda verso la testa e cioè nell'ordine decrescente della solubilità dei carbonati doppi, rivela che dopo l'ittrio, segue l'erbio, poi l'olmio, il tulio ed in fine il terbio e l'itterbio. L'ossido cor-

rispondente alla frazione estrema, quella cioè più ricca di ittrio, fornì per il peso atomico, determinato in base al rapporto $Y_2O_3 : Y_2(SO_4)_3$, il valore 94,5 che, anche se ritenuto come limite di frazionamento, costituisce un risultato assai soddisfacente. L'impiego dei carbonati doppi col sodio per il frazionamento delle terre ittriche conduce dunque rapidamente alla separazione di ittrio leggermente impuro per erbio.

La ulteriore purificazione dell'ittrio da piccole quantità di erbio è un problema che si è presentato a tutti coloro che mi hanno preceduto nel frazionamento di terre ittriche per arrivare all'ittrio puro.

Muthmann e Böhm ⁽¹⁾ da un ossido ittrico che conteneva circa il 12 per cento di erbio ottennero ittrio puro dopo poche serie di cristallizzazioni di cromati. Prandtl ⁽²⁾ ha purificato recentemente l'ittrio, impuro per erbio, modificando opportunamente il metodo di Bettendorf che consiste nella precipitazione parziale dei ferrocianuri. I ferrocianuri delle terre sono dei precipitati gelatinosi che si filtrano con estrema difficoltà e non si liberano mai completamente dall'acqua madre. Il metodo di Bettendorf, pur essendo molto efficace, presenta gravi difficoltà sperimentali e Prandtl è riuscito ad eliminarle in parte aggiungendo un sale di zinco alla soluzione da precipitare frazionatamente con ferrocianuro il potassio. L'aggiunta del sale di zinco agevola la filtrazione e nello stesso tempo il lavaggio del precipitato. Non elimina però la necessità di lasciare a lungo in contatto e di agitare frequentemente la massa liquida ed il precipitato gelatinoso onde si raggiunga quello stato di equilibrio da cui dipende strettamente l'efficacia del mezzo impiegato. Dato il concorde parere degli Autori sopra la utilità di questo metodo per la purificazione dell'ittrio dall'erbio, ho io pure adoperato il ferrocianuro di potassio ma ne ho modificato sensibilmente l'uso sì da renderlo oltre che di tecnica più facile e più spedita di efficacia anche maggiore.

Se nella soluzione da precipitare frazionatamente è contenuto un forte eccesso di un elemento alcalino e se il reattivo precipitante viene aggiunto agitando a piccole porzioni in soluzione diluita, (1 %), si può agevolmente rimescolare la massa liquida senza che si formi alcun precipitato. Solo dopo alcuni minuti il liquido comincia a intorbidarsi per la separazione di un sale cristallino giallo pesante che rapidamente si raccoglie al fondo e sulle pareti del recipiente sotto forma di incrostazioni molto aderenti. Data la natura cristallina di questi prodotti e il modo con cui si separano, riesce molto facile separarli dall'acqua madre non appena avvenuta la precipitazione con la massima economia di tempo e con la assoluta sicurezza che la parte cristallizzata costituisca effettivamente la porzione meno solubile della massa sottoposta alla precipitazione parziale. Questi prodotti cristallini

(1) « Ber. 33 », 1756 (1910).

(2) « Z. anorg. allgem. chem. », 143-277 (1925).

sono sali doppi delle terre col metallo alcalino presente. Si tratta cioè, come l'analisi ha messo in rilievo, di ferrocianuri doppi delle terre coi metalli alcalini.

Per avere un'idea dell'efficacia di questo metodo di purificazione dell'ittrio impuro per erbio, basterà considerare che dopo quattro sole precipitazioni dell'ossido di partenza che dava il valore 94.5 di peso atomico, ottenni un prodotto che si poté considerare senz'altro come ittrio puro. L'ossido corrispondente, sciolto in acido nitrico fino ad ottenere una soluzione satura e sotto un fortissimo spessore, non forniva la benchè minima traccia di spettro di assorbimento. Dal rapporto ossido: solfato anidro ottenni pel peso atomico il valore 89.12 che è in buon accordo col valore 89.00 recentemente ottenuto in modo rigoroso da Hönigschmid e Meuwesen.

Chimica. — *Relazioni fra alcuni composti aromatici.* Nota ⁽¹⁾ di D. BIGIAVI, presentata dal Socio A. ANGELI.

Non è stato fino ad ora sottoposto ad un esame comparativo il comportamento dei derivati aromatici che contengono una funzione di cui fa parte rispettivamente un atomo di carbonio, di azoto, di zolfo. Le considerazioni che vado ad esporre, mi portano a classificare in uno stesso quadro i seguenti composti:

$C_6H_5 \cdot COOH$	$C_6H_5 \cdot NO_2$	$C_6H_5 \cdot SO_3H$
$C_6H_5 \cdot COH$	$C_6H_5 \cdot NO$	$C_6H_5 \cdot SO_2H$
$C_6H_5 \cdot CH_2OH$	$C_6H_5 \cdot NHOH$	$C_6H_5 \cdot SOH$
$C_6H_5 \cdot CH_3$	$C_6H_5 \cdot NH_2$	$C_6H_5 \cdot SH$

Prendendo in esame i processi correlativi di ossidazione e riduzione della molecola, che si svolgono per lo più in soluzione alcalina, si possono avvicinare in modo singolare fra di loro:

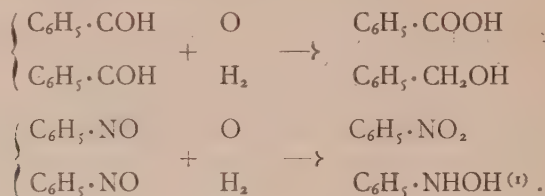
alcol benzilico fenilidrossilammina acido benzolsolfenico.

Già sotto tale punto di vista altri composti erano stati posti in chiara relazione tra loro da Angeli ⁽²⁾, nei suoi concetti di grande analogia, e pre-

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1928.

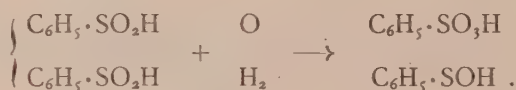
(2) ANGELI, « Rend. Lincei », 1900, II, 181.

cisamente aldeide benzoica e nitrosobenzolo, sopra i quali la potassa esercita le seguenti trasformazioni:



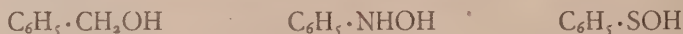
Per quanto ancora, a mia conoscenza, da nessun autore sia stato posto in rilievo, pure all'aldeide benzoica e al nitrosobenzolo possiamo aggiungere l'acido benzosolfonico, quando si consideri il suo comportamento verso gli alcali.

Le antiche esperienze di Schiller e Otto e le successive di altri autori portano a ritenere come generale per gli acidi arilsolfonici la trasformazione⁽²⁾:



Essa è stata ammessa da Hinsberg⁽³⁾ in seguito: 1° alla formazione del dibenzoldisolfossido e dell'acido benzosolfonico per fusione del solfinico; 2° alla reazione fra acido solfinico e fenolo, che dà origine a: $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{S} \cdot \langle \text{C}_6\text{H}_5 \rangle \cdot \text{OH}$ insieme ad acido benzosolfonico.

L'analogia di comportamento, che ora ho messo in rilievo, mi ha indotto ad indagare se i tre composti (meno ossidati rispettivamente della benzaldeide, del nitrosobenzolo, dell'acido solfinico) e cioè:



subissero anch'essi simultanee ossidazioni e riduzioni nelle loro molecole.

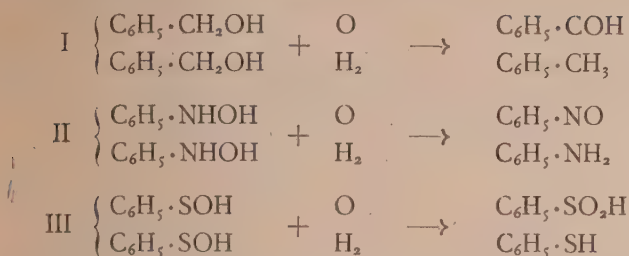
Dai dati, abbastanza copiosi, della letteratura sull'argomento si può concludere affermativamente ed anche a questo riguardo non è stata fatta fino ad ora alcuna considerazione comparativa.

(1) Come prodotti principali dell'azione degli alcali sopra il nitrosobenzolo, BAMBERGER, (« Ber. », 33 (1900) 1939) ha ottenuto nitrobenzolo e azossibenzolo. ANGELI (loc. cit.) poco dopo ha interpretato la formazione dell'azossibenzolo in questa reazione come risultato della combinazione della fenilidrossilammina, prima formatasi, con il nitrosobenzolo.

(2) Effettivamente nella reazione si formano acido benzosolfonico e dibenzoldisolfossido: $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{S} \cdot \text{SO}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_5$. Quest'ultimo proviene senza dubbio dalla reazione: $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{SOH} + + \text{HO}_2\text{S} \cdot \text{C}_6\text{H}_5$ verificata sperimentalmente a partire dal cloruro dell'acido solfenico: $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{S} \cdot \text{Cl} + \text{AgSO}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_5$ (ZINCKE, FARR, « Ann. », 391 (1912) 72; LECHER, « Ber. », 58 (1925) 413). La reazione è paragonabile alla suddetta trasformazione del nitrosobenzolo.

(3) « Ber. », 36 (1903) 109.

Hanno dunque luogo le seguenti reazioni:



Riporto ora i dati letterari da cui ho desunto tali considerazioni.

La I si può ritenere implicita nella trasformazione operata da Cannizzaro⁽²⁾ dell'alcol benzilico per azione degli alcali in toluolo e acido benzoico. Quest'ultimo si può considerare certamente come uno dei termini di un'analogia reazione di mutua ossidazione e riduzione della benzaldeide prima formatasi.

La II è ammessa da Bamberger⁽³⁾ in seguito alle sue esperienze relative all'azione degli alcali sopra le arilidrossilammine, e verificata sperimentalmente sulla mesitilidrossilammina⁽⁴⁾.

La III è ammessa da Lecher⁽⁵⁾ in seguito alla formazione, a partire dall'acido benzolsolfenico: ($\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{SOH}$), di acido solfinico (termine di ossidazione) e di dibenzoldisolfuro⁽⁶⁾. Quest'ultimo proviene certamente dal combinarsi del tienefolo (termine di riduzione) con l'acido benzosolfenico presente⁽⁷⁾:



Dopo questi risultati così concordanti veniva fatto di pensare se anche:

toluolo	anilina	tienefolo
(che rispetto a:		
alcol benzilico	fenilidrossilammina	acido benzolsolfenico

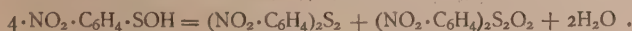
(1) « Ann. », 90 (1854) 253.

(2) « Ber. », 59 (1926) 421.

(3) BAMBERGER, « Ber. », 33 (1900) 3624.

(4) « Ber. », 58 (1925) 410.

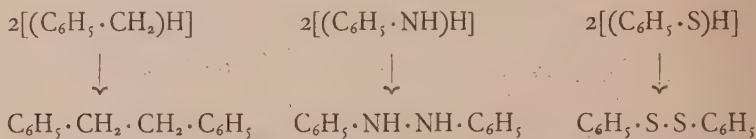
(5) Precedentemente a LECHER, ZINCKE (« Ann. », 391 (1912) 58) aveva trovato che l'acido o-nitrofenolsolfenico ($\text{NO}_2 \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{SOH}$) per azione degli alcali si trasforma nel modo seguente:



Questa reazione si spiega bene con le considerazioni contenute in questa Nota.

(6) Reazione confermata dalla sintesi di LECHER e HOLSCHNEIDER « Ber. », 57 (1924) 758.

contengono un atomo di ossigeno in meno) potessero presentare una certa analogia di comportamento. Le esperienze confermano tale supposizione. Infatti possiamo osservare che in modo particolare l'ossidazione si presta a tale confronto: toluolo, anilina, tiofenolo conducono a termini analoghi, specialmente se prendiamo in considerazione i prodotti che si ottengono per perdita di un solo atomo di H da ogni molecola⁽¹⁾:



I composti che risultano da questa ossidazione, e cioè:

dibenzile idrazobenzolo dibenzoldisolfuro

anch'essi, come ho potuto desumere dalle esperienze note in proposito, subiscono un processo correlativo di ossidazione e riduzione.

I. — Il dibenzile, scaldato in tubo chiuso a 500°, dà toluolo e stilbene⁽²⁾:



II. — L'idrazobenzolo, scaldato al punto di fusione, dà azobenzolo e anilina⁽³⁾:



III. — Il dibenzoldisolfuro, per azione degli alcali, si trasforma nei sali potassici del tiofenolo e dell'acido benzolsolfonico⁽⁴⁾.

Come interpretazione dell'andamento della reazione si può in questo caso supporre:



(1) È nota la facile ossidabilità anche per azione dell'aria del tiofenolo a disolfuro; il toluolo per azione del persolfato dà origine al dibenzile (MORITZ, WOLFFENSTEIN, « Ber. », 32 (1899) 432). Quanto all'anilina è nota la ricerca del suo primo termine di ossidazione, il radicale $C_6H_5 \cdot NH$, come prodotto di addizione al trifenilmetile (S. GOLDSCHMIDT, WURZSCHMITT, « Ber. », 55 (1922) 3216).

(2) BARBIER, « Compt. Rend. », 78 (1874) 1770.

(3) Cfr. WIELAND, « Ann. », 392 (1912) 133.

(4) SCHILLER, OTTO, « Ber. », 9 (1876) 1637; cfr. FROMM, WITTMANN, « Ber. », 41 (1908) 2269, 3404; OTTO, « J. pr. Chem. », 37 (1888) 210.

Il termine ipotetico ($C_6H_5 \cdot S \cdot SO \cdot C_6H_5$) potrebbe subire per azione degli alcali un'idrolisi con conseguente formazione di tiofenolo e acido benzolsolfonico ⁽¹⁾.

Le tre classi di composti con funzioni contenenti rispettivamente atomi di carbonio, azoto, zolfo, delle quali si è parlato nella presente Nota, presentano altre reazioni simili, sulle quali riferirò in seguito.

Mineralogia. — *Appunti sulla fosgenite di Monteponi* ⁽²⁾. Nota ⁽³⁾ di F. RODOLICO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

L'ing. Adolfo Ciampi possiede, nella sua magnifica collezione mineralogica, ottanta campioni di fosgenite provenienti dalla miniera di Monteponi, i quali per numero, per bellezza, e per varietà costituiscono una serie di notevole interesse. Ho potuto esaminarla per la gentilezza del proprietario al quale rivolgo i miei ringraziamenti. Benchè la fosgenite sarda sia stata argomento di numerosi studii ⁽⁴⁾, tuttavia credo che alcuni cristalli di questa raccolta meritino di essere descritti.

Il cristallo rappresentato nelle figure 1 e 2 (quest'ultima in proiezioni sulla base) è costituito dalla unione in posizione parallela di due individui, i quali, pur presentando alcune facce in comune, si distinguono nettamente per mezzo di due angoli rientranti. Nel gruppo sono presenti le forme:

$$m\{110\}, u\{120\}, x\{111\}, w\{221\}, \pi\{11.11.9\}^{**}, c\{001\}.$$

(1) A questo proposito è da ricordare che SMILES e PRESCOTT (« J. Chem. Soc. », 99 (1911) 644) per spiegare alcune reazioni, ammettono che i disolfuri subiscano una idrolisi in questo senso:



Tale ipotesi è giusta, probabilmente, ma mentre la trasformazione del disolfuro, da noi presa in esame, si svolge in soluzione alcalina, questi autori eseguirono le loro reazioni in ambiente di acido solforico, in cui possono verificarsi azioni idrolizzanti. Essa è confermata dalla sintesi dei disolfuri di LECHER e HOLSCHNEIDER (loc. cit.):



(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Firenze diretto dal prof. P. Aloisi.

(3) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1928.

(4) Al lavoro di KOKSCHAROW sulla fosgenite di Gibbs (« Vorles. u. Min. Petersb. » 1865) seguono: V. HANSEL, *Ueber Phosgenit von Monteponi auf Sardinien*. « Zeitschr. f. kryst. », II, 291 (1878); V. GOLDSCHMIDT, *Phosgnit von Monteponi*. « Zeitschr. f. kryst. », 1) XXI, 321 (1893) 2) XXIII, 139 (1894); F. MILLOSEVICH, *Forme nuove o rare nella fosgenite di Monteponi*. « Rend. Accad. Lincei », XVIII, 116 (1909); G. CESÀRO, *Formes nouvelles dans la phosgénite de San Giovanni (Sardaigne)*. « Bull. Acad. Royale de Belgique » (1912), 381.

Non tutte le facce di queste forme appaiono nel cristallo; così il prisma $\{120\}$ presenta solo le quattro facce che danno luogo agli angoli rientranti:

$$\begin{aligned} (120) &: (2\bar{1}0) \\ (\bar{2}10) &: (\bar{1}20) \end{aligned}$$

La bipiramide di primo ordine $\{11.11.9\}$, nuova per la fosgenite, appare con una sola faccetta nitidissima che smussa uno degli spigoli $[111.221]$.

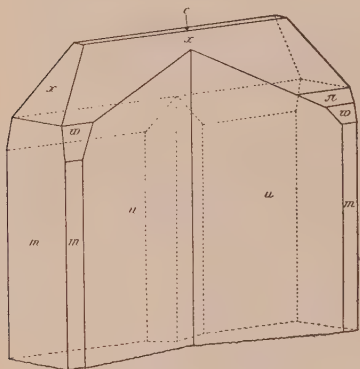


Fig. 1.

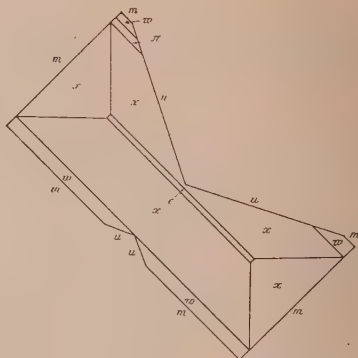


Fig. 2.

Ho determinato il simbolo di questa forma in base alle seguenti ottime misure angolari:

Angolo	Misurati	Calcolati (1)
$(11.11.9) : (001)$	$61^{\circ} 58'$	62°
$(11.11.9) : (221)$	$9 \ 57$	10
$(11.11.9) : (210)$	$33 \ 15$	$33 \ 7'$
$(11.11.9) : (1\bar{1}1)$	$75 \ 15$	$75 \ 10$

Nella zona $[1\bar{1}0]$ le forme note più vicine alla $\{11.11.9\}$ sono, da un lato, la $\{111\}$ e dall'altro la $\{332\}$; vi è però una distanza notevole giacchè:

$$\begin{aligned} (111) : (001) &= 57^{\circ} \\ (332) : (001) &= 66 \ 35' \end{aligned}$$

Un altro esempio di associazione parallela, che presenta una notevole analogia con quello descritto, è offerto dal cristallo rappresentato nella fig. 3 in proiezione sulla base. Ma in questo caso sono presenti le forme:

$$m\{110\}, u\{120\}, o\{021\}, e\{011\}, x\{111\}, s\{121\}, c\{001\}.$$

(1) In base alla costante $a : c = 1 : 1.0875$ (KOKSCHAROW).

e si ha un solo angolo rientrante, che è retto essendo formato da due facce non parallele del prisma $\{110\}$. In questo cristallo nella zona $[001]$, tra le facce (110) e $(\bar{2}10)$ mancano la (120) , la $(\bar{1}20)$, e la $(\bar{1}10)$; manca pure la faccia (021) .

Anche in altri cristalli si nota la tendenza a dare associazioni di questo tipo con sviluppo più o meno simmetrico dei due individui rispetto al piano che biseca l'angolo rientrante.

Nella zona $[001]$, tra le facce dei prismi più comuni, si nota spesso al goniometro una successione quasi continua di immagini più o meno confuse; la qual cosa deriva dalla presenza di quelle facce di transizione che sono così caratteristiche nella fosgenite⁽¹⁾. Distinguere in tali condizioni

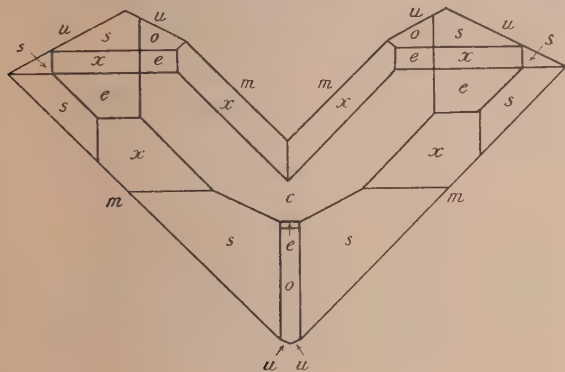


Fig. 3

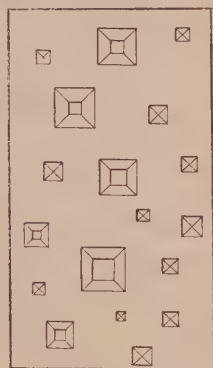


Fig. 4.

le forme note e determinarne di nuove è cosa difficile ed incerta. In due cristalli (uno dei quali gentilmente favoritomi dal dott. Sambalino) ho notata la presenza di una buona immagine posta rispettivamente a $30^\circ 19'$ e a $30^\circ 7'$ dalla faccia (100) . Credo che queste immagini spettino a facce di un nuovo prisma di simbolo $\{12.7.0\}$; si calcola infatti:

$$(12.7.0) : (100) = 30^\circ 15'$$

Gli angoli più vicini a $30^\circ 15'$ che facce di forme note formino con (100) sono:

$$(210) : (100) = 26^\circ 34'$$

$$(850) : (100) = 32^\circ$$

La faccia (001) , che appare nella enorme maggioranza dei cristalli di fosgenite, non presenta di solito alcuna particolarità. In un solo cristallo ho notata la presenza di numerose e regolari tremie (rappresentate schematicamente nella fig. 4) che non credo siano state descritte. Esse sono

(1) V. GOLDSCHMIDT, *Ueber krumme Flächen (Uebergangsflächen) mit Beobachtungen am Phosgenit*. « Zeitschr. f. kryst. », XXVI, 1 (1896).

quadrate con gli orli paralleli agli spigoli tra (001) e (111); ciascuna è costituita da quattro faccette di una bipiramide molto ottusa le quali degradano sino a raggiungere quasi sempre una faccetta quadrata di (001).

*
* * *

Della fosgenite non si conoscono che pochissime analisi, la qual cosa è notata anche dal Doelter ⁽¹⁾ che l'attribuisce all'alto costo del materiale. Avendo a mia disposizione una notevole quantità di fosgenite incolore ho eseguita una analisi completa quali-quantitativa e qualche osservazione spettroscopica. La composizione del minerale è normale se si eccettua la presenza dell'argento che non era stata ancora notata. Ecco i risultati dell'analisi.

	Trovato	Calcolato
PbO	81.73	81.91
Cl	13.06	13.01
CO ₂	7.91	8.07
(Ag)	0.01	—
	<hr/>	<hr/>
	102.71	102.99
— O = 2Cl	2.99	2.99
	<hr/>	<hr/>
	99.72	100.00

p. sp. = 6.05

Ho determinato il piombo e il cloro rispettivamente sotto forma di solfato di piombo e di cloruro di argento; l'anidride carbonica col metodo Fresenius-Classen, e l'argento cospellando il piombo ottenuto per fusione di venti grammi del minerale con borace, carbonato di sodio e tartrato acido di potassio.

(1) DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*. I, 519. Dresden, 1912.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1928 (Anno VI).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Elettrotecnica. — *Misura delle dissipazioni locali di energia entro una parte circoscritta del circuito magnetico.* Nota III ⁽¹⁾ del Corrisp. L. LOMBARDI e di P. LOMBARDI.

RISULTATI DELLE ESPERIENZE.

In due Note precedenti ⁽²⁾ abbiamo esposto la teoria del nuovo dispositivo wattometrico, per la misura dell'energia dissipata entro una parte circoscritta del circuito magnetico, e descritto gli apparecchi mediante i quali ci proponevamo di verificarne la pratica applicabilità. In questa Nota riassumiamo brevemente i risultati ottenuti ⁽³⁾.

Mediante l'apparecchio di Epstein fu anzitutto agevole, inviando la corrente magnetizzante attraverso alle quattro spirali primarie in serie, e collegando la spirale mobile del wattometro al gruppo delle quattro secondarie, determinare pei quattro nuclei di ferro laminato la potenza dissipata alle diverse frequenze e saturazioni che interessavano per le misure successive. Vennero all'uopo sperimentate le diverse sorgenti di f. e. m., di cui è

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1928,

(2) « Rendiconti » dell'Accademia, vol. VII, fasc. 12, p. 962 e vol. VIII, fasc. 3-4, p. 111.

(3) Anche l'esecuzione delle principali esperienze qui riportate venne particolarmente curata dall'insegnante di misure elettriche, ing. Paolo Lombardi. Nel rilievo degli Oscillogrammi prestò gentile assistenza il prof. F. Neri.

cenno nella seconda Nota, riportando per ognuna di esse, e per ogni frequenza, le potenze dissipate in funzione delle tensioni indotte in ognuna delle spirali secondarie, onde è facile risalire ai valori corrispondenti della induzione.

Le curve hanno tutte l'andamento ben noto delle parabole, tracciate per la prima volta da Steinmetz, di ordine inferiore al 2° e prossimo ad 1.6, quando le perdite dovute alle correnti parassite assumono, come in questo caso, piccola importanza di fronte a quelle d'isteresi.

Riferite alla tensione efficace indotta, esse si differenziano per altro a parità di frequenza, in dipendenza del diverso fattore di forma che affetta le varie sorgenti di f. e. m.; nel nostro caso assumono ordinate più basse le curve ottenute, alimentando l'apparecchio coll'alternatore del Tecnomasio attraverso alle spirali di induttanza, che servono a filtrare la corrente primaria, rendendola, almeno per le basse saturazioni, quasi perfettamente sinusoidale, poichè la tensione indotta assume un fattore di forma particolarmente elevato.

La ripartizione di questa tensione fra le quattro spirali secondarie risulta quasi perfettamente uniforme, e ciò vale a confermare la uniformità dei diversi tronchi di circuito magnetico e dei flussi rispettivi.

Per poter eseguire col nuovo dispositivo la misura della potenza dissipata in uno dei nuclei, era necessario escludere dal circuito primario la spirale corrispondente, in modo che esso ricevesse la forza magnetomotrice necessaria dalle altre spirali magnetizzanti, e la spirale di Rogowski, appoggiata alle sue estremità, ne potesse misurare la caduta di potenziale magnetico, come è bene spiegato nel primo lavoro di questo A. La perfezione maggiore o minore dei giunti non ha alcuna importanza in questa, come nelle ordinarie misure wattometriche secondo il metodo di Epstein, poichè le forze magnetomotrici, impiegate a vincere la riluttanza dei piccoli interferri, hanno la stessa fase del flusso, e non richiedono spese di energia. Naturalmente però tali riluttanze localizzate non debbono alterare apprezzabilmente la uniforme distribuzione del flusso principale, di che fu agevole la constatazione mediante brevi spirali indotte, spostate lungo il nucleo in esame, anche quando mancava la corrente nella spirale primaria corrispondente, e collegate con un voltmetro termoelettrico di grande sensibilità.

Verifiche analoghe vennero eseguite con eguale risultato anche sopra un fascio di lamiera di ferro commerciale, dello spessore medio di 3.5 mm. e della larghezza di 19, che aveva il peso di 1.6 kgr., e che doveva servire come campione magnetico di pessima qualità, in contrasto con quello ottimo di Siemens, possedendo una cifra di perdita dieci volte più grande.

Così per questo, come per il ferro di Siemens, la potenza complessiva, dissipata nel corso di ogni misura veniva determinata mediante un wattometro di precisione di Weston, capace di sopportare un sovraccarico del 100 % nelle spirali amperometrica e voltmetrica, e di fornire deviazioni

sufficientemente ampie anche con fattori di potenza assai bassi. La potenza dissipata nel nucleo di peggiore qualità veniva dedotta per differenza da quella totale, sottraendone quella perduta nei 3 nuclei direttamente eccitati, della quale era noto l'andamento in relazione alla tensione indotta nelle rispettive spirali secondarie; pel nucleo di ferro normale la perdita era dedotta direttamente dalla curva già rilevata in funzione della tensione predetta.

In seguito a ognuna di tali determinazioni, interrotto il circuito voltometrico, si procedeva alla chiusura di quelli misuratori del flusso e della tensione magnetica, e si eseguivano all'elettrodinamometro le due letture di deviazione positiva e negativa, quasi sempre pochissimo divergenti fra loro, commutando mediante apposito invertitore il collegamento di una delle spirali. I rapporti delle deviazioni medie alle potenze misurate fornivano altrettante cifre di confronto con la costante strumentale, calcolata teoricamente.

Per il ferro normale di Siemens le misure eseguite su ogni nucleo alla frequenza di 60 periodi con corrente magnetizzante purificata, e con tensioni di 15 a 30 volt, le quali corrispondono a valori massimi della induzione di 5000 a 10000 unità, denunciano una perdita di 2 a 6 watt, e per esse il medio rapporto misurato coincide con la costante teoricamente calcolata a meno di alcune unità per cento. Al crescere della saturazione si manifesta tuttavia un aumento graduale e sistematico di quel rapporto rispetto al valore teorico, che con ogni verosimiglianza si può attribuire alla graduale deformazione della corrente primaria, ed alla collisione delle piccole armoniche superiori che nascono in essa con quelle molto più accentuate già esistenti nella variazione del flusso, le quali ancora maggiormente si esaltano nella corrente indotta per la presenza del condensatore.

Di questa graduale deformazione della corrente primaria, e maggiore esaltazione delle armoniche in quella secondaria, fanno fede gli oscillogrammi rilevati ⁽¹⁾, mediante l'analisi dei quali, tenendo conto delle ampiezze e fasi rispettive di tutte le armoniche presenti, non è da escludere che si possa per ogni nuova misura calcolare un rapporto più approssimato della deviazione dell'elettrodinamometro alla potenza reale dissipata.

Tale verifica si reputa peraltro esuberante ai fini della presente ricerca, unicamente intesa ad accertare la pratica applicabilità del metodo entro determinati limiti di approssimazione, astraendo dalla complicazione di calcoli laboriosi per ogni nuova condizione sperimentale. L'indagine eseguita ha d'altronde servito a mettere in chiaro taluni elementi del fenomeno in esame, i quali meritano anche per altri riguardi una certa considerazione.

L'aggiunta delle spirali di reattanza al circuito magnetizzante ha permesso in verità di purificare la curva della forza magnetomotrice, grande-

(1) « Archiv für Elektrotechnik ».

mente attenuando la maggior parte delle armoniche superiori, che in essa tenderebbero a manifestarsi sotto l'applicazione di una differenza di potenziale sinusoidale; nè si ritenne possibile di conseguire per questo riguardo un miglior risultato mediante l'impiego di filtri propriamente detti, interposti fra la sorgente e l'apparecchio di Epstein, atteso che le *f. e. m.* di frequenza più elevata trovano origine in questo, a valle dell'aggregato filtrante.

Il fatto di aver reso sinusoidale la corrente e la forza magnetomotrice totale non implica peraltro l'assenza delle armoniche nel circuito che serve a misurare la tensione magnetica ai capi del tronco considerato, atteso che la ripartizione della forza magnetomotrice si fa, a parità di flusso, in ragione della riluttanza dei tronchi, e questa assume valori istantanei diversi nei tronchi di materiale magnetico durante il periodo, laddove si conserva costante quella dei piccoli spazi d'aria inerenti alle giunzioni.

A questa circostanza abbiamo ritenuto di dover attribuire una parte delle discrepanze, riscontrate durante le misure preliminari, quando le estremità della spirale piatta, destinata alla misura della tensione magnetica, si appoggiavano su le parti terminali di un medesimo pacco di lamierini, atteso che la *f. e. m.* indotta in essa, e rilevata all'oscillografo, rivelava la presenza di armoniche pronunciate, atte a collidere con taluna di quelle presenti nella *f. e. m.* secondaria.

All'inconveniente potè rimediarsi in gran parte, includendo fra le sezioni di appoggio della spirale di Rogowski uno dei 4 giunti, resi sensibilmente simmetrici mediante la interposizione di un sottile strato di fibra; l'oscillogramma della *f. e. m.*, che corrisponde alla tensione magnetica, assumeva in queste condizioni una forma perfettamente simile a quella della forza magnetomotrice totale, appositamente depurata.

Un'influenza assai modesta esercita la piccola distanza alla quale inevitabilmente si vengono a trovare le spire estreme della spirale di Rogowski dalla superficie del ferro, in corrispondenza delle sezioni fra le quali si intende misurare la caduta di potenziale magnetico, atteso che la interposizione di piccole lamine isolanti supplementari, ripetutamente sperimentata, non ha causato alcuna variazione apprezzabile della deviazione dell'elettrodinamometro. Dal punto di vista teorico potrebbe manifestarsi per questo riguardo una leggera diminuzione della tensione magnetica utilizzata, e quindi anche della deviazione dello strumento in relazione alla potenza effettivamente dissipata.

Un fenomeno di questo genere si è probabilmente presentato in parecchie delle esperienze, eseguite sul ferro normale con saturazioni molto basse, per cui il rapporto fra le deviazioni dell'elettrodinamometro e le potenze desunte dalla misura wattometrica diretta appariva leggermente inferiore a quello calcolato; tale rapporto però si confondeva molto approssimativamente col valore calcolato nell'intervallo mediano, ed in quello più alto leggermente se ne discostava in senso contrario per le ragioni già esposte.

Un esempio caratteristico di questo andamento offre la serie di misure riportata nella tabella seguente, ed eseguita sul ferro Siemens alla frequenza di 60 periodi per 1'', con l'alternatore Brown Boveri e con la corrente purificata mediante la inclusione delle due spirali di reattanza. Il circuito del misuratore di tensione comprendeva una resistenza di 265 ohm; quello misuratore del flusso una capacità di 0.8 μ F.

Le cifre della prima linea misurano le tensioni indotte nella spirale secondaria, avvolta sul nucleo in esame; quelle della seconda le deviazioni dell'elettrodinamometro; quelle della terza le potenze dissipate nel nucleo, dedotte dalla misura col wattometro; quelle dalla quarta i rapporti δ/P :

V	= 14.0	16.0	18.0	20.0	22.0	24.0	26.0	28.0	30.0
δ	= 7.8	9.6	11.5	13.6	16.2	18.9	22.0	25.3	29.0
P	= 2.10	2.46	2.86	3.25	3.70	4.20	4.80	5.35	5.96
δ/P	= 3.7	3.9	4.1	4.2	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8

Il valore medio di questo rapporto risulta così nell'intervallo considerato 4.33.

Calcolando il rapporto predetto in base alla formola teorica, che tiene conto unicamente della perdita per l'onda fondamentale di magnetizzazione, e ricordando i valori già determinati della costante dell'elettrodinamometro:

$$A = \frac{\delta}{I^2} = 2.86 \times 10^7$$

e di quella del misuratore Rogowski:

$$k = 175$$

si ottiene:

$$\frac{\delta}{P} = \frac{4 \pi A k \omega^2 N'' C}{10^9 R'} = \frac{12.56 \times 2.86 \times 175 \times 377^2 \times 150 \times 0.8}{265 \times 10^8} = 4.05.$$

La divergenza del valor medio sperimentale da quello teorico risulta dunque in quell'intervallo di circa 7.%, e si ridurrebbe a cifra minore, se si restringesse ulteriormente l'intervallo nella regione delle maggiori saturazioni.

Le misure eseguite sul ferro di peggiore qualità hanno fornito sotto questo riguardo risultati più concordanti, atteso che le potenze dissipate si elevarono a qualche decina di watt, onde si rese possibile la inclusione nel circuito del misuratore di tensione magnetica di una resistenza notevolmente più alta; il fattore di potenza salì a cifre dell'ordine 0.15-0.25 di fronte a quelli di 0.05-0.10 delle misure precedenti, onde diminuì la influenza dei piccoli errori di fase dovuti a imperfetta compensazione.

A titolo di esempio è sufficiente riportare una delle serie numerose di misure, eseguite del pari con corrente magnetizzante depurata alla fre-

quenza di 60 periodi, mentre era nel circuito del misuratore di tensione magnetica una resistenza di 925 ohm e in quello della spirale secondaria, misuratrice del flusso, una capacità di $0.8\mu F$:

V =	5.4	6.6	8.2	10.1	11.5	12.65
δ =	9.7	15.5	24.5	34.9	45.5	54.6
P =	8.0	13.4	21.8	30.7	39.9	48.0
δ/P =	1.21	1.16	1.12	1.14	1.14	1.14

Il valore medio del rapporto è in questo caso 1.15, e coincide con quello calcolato teoricamente a meno di 1 %. Si ha infatti:

$$\frac{\delta}{P} = \frac{12.56 \times 2.86 \times 175 \times 377^2 \times 150 \times 0.8}{925 \times 10^8} = 1.16.$$

Tutte le precauzioni si erano prese in questo caso, affinchè le spire terminali della spirale Rogowski combaciassero per quanto era possibile con la superficie della lamina magnetica superiore del fascio in tutta la loro estensione, disponendone gli assi secondo le diagonali del quadrilatero di Epstein, in modo da comprendere fra loro uno dei giunti. La riluttanza del tronco considerato era d'altronde così grande di fronte a quella dei nuclei di Siemens, con esso associati a costituire il circuito magnetico, da assorbire di gran lunga la maggior parte della forza magnetomotrice applicata, sì che anche la curva della tensione magnetica differiva pochissimo dalla senoide.

Questa condizione privilegiata è facile a realizzarsi nella maggior parte delle misure eseguite coi metodi del giogo magnetico, nelle quali l'applicazione del nuovo dispositivo può presentare non pochi vantaggi di fronte a quelli che forniscono la perdita come differenza fra la potenza totale misurata e quella dissipata nel giogo, atteso che col metodo nuovo la misura può essere eseguita direttamente entro la sola porzione del nucleo, che interessa di considerare.

In conclusione, il nuovo metodo appare praticamente applicabile con sufficiente approssimazione alla misura delle perdite di potenza entro a porzioni circoscritte del circuito magnetico, anche se queste non eccedono pochi watt, tutte le volte che si dispone di un elettrodinamometro di conveniente sensibilità, di un condensatore affetto da piccolo ritardo di polarizzazione, e di una sorgente di forza elettromotrice prossima alla forma sinusoidale, ovvero di reattanze adeguate a rendere prossima alla senoide la forma della corrente magnetizzante. La mancanza di quest'ultima condizione introduce nell'interpretazione numerica della misura un errore crescente con la saturazione, non dissimile da quello onde sarebbero affetti i metodi wattometrici comuni, nel caso in cui la perdita si volesse riferire ai valori massimi della induzione, senza conoscere esattamente il fattore di forma della tensione applicata.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Spazi curvi a tre dimensioni ed omografia di Ricci.* Nota di T. BOGGIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In alcune Note, testè pubblicate nei « Rendiconti » di questa Accademia, sotto i titoli: *Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo*; *L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo*; *Identità di Bianchi ed omografia di gravitazione* (e che nelle citazioni indicherò brevemente con Nota I, Nota II, Nota III), ho introdotto con procedimento nuovo, molto semplice ed elementare, l'omografia di Riemann per spazi curvi ad un numero qualunque di dimensioni, ritrovandone pure con calcoli assai brevi le proprietà fondamentali.

In questa Nota mi limito agli spazi curvi a tre dimensioni, facendo vedere che l'omografia di Riemann può in tal caso essere utilmente sostituita da un'altra omografia più semplice, della quale ritrovo in modo semplicissimo una notevole proprietà dovuta al prof. Levi-Civita.

1. *L'omografia di Ricci.* — Indichiamo con C_n uno spazio curvo ad n dimensioni, descritto da un punto generico Q , e siano \mathbf{a} , \mathbf{b} due vettori tangenti allo spazio curvo C_n nel punto generico Q . Se \mathcal{R} è l'omografia di Riemann relativa a C_n , sappiamo (Nota II, n. 3, b)) che $\mathcal{R}\mathbf{ab}$ è una omografia assiale ben determinata, che trasforma vettori tangenti a C_n in Q in vettori pure tangenti a C_n in Q .

Nel caso particolare che lo spazio curvo abbia *tre dimensioni*, si può dimostrare l'importante proprietà che *esiste una dilatazione μ , funzione solo della \mathcal{R} , tale che*

$$(1) \quad \mu(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = V(\mathcal{R}\mathbf{ab}),$$

o, ciò che equivale:

$$(2) \quad [\mu(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})] \wedge = \mathcal{R}\mathbf{ab},$$

qualunque siano i vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} tangenti allo spazio curvo C_3 in Q .

Infatti, l'omografia $\mathcal{R}\mathbf{ab}$ è funzione lineare ed alternata dei vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} perciò in virtù di un noto teorema funzionale (*Espaces*, p. 12), si deduce che esiste un'unica omografia μ , funzione solo di \mathcal{R} , tale da soddisfare alla (1).

Che poi la μ debba essere una dilatazione, risulta dal fatto che se \mathbf{c} , \mathbf{d} sono altri due vettori tangenti a C_3 in Q , si ha dalla (2):

$$[\mu(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})] \wedge \mathbf{c} = \mathcal{R}\mathbf{abc},$$

(1) Nella seduta del 17 giugno 1928.

quindi ricordando la (16) della Nota II e poi ancora la (2) si trae:

$$\begin{aligned} [\mu(a \wedge b)] \wedge c \times d &= \Re abc \times d = \Re cda \times b = \\ &= [\mu(c \wedge d)] \wedge a \times b = \mu(c \wedge d) \times (a \wedge b); \end{aligned}$$

ma si ha, d'altra parte:

$$[\mu(a \wedge b)] \wedge c \times d = [\mu(a \wedge b)] \times (c \wedge d) = [K\mu(c \wedge d)] \times (a \wedge b),$$

perciò si conclude $K\mu = \mu$, cioè μ è una dilatazione.

La dilatazione μ corrisponde ai noti simboli $\alpha^{(rs)}$ di Ricci, e perciò diremo che μ è l'omografia di Ricci.

2. *Forma speciale dell'identità di Bianchi.* - Introducendo l'omografia di Ricci, l'identità di Bianchi (cfr. Nota III (2')) assume una forma più semplice, che è utile esaminare.

Intanto osserviamo che la (1) sussiste se al posto di a si pone da , oppure se al posto di b si pone db , perchè i vettori da, db essendo differenziali superficiali di a, b , sono tangenti a C_3 in Q ; di qui si deduce tosto, prendendo il differenziale superficiale della (1) e ricordando che $dV\mu_1 = Vd\mu_1$ (Nota II (4)):

$$(a) \quad d\mu \cdot (a \wedge b) = V(d\Re \cdot ab),$$

eguaglianza dello stesso tipo della (1). Se μ' indica la derivata di μ rispetto a Q , si può sostituire $\mu'dQ$ al posto di $d\mu$, e analogamente si può sostituire $\Re'dQ$ al posto di $d\Re$, perciò la (a) porge:

$$\mu'dQ(a \wedge b) = V(\Re'dQab);$$

ed è chiaro che si può pure scrivere:

$$\mu'c(a \wedge b) = V(\Re'cab),$$

ove c è un vettore qualunque tangente a C_3 in Q . Ne segue:

$$\begin{aligned} (3) \quad \mu'a(b \wedge c) + \mu'b(c \wedge a) + \mu'c(a \wedge b) &= \\ &= V(\Re'abc + \Re'bca + \Re'cab); \end{aligned}$$

ma il secondo membro è nullo in virtù della citata identità di Bianchi, perciò si ha:

$$(4) \quad \mu'a(b \wedge c) + \mu'b(c \wedge a) + \mu'c(a \wedge b) = 0.$$

Viceversa, se è verificata la (4) dico che sussiste l'identità di Bianchi.

Infatti, la (3) porge allora:

$$(5) \quad V(\Re'abc + \Re'bca + \Re'cab) = 0,$$

ma siccome l'omografia $\Re ab$ è assiale, è pure tale l'omografia $d\Re \cdot ab$ e quindi anche $\Re'cab$, perciò si deduce che nella (5) l'omografia chiusa

entro parentesi è assiale, e allora dalla (5) stessa si conclude che deve essere nulla l'omografia chiusa entro parentesi, e così si ottiene l'identità di Bianchi.

Perciò, per gli spazi curvi a tre dimensioni, l'identità di Bianchi equivale alla (4).

3. *Gradiente dell'omografia di Ricci.* — Dalla forma (4) dell'identità di Bianchi si può subito dedurre il gradiente superficiale di μ . Supponiamo infatti che i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tangenti a C_3 in Q siano unitari e a due a due ortogonali, e precisamente:

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad ,$$

allora la (4) si scrive più semplicemente: $\mu' \mathbf{a} \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b} \mathbf{b} + \mu' \mathbf{c} \mathbf{c} = 0$, cioè, per la (5) della Nota III e la (17) della Nota II: $\text{Grad } \mu = 0$.

Vediamo così che il gradiente superficiale dell'omografia di Ricci è nullo⁽¹⁾.

Ritroveremo fra poco questa proprietà per tutt'altra via.

Tale proprietà dunque equivale perfettamente all'identità di Bianchi.

Per mezzo della dilatazione μ si ottengono subito in modo semplicissimo le direzioni principali dello spazio curvo C_3 in Q , come pure le curvature principali, la formula di Eulero generalizzata, la quadrica indicatrice, analoga all'indicatrice di Dupin per le superficie ordinarie, ecc. (*Espaces*, p. 177).

4. *Identità delle omografie di gravitazione e di Ricci.* — Abbiamo definito in fine della Nota III, l'omografia di gravitazione θ per uno spazio curvo qualunque; nel caso particolare di spazi curvi a tre dimensioni sussiste la seguente notevole proprietà, dovuta al prof. Levi-Civita⁽²⁾.

L'omografia di gravitazione θ coincide coll'omografia di Ricci μ .

Infatti, dalla (4) della Nota III si ha, in virtù della (2):

$$\psi \mathbf{a} = \sum [\mu(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}_i)] \wedge \mathbf{a}_i = - \sum \mathbf{a}_i \wedge \mu(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}_i) \quad ,$$

ove, nella \sum , l'indice i assume i valori 1, 2, 3; in virtù di semplici proprietà delle omografie ordinarie, l'ultimo membro si può successivamente trasformare così:

$$- \sum \mathbf{a}_i \wedge (\mu \cdot \mathbf{a} \wedge) \mathbf{a}_i = - 2 \nabla (\mu \cdot \mathbf{a} \wedge) = - 2 \nabla (\mathbf{a} \wedge \mu) = - (I_1 \mu - \mu) \mathbf{a} \quad .$$

(1) Questa proprietà è stata stabilita recentemente dal prof. Cisotti, con metodo assai più complicato, ricorrendo a sommatorie triple, quaduple, ecc. Cfr. CISOTTI, *Sul carattere solenoidale del tensore di Ricci, ecc.* (Questi «Rendiconti», 2° sem. 1927).

(2) T. LEVI-CIVITA, *Statica einsteiniana*, p. 463. (Questi «Rendiconti», 1° sem., 1917). Cfr. altresì l'edizione tedesca del suo calcolo assoluto, [*Der Absolute Differentialkalkül*, Berlin, Springer, 1928], Cap. IV, § 11, p. 111.

Ne segue: $\psi = \mu - I_1 \mu$, e perciò: $I_1 \psi = I_1 \mu - 3 I_1 \mu = -2 I_1 \mu$, e siccome l'omografia di gravitazione θ è definita da $\theta = \psi - I_1 \psi / 2$, si ha senz'altro $\theta = \mu$; c. d. d.

E poichè in fine della Nota III abbiamo visto che $\text{Grad } \theta = 0$, si ritrova, senza alcun calcolo, che $\text{Grad } \mu = 0$.

In prossime pubblicazioni ci occuperemo della curvatura riemanniana degli spazi curvi.

Matematica. — *Formole di commutazione nella derivazione dei tensori.* Nota ⁽¹⁾ di MARIA PASTORI, presentata dal Socio Corrisp. U. CISOTTI.

Nella presente Nota dimostro l'esistenza di una formola generale di commutazione delle derivate covarianti (o intrinseche) di ordine superiore, che comprende, come caso particolare, la nota formola per le derivate seconde.

1. *Componenti covarianti. — Derivate terze.*

Siano $X_{r_1 \dots r_m}$ le componenti covarianti di un tensore m^{plo} di una varietà a n dimensioni.

Dalla nota formola di commutazione delle derivate seconde covarianti ⁽²⁾:

$$(1) \quad X_{r_1 \dots r_m / r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 \dots r_m / r_{m+2} r_{m+1}} = \\ = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{r_1 \dots r_{i-1} q r_{i+1} \dots r_m} \{ r_i q, r_{m+1} r_{m+2} \}$$

discendono, per le derivate terze, le seguenti:

$$(2) \quad X_{r_1 \dots r_m / r_{m+1} r_{m+2} r_{m+3}} - X_{r_1 \dots r_m / r_{m+1} r_{m+3} r_{m+2}} = \\ = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{r_1 \dots r_{i-1} q r_{i+1} \dots r_m / r_{m+1}} \{ r_i q, r_{m+2} r_{m+3} \} - \\ - \sum_{j=1}^n X_{r_1 \dots r_m / q} \{ r_{m+1} q, r_{m+2} r_{m+3} \}$$

$$(3) \quad X_{r_1 \dots r_m / r_{m+1} r_{m+2} r_{m+3}} - X_{r_1 \dots r_m / r_{m+2} r_{m+1} r_{m+3}} = \\ = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{r_1 \dots r_{i-1} q r_{i+1} \dots r_m / r_{m+3}} \{ r_i q, r_{m+1} r_{m+2} \} + \\ + X_{r_1 \dots r_{i-1} q r_{i+1} \dots r_m} \{ r_i q, r_{m+1} r_{m+2} \} / r_{m+3})$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1928.

(2) RICCI e LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*. « Math. Ann. », B. 54, 1901, pp. 125-201, form. (23) a p. 143; oppure T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, « Stock », 1925, form. (20), p. 212.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & X_{r_1 \dots r_m / r_m + 1 r_m + 2 r_m + 3} - X_{r_1 \dots r_m / r_m + 3 r_m + 2 r_m + 1} = \\
 & = - \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^n (X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_l + 1 \dots r_m / r_m + 1} \{ r_l q, r_m + 2 r_m + 1 \} - \\
 & \quad - X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_l + 1 \dots r_m / r_m + 2} \{ r_l q, r_m + 3 r_m + 1 \} + \\
 & \quad + X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_l + 1 \dots r_m / r_m + 3} \{ r_l q, r_m + 1 r_m + 2 \}) + \\
 & \quad + \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^n X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_l + 1 \dots r_m} \{ r_l q, r_m + 3 r_m + 1 \} / r_m + 2 + \\
 & \quad + \sum_{q=1}^n X_{r_1 \dots r_m / q} \{ r_m + 2 q, r_m + 3 r_m + 1 \}.
 \end{aligned}$$

La (2) e la (3) sono conseguenze immediate della (1); la (4) si ottiene, in virtù delle due precedenti, scambiando l'indice $r_m + 3$ successivamente con $r_m + 2 r_m + 1$ e infine quest'ultimo con $r_m + 2$.

Conseguenza comune delle (2), (3), (4) è la seguente:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & X_{r_1 \dots r_m / r_m + 1 r_m + 2 r_m + 3} + X_{r_1 \dots r_m / r_m + 2 r_m + 3 r_m + 1} + \\
 & + X_{r_1 \dots r_m / r_m + 3 r_m + 1 r_m + 2} - X_{r_1 \dots r_m / r_m + 3 r_m + 2 r_m + 1} - \\
 & - X_{r_1 \dots r_m / r_m + 2 r_m + 1 r_m + 3} - X_{r_1 \dots r_m / r_m + 1 r_m + 3 r_m + 2} = \\
 & = - \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^n (X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_l + 1 \dots r_m / r_m + 1} \{ r_l q, r_m + 2 r_m + 3 \} + \\
 & \quad + X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_l + 1 \dots r_m / r_m + 2} \{ r_l q, r_m + 3 r_m + 1 \} + \\
 & \quad + X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_l + 1 \dots r_m / r_m + 3} \{ r_l q, r_m + 1 r_m + 2 \}).
 \end{aligned}$$

Per ottenerla dalla (2) basta scrivere, insieme con essa, le due formole analoghe che si hanno permutando circolarmente gli indici $r_m + 1, r_m + 2, r_m + 3$ ⁽¹⁾, e poi sommare, tenendo conto della proprietà ciclica dei simboli di Riemann.

Per ottenerla dalla (3) basta operare in modo analogo, tenendo conto delle identità di Bianchi.

Per ottenerla dalla (4) basta operare in modo analogo, tenendo conto di entrambe le relazioni ora ricordate.

La (5) si può anche scrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 (5') \quad & S_{r_m + 1 r_m + 2 r_m + 3} X_{r_1 \dots r_m / r_m + 1 r_m + 2 r_m + 3} = \\
 & = - \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^n S'_{r_m + 1 r_m + 2 r_m + 3} X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_l + 1 \dots r_m / r_m + 1} \{ r_l q, r_m + 2 r_m + 3 \}
 \end{aligned}$$

(1) La permutazione circolare si riferisce naturalmente agli indici del primo termine del primo membro e di ogni termine del secondo membro. Quanto a quelli del secondo termine del primo membro essi si otterranno ogni volta da quelli del termine precedente mediante lo scambio degli ultimi due.

dove $S_{r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_1}$ indica la somma estesa a tutte le permutazioni degli indici che vi figurano, ogni termine avendo il segno $- +$ secondo che la permutazione che si considera è di classe pari o dispari rispetto alla $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_1$ come fondamentale. $S_{r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_1}$ indica la somma analoga estesa alle sole permutazioni di classe pari, e quindi con termini tutti positivi.

2. Componenti covarianti. — Derivate di ordine qualunque.

La (1) si può ritenere a suo generale delle derivate di ordine qualunque.

Lo dimostrerò col metodo di induzione.

Ammissa cioè la validità della formola:

$$(6) \quad S_{r_{m+1}, \dots, r_{m+k-1}} X_{r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{m+k}} = \\ = - \sum_{j=1}^m \sum_{g=1}^k S_{r_{m+1}, \dots, r_{m+k-1}} X_{r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{m+k-1}, r_j} \left\{ \pi_{1j} q_{r_{m+1}, \dots, r_{m+k}} - \pi_{1j} q_{r_{m+1}, \dots, r_{m+k-1}, r_j} \right\}$$

dimostrerò la validità della:

$$(7) \quad S_{r_{m+1}, \dots, r_{m+k}} X_{r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{m+k}} = \\ = - \sum_{j=1}^m \sum_{g=1}^k S_{r_{m+1}, \dots, r_{m+k}} X_{r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{m+k-1}, r_j} \left\{ \pi_{1j} q_{r_{m+1}, \dots, r_{m+k}} - \pi_{1j} q_{r_{m+1}, \dots, r_{m+k-1}, r_j} \right\}$$

Considero le k derivate $X_{r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{m+k}}$ che si ottengono permutando in tutti i modi possibili gli indici di derivazione, e le distribuisco in k gruppi, ciascuno di $(k-1)!$ elementi, nel modo seguente:

Nel primo gruppo il primo indice di derivazione sia r_{m+1} , le seguono le $(k-1)!$ permutazioni dei rimanenti indici; nel secondo gruppo il primo indice sia r_{m+2} , le seguono le $(k-1)!$ permutazioni dei rimanenti indici; e così via. Faccio la somma degli elementi di uno qualunque dei k gruppi, attribuendo a ogni elemento il segno $- +$ secondo che la permutazione che considera è di classe pari o dispari rispetto alla r_{m+1}, \dots, r_{m+k} come fondamentale. Ora, poiché il primo indice è fisso, considero come fondamentale e rispetto ai rimanenti $k-1$ indici, una qualunque permutazione di essi che con l'indice fisso dà una permutazione di classe pari, i termini positivi conteranno le permutazioni di questi $k-1$ indici di classe pari rispetto a quella scelta come fondamentale, e i termini negativi conteranno le permutazioni di classe dispari rispetto alla medesima.

Alla somma considerata potrà allora applicarsi la (4) tenendo presente che, in luogo delle componenti di un tensore σ_{ij} , sono le componenti di un tensore $\pi_{ij} = \pi_{ij}^1$, dove l'ultimo è un indice di derivazione.

Scrivendo la formola corrispondente, nel caso che l'indice fisso sia r_{m+1} , avrò:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & S_{r_{m+2} \dots r_{m+k}} X_{r_1 \dots r_m / r_{m+1} \dots r_{m+k}} = \\
 = & - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S'_{r_{m+2} \dots r_{m+k}} X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m / r_{m+1} \dots r_{m+k-2}} \{ r_l q, r_{m+k-1} r_{m+k} \} = \\
 = & - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S'_{r_{m+2} \dots r_{m+k}} X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m / r_{m+1} \dots r_{m+k-2}} \{ r_l q, r_{m+k-1} r_{m+k} \} - \\
 & - \sum_{i=1}^n S'_{r_{m+2} \dots r_{m+k}} X_{r_1 \dots r_m / q r_{m+2} \dots r_{m+k-2}} \{ r_{m+1} q, r_{m+k-1} r_{m+k} \}.
 \end{aligned}$$

Insieme con la (8) immagino scritte le formole analoghe, dove l'indice fisso è rispettivamente $r_{m+2} \dots r_{m+k}$, e sommo membro a membro. Nel primo membro ottengo il primo membro della (7).

Nel secondo, i primi termini danno il secondo membro della (7). Gli altri danno una somma nulla.

Infatti: per ogni somma parziale come la (8) il secondo termine del secondo membro contiene $\frac{(k-1)!}{2}$ addendi⁽¹⁾. Nella somma complessiva

ci saranno in tutto $\frac{k!}{2}$ addendi. Fra essi scelgo quelli che, dopo l'indice variabile q , presentano la stessa disposizione dei $k-3$ indici che seguono q .

Quanti saranno? Poichè le disposizioni di k indici della classe $k-3$ sono $k(k-1) \dots 4$ e ciascuna di esse figurerà, per ragioni di simmetria, uno stesso numero di volte nella somma complessiva formata da $k(k-1) \dots 4 \cdot 3$ termini, così i termini riuniti saranno 3. Mettendo in evidenza la X comune, i tre simboli di Riemann daranno, per la proprietà ciclica, una somma nulla.

Osservazione. Nelle formole precedenti i k indici di derivazione debbono essere distinti. Se due almeno di essi sono uguali, i due membri sono identicamente nulli.

3. Componenti miste.

Se si considerano le componenti miste di un tensore $m^{[p]}; X_{r_1 \dots r_\mu}^{p_1 \dots p_\nu}$ ($\mu + \nu = m$) la (1) viene, come è noto, sostituita dalla seguente⁽²⁾:

$$\begin{aligned}
 (1') \quad & X_{r_1 \dots r_\mu}^{p_1 \dots p_\nu} - X_{r_1 \dots r_\mu / r_{m+2} r_{m+1}}^{p_1 \dots p_\nu} = \\
 = & - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_\mu}^{p_1 \dots p_\nu} \{ r_l q, r_{m+1} r_{m+2} \} - \right. \\
 & \left. \sum_{j=1}^n X_{r_1 \dots r_\mu}^{p_1 \dots p_{\nu-1} q p_\nu} \{ q p_\nu, r_{m+1} r_{m+2} \} \right)
 \end{aligned}$$

(1) Ogni addendo è, a sua volta, una somma di n termini.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni, ecc.*, p. 212, form. (20).

e, in luogo della (7) si trova:

$$\begin{aligned}
 (7') \quad & S_{r_m+1 \dots r_m+k} X_{r_1 \dots r_l / r_m+1 \dots r_m+k}^{p_1 \dots p_q} = \\
 = & - \sum_{i=1}^n S'_{r_m+1 \dots r_m+k} \left(\sum_{l=1}^n X_{r_1 \dots r_l-1 \ q \ r_l+1 \dots r_l / r_m+1 \dots r_m+k-2}^{p_1 \dots p_q} \{ r_l q, r_m+k-1 \ r_m+k \} - \right. \\
 & \left. - \sum_{l=1}^n X_{r_1 \dots r_l-1 \ q \ r_l+1 \dots r_l / r_m+1 \dots r_m+k-2}^{p_1 \dots p_q} \{ q \ p_q, r_m+k-1 \ r_m+k \} \right)
 \end{aligned}$$

di cui la (1') è un caso particolare.

4. Componenti invarianti. — Derivate intrinseche.

Se infine si considerano le componenti invarianti $X_{r_1 \dots r_m}^{p_1 \dots p_m}$ di un tensore m^{pl}

e si sostituisce, alla derivazione covariante, la derivazione intrinseca (1) , si ha, come è noto, in luogo della (1):

$$\begin{aligned}
 (1'') \quad & X_{r_1 \dots r_m-1 \ r_m-2 \ r_m-1} - X_{r_1 \dots r_m / r_m-2 \ r_m-1} = \\
 = & - \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n X_{r_1 \dots r_l-1 \ q \ r_l-1 \dots r_l / r_m-1 \dots r_m} \gamma_{r_m+1 \ r_m+2, r_l q}^{(2)}
 \end{aligned}$$

e, in luogo della (7) si trova

$$\begin{aligned}
 (7'') \quad & S_{r_m+1 \dots r_m+k} X_{r_1 \dots r_l / r_m+1 \dots r_m+k} = \\
 = & - \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n S'_{r_m+1 \dots r_m+k} X_{r_1 \dots r_l-1 \ q \ r_l+1 \dots r_l / r_m+1 \dots r_m+k-2} \gamma_{r_m+k-1 \ r_m+k, r_l q}
 \end{aligned}$$

(1) U. CISORTI, *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto*. Questi « Rendiconti », serie 5^a, vol. XXVII (1^o sem. 1918), pp. 387-391. Vedi anche la mia Nota *Sul significato geometrico della derivazione intrinseca*. Questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a (1^o sem. 1928) pp. 474-478.

(2) U. CISORTI, loc. cit., form. (II'). Le $\gamma_{r_m+1, r_m+2, r_l q}$ sono le componenti invarianti del tensore di Riemann.

Matematica. — *Sugli invarianti adiabatici di un generico sistema differenziale.* Nota II di H. GEPPERT, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una prima Nota abbiamo dato il concetto generale di invariante adiabatico ed abbiamo posto il problema dell'integrazione della (8).

Passiamo ora al caso generale di due dimensioni. Si ha allora dalla (8)

$$(9) \quad -\frac{\partial I}{\partial t_0} \varphi_{2v} + \frac{\partial I}{\partial t_1} \varphi_{1v} + \frac{\partial I}{\partial a_v} = 0 \quad (v = 1 \dots p)$$

di cui, come mostreremo tra un momento è possibile assegnare l'integrale generale. Il sistema differenziale si riduce in questo caso alle due equazioni

$$(10) \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2 | a_1 \dots a_p) \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2 | a_1 \dots a_p)$$

e le traiettorie sono definite dall'equazione

$$(11) \quad f_1(x_1, x_2 | a_1 \dots a_p) = c_1.$$

Siccome la f_1 deve essere un integrale delle (10), si ha l'identità

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} X_2 = 0$$

e quindi si può trovare una funzione μ tale che sia

$$(12) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\mu X_2 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = +\mu X_1$$

e che in conseguenza soddisfa all'equazione differenziale

$$(13) \quad \frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu X_2)}{\partial x_2} = X_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \mu}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) = 0.$$

μ è un così detto moltiplicatore di Jacobi e ha nel caso dinamico significato di densità. Viceversa ogni soluzione di quest'equazione ci conduce mediante le (12) ad un integrale (11).

In seguito supporremo che μ non cambi segno nel campo considerato. Giova allora introdurre una media rispetto allo spazio invece di quella ri-

(1) Nella seduta del 17 giugno 1928.

spetto al tempo. Se denotiamo con T l'intervallo di t in cui prendiamo il valore medio, la definizione di questo ci dà:

$$\bar{\alpha} = \int_T \alpha dt : \int_T dt;$$

d'altra parte, interpretando x_1, x_2 come coordinate cartesiane, l'elemento di arco della nostra traiettoria è eguale a

$$d\sigma = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} = dt \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \frac{dt}{\mu} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2} = dt \cdot \left| \frac{G}{\mu} \right|,$$

dove abbiamo posto

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2 = G^2;$$

quindi si trova

$$(14) \quad dt = \left| \frac{\mu}{G} \right| \cdot d\sigma$$

e il valore medio di α è

$$(15) \quad \bar{\alpha} = \int_{\sigma} \alpha \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma : \int_{\sigma} \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma,$$

dove σ indica la parte della traiettoria che corrisponde all'intervallo considerato T di t .

Possiamo dunque dare alla (9) questa forma:

$$(16) \quad \frac{\partial I}{\partial t_0} \cdot \int_{\sigma} \frac{\partial f_2}{\partial a_v} \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma + \frac{\partial I}{\partial c_1} \cdot \int_{\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial a_v} \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma + \frac{\partial I}{\partial a_v} \cdot \int_{\sigma} \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma = 0, \\ (\nu = 1 \dots \rho).$$

Ci limiteremo a indicare un integrale di quest'equazione che non dipende da t_0 e che soddisfa quindi alle seguenti:

$$\frac{\partial I}{\partial t_0} = 0,$$

$$(17) \quad \frac{\partial I}{\partial c_1} \cdot \int_{\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial a_v} \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma + \frac{\partial I}{\partial a_v} \cdot \int_{\sigma} \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma = 0, \quad (\nu = 1 \dots \rho).$$

Nel caso dei sistemi di Liouville di divergenza nulla in cui vale la

$$(18) \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0,$$

si vede dalla (13) che μ è costante e non interviene nella (17); in questo caso l'integrale della (17) già è stato dato dal Gibbs almeno quando il moto corrispondente al sistema differenziale proposto ha carattere periodico. Ritroveremo quest'invariante nel corso dei nostri studi.

In generale la divergenza non è nulla e quindi μ è una funzione delle $x_1, x_2, a_1 \dots a_p$. Introduciamo allora invece delle x_1, x_2 una coppia di nuove coordinate ξ_1, ξ_2 , funzioni regolari invertibili di x_1, x_2 , vincolata soltanto dalla condizione che il determinante funzionale sia proprio il nostro μ , cioè:

$$(19) \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \mu;$$

si avrà allora questo nuovo sistema differenziale che sostituisce le (1):

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} X_2 = \Xi_1(\xi_1, \xi_2 | a_1 \dots a_p) \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} X_2 = \Xi_2(\xi_1, \xi_2 | a_1 \dots a_p), \end{cases}$$

e si dimostra senza difficoltà che questo nuovo sistema ha divergenza nulla cioè che vale la relazione

$$\frac{\partial \Xi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Xi_2}{\partial \xi_2} \equiv 0.$$

Si può quindi sempre passare dal sistema originario ad un nuovo sistema del tipo di Liouville, ma bisogna fare un'osservazione molto essenziale. Per lo studio degli invarianti adiabatici una tale trasformazione in generale non è lecita eccetto quando non dipende dai parametri $a_1 \dots a_p$. In conseguenza gli unici sistemi a cui possiamo applicare la trasformazione su indicata sono quelli per cui la μ è indipendente dai parametri $a_1 \dots a_p$. Chiameremo questi sistemi i sistemi generalizzati di Liouville.

Ora di questi sistemi generalizzati di Liouville è possibile costruire un invariante adiabatico che rappresenta l'estensione naturale dell'invariante di Gibbs. A tale scopo denotiamo come finora con σ il pezzo di traiettoria che corrisponde all'intervallo T di t e con L una curva fissa qualsiasi, indipendente dalle $c_1, t_0, a_1 \dots a_p$ che congiunge le due estremità di σ . Detto C il campo racchiuso fra σ e L diciamo che

$$(21) \quad I = \iint_C |\mu| dx dy$$

sarà un invariante adiabatico del sistema differenziale (10).

Infatti si verifica immediatamente che la (21) è un integrale della (17).
Nè la μ nè la L dipendono da c_1 , quindi $\frac{\partial I}{\partial c_1} dc_1$ si riferisce all'area limitata dalla σ e dalla curva

$$(22) \quad f_1(x_1, x_2 | a_1 \dots a_p) = c_1 + dc_1.$$

Chiamiamo dn il pezzo della normale a σ compreso fra queste curve, allora si ha

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} dc_1 = \int_{\sigma} |\mu| d\sigma dn.$$

D'altra parte si ricava dalla (22)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 = dc_1,$$

dove dx_1, dx_2 sono le componenti di dn . È ben noto che i coseni di direzione di dn sono

$$\frac{1}{G} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{1}{G} \frac{\partial f_1}{\partial x_2},$$

dimodo che si può scrivere

$$dc_1 = G dn$$

e quindi

$$(23) \quad \frac{\partial I}{\partial c_1} = \int_{\sigma} \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma.$$

Per calcolare $\frac{\partial I}{\partial a_v}$ dobbiamo tener conto del fatto che a_v entra soltanto nella σ e non nella μ . Denotando con $d\sigma$ il pezzo della normale a σ compreso fra σ e la curva

$$(24) \quad f_1(x_1, x_2 | a_1, \dots, a_{v-1}, a_v + da_v, a_{v+1}, \dots, a_p) = c_1$$

potremo scrivere come sopra

$$\frac{\partial I}{\partial a_v} da_v = \int_{\sigma} |\mu| d\sigma dv.$$

Ora dalla (24) si ricava

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_v} da_v = - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) = - G dv$$

di modo che si ha

$$(25) \quad \frac{\partial I}{\partial a_v} da_v = - \int_{\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial a_v} \left| \frac{\mu}{G} \right| d\sigma.$$

Sostituendo la (23) e la (25) nella (17) si vede che quest'equazione è soddisfatta, perciò I è un invariante adiabatico.

Per illustrare i nostri risultati riprendiamo il primo e secondo esempio della prima Nota:

1° esempio: La divergenza è nulla, la traiettoria un ellisse

$$x_1^2 + a_1^2 x_2^2 = c_1^2,$$

C il campo racchiuso dall'ellisse e quindi l'invariante adiabatico l'area sua, cioè

$$I = \pi \frac{c_1^2}{a_1}$$

che corrisponde al nostro risultato anteriore.

2° esempio: Un moltiplicatore è

$$\mu = x_1,$$

quindi si tratta di un sistema generalizzato di Liouville; la traiettoria è la metà destra o sinistra dell'ellisse

$$x_1^2 + \frac{a_1^2}{a_2^2} x_2^2 = c_1,$$

con L denotiamo l'asse $x_2 = 0$ e troviamo quindi l'invariante

$$I = \iint_C x_1 dx_1 dx_2 = \frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} c_1^{3/2}$$

già indicato nella prima Nota.

In una Nota successiva estenderemo i nostri risultati al caso (anche più interessante) di più dimensioni. Vogliamo però dimostrare come si possono trattare anche dei casi più complicati in cui μ dipende esplicitamente dai parametri e daremo l'esempio importante dell'oscillatore smorzato.

Siano rispettivamente a_1 ed a_2 la costante di frequenza e la costante di smorzamento, allora le vibrazioni sono rette dal sistema differenziale

$$(26) \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2 a_2 x_2 - a_1^2 x_1,$$

il cui integrale generale si può mettere sotto la forma

$$(27) \quad \begin{cases} x_1 = c_1 \cdot e^{-a_2(t-t_0)} \cos \gamma(t-t_0), \\ x_2 = -c_1 \cdot e^{-a_2(t-t_0)} \{ a_2 \cos \gamma(t-t_0) + \gamma \sin \gamma(t-t_0) \}, \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$\gamma = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}.$$

Il moltiplicatore del sistema è

$$\mu = e^{-\frac{2a_2}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{x_2 + a_2 x_1}{\gamma x_1}},$$

dipende dunque dai parametri a_1, a_2 , di modo che la nostra teoria non è applicabile. Risolvendo le (27) rispetto a $t - t_0$ e c_1 si trova:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 x_1^2 + (a_2 x_1 + x_2)^2} \cdot e^{-\frac{a_2}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{a_2 x_1 + x_2}{\gamma x_1}} = f_1(x_1, x_2 | a_1, a_2), \\ t - t_0 &= -\frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{a_2 x_1 + x_2}{\gamma x_1} = f_2(x_1, x_2 | a_1, a_2) \end{aligned} \right.$$

e si può ricorrere alla teoria generale esposta nella prima Nota. A questo scopo formiamo le derivate di f_1, f_2 rispetto a a_1 ed a_2 sostituendovi invece delle x_1, x_2 le (27). Allora si avrà:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} &= \varphi_{11} = -\frac{a_1 c_1}{\gamma^2} \left\{ a_2(t - t_0) + \sin^2 \gamma(t - t_0) + \frac{a_2}{2\gamma} \sin 2\gamma(t - t_0) \right\}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2} &= \varphi_{12} = \frac{c_1}{\gamma^2} \left\{ a_1^2(t - t_0) + \frac{2a_2^2 - a_1^2}{2\gamma} \sin 2\gamma(t - t_0) - a_2 \cos 2\gamma(t - t_0) \right\}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} &= \varphi_{21} = -\frac{a_1}{\gamma^2} \left\{ (t - t_0) + \frac{1}{2\gamma} \sin 2\gamma(t - t_0) \right\}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_2} &= \varphi_{22} = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ a_2(t - t_0) - \cos^2 \gamma(t - t_0) + \frac{a_2}{2\gamma} \sin 2\gamma(t - t_0) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Secondo la teoria generale si dovrebbero ora formare i valori medi di queste derivate rispetto al tempo e sostituirli nella (8); si vede però subito che non esiste nessuno di questi valori medi e che quindi il nostro sistema (26) non ammette degli invarianti *adiabatici assoluti* nel senso da noi inteso. Ma ciò non esclude l'esistenza di invarianti *relativi* che risultano quando invece di far variare le a_1 ed a_2 indipendentemente in qualsiasi modo arbitrario si legano queste variazioni alla condizione che una certa funzione $\lambda(a_1, a_2)$ resti assolutamente costante.

Per risolvere questa questione conviene introdurre invece delle a_1 ed a_2 due nuove funzioni di esse:

$$x(a_1, a_2), \quad \lambda(a_1, a_2)$$

che vincoleremo dalla condizione che il determinante funzionale sia 1, cioè

$$(30) \quad \frac{\partial(x, \lambda)}{\partial(a_1, a_2)} = 1,$$

di modo che si hanno le relazioni ben note

$$(31) \quad \frac{\partial a_1}{\partial \kappa} = \frac{\partial \lambda}{\partial a_2}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \kappa} = -\frac{\partial \lambda}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \lambda} = -\frac{\partial \kappa}{\partial a_2}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \lambda} = \frac{\partial \kappa}{\partial a_1}.$$

Tenendo ora assolutamente costante la λ , l'equazione corrispondente (8) che determina l'invariante I sparisce ed abbiamo quindi da tener conto soltanto dell'equazione che corrisponde a κ , cioè

$$(32) \quad -\frac{\partial I}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \kappa} + \frac{\partial I}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \kappa} + \frac{\partial I}{\partial \kappa} = 0$$

ed affinchè questa abbia un senso, è necessario che esista uno dei valori medî di $\frac{\partial f_1}{\partial \kappa}$ o $\frac{\partial f_2}{\partial \kappa}$ rispetto al tempo. Riprendendo le (29) si ha da determinare κ in tal modo che spariscano i termini che contengono $t - t_0$ la quale condizione ci fornisce le equazioni

$$(33 a) \quad -a_2 \frac{\partial a_1}{\partial \kappa} + a_1 \frac{\partial a_2}{\partial \kappa} = 0,$$

$$(33 b) \quad -a_1 \frac{\partial a_1}{\partial \kappa} + a_2 \frac{\partial a_2}{\partial \kappa} = 0.$$

Trattiamo il primo caso dell'equazione (33 a), allora mediante le (30) e (31) segue

$$\kappa = \frac{1}{2} a_1^2, \quad \lambda = \frac{a_2}{a_1}$$

di modo che viene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \kappa} &= \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1^2} = -\frac{c_1}{\gamma^2} \sin^2 \gamma(t - t_0) - \frac{a_2 c_1}{\gamma a_1^2} \sin 2\gamma(t - t_0) - \\ &\quad - \frac{a_2^2 v_1}{a_1^2 \gamma^2} \cos 2\gamma(t - t_0), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \kappa} = -\frac{1}{a_1^2}(t - t_0) - \frac{1}{2\gamma a_1^3} \sin 2\gamma(t - t_0) - \frac{a_2}{a_1^2 \gamma^2} \cos^2 \gamma(t - t_0).$$

Tenendo dunque fisso il rapporto $a_2 : a_1$ esiste un invariante adiabatico indipendente da t_0 e questo sarà una soluzione della (32), cioè

$$-\frac{c_1}{4\kappa(1 - \lambda^2)} \cdot \frac{\partial I}{\partial c_1} + \frac{\partial I}{\partial \kappa} = 0$$

e quindi si avrà

$$(34 a) \quad I = f\left(a_1 c_1^2 \lambda^{-2} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\right).$$

Riprendiamo ora il secondo caso dell'equazione (33 b), in cui si trova

$$\kappa = \frac{1}{4} \ln \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad \lambda = a_1^2 - a_2^2 = \gamma^2$$

donde risulta

$$\frac{\partial f_1}{\partial \kappa} = - \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \cdot 2 a_2 - \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \cdot 2 a_1 = a_1 c_1 \left\{ - 2(t - t_0) + \frac{2 a_2}{\gamma^2} \cos^2 \gamma(t - t_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma} \sin 2 \gamma(t - t_0) \right\},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \kappa} = \frac{2 a_1}{\gamma^2} \cdot \cos^2 \gamma(t - t_0).$$

Tenendo fisso il valore di γ , cioè della costante di frequenza modificata, cercheremo allora un invariante che non dipenda da c_1 , ma soltanto da t_0 e che in conseguenza soddisfa alla

$$- \frac{a_1}{\gamma^2} \frac{\partial I}{\partial t_0} + \frac{\partial I}{\partial \kappa} = - \frac{\cosh 2 \kappa}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\partial I}{\partial t_0} + \frac{\partial I}{\partial \kappa} = 0;$$

la soluzione di questa relazione è

$$(34 b) \quad I = f \left(t_0 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sinh 2 \kappa \right) = f(2 \gamma^2 t_0 - a_2).$$

Matematica. — *Sur les déformations dans une variété à courbure constante.* Nota ⁽¹⁾ di W. ŚLEBODZIŃSKI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Soit $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point arbitraire d'une variété riemannienne (V_n) . Attachons à ce point un repère cartésien (I) formé de n vecteurs unitaires $I_i (i = 1, 2, \dots, n)$, rectangulaires deux à deux. Le passage au repère attaché à un point infiniment voisin M' est défini au moyen des formules

$$dM = \sum_{j=1}^n \omega_j I_j, \quad dI_i = \sum_{h=1}^n \omega_{ih} I_h,$$

$$\omega_i = \sum_{r=1}^n \lambda_{ir} dx^r, \quad \omega_{ik} = \sum_{l=1}^n \gamma_{ikl} \omega_l, \quad \gamma_{ikl} + \gamma_{kil} = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, \dots, n),$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1928.

où l'on a posé $dM = \overline{MM'}$. Désignons par $[k]$ la congruence de courbes tangentes en chaque point au vecteur I_k du repère correspondant, par $\frac{\partial}{\partial \sigma_k}$ la dérivée par rapport à l'arc d'une de ces courbes.

Soient $u_{r_1 r_2 \dots r_m}$ les composantes orthogonales relatives au repère (I) d'un tenseur (U). Si l'on désigne par $u_{r_1 \dots r_m r_{m+1} \dots r_{m+k}}^{(k)}$ les composantes orthogonales de la $k^{ième}$ dérivée covariante du tenseur (U), on aura ⁽¹⁾

$$(1) \quad u_{r_1 \dots r_m r_{m+1}}^{(1)} = \frac{\partial u_{r_1 \dots r_m}}{\partial \sigma_{r_{m+1}}} + \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_{qr_l r_{m+1}} u_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m}$$

et les conditions d'intégrabilité prendront la forme

$$(2) \quad u_{r_1 \dots r_m r_{m+1} r_{m+2}}^{(2)} - u_{r_1 \dots r_m r_{m+2} r_{m+1}}^{(2)} = \\ = \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^m R_{qr_l r_{m+1} r_{m+2}} u_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m},$$

$R_{ik,lm}$ étant les composantes orthogonales du tenseur de Riemann-Christoffel.

2. Ceci posé, soit

$$Df = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial f}$$

le symbole d'une déformation infiniment petite de la (V_n) .

En prolongeant la transformation Df aux quantités ω_i , on trouve

$$(3) \quad D\omega_r = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial \sigma_i} + \sum_{i=1}^n (\gamma_{rsi} - \gamma_{ris}) u_i \right\} \omega_s.$$

Or, on peut, d'une seule manière, déterminer deux systèmes de quantités φ_{rs} et b_{rs} , satisfaisant aux conditions $\varphi_{rs} + \varphi_{sr} = 0$, $b_{rs} = b_{sr}$ et telles qu'il soit

$$(4) \quad \frac{\partial u_r}{\partial \sigma_s} + \sum_{i=1}^n (\gamma_{rsi} - \gamma_{ris}) u_i = \varphi_{rs} + b_{rs}.$$

On aura donc

$$D\omega_r = \sum_{i=1}^n (\varphi_{rs} + b_{rs}) \omega_s, \quad Dd\sigma^2 = 2 \sum_{r,i=1}^n b_{rs} \omega_r \omega_s,$$

où l'on a posé $d\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2$. On voit bien que les φ_{rs} sont les composantes de la rotation et les b_{rs} les composantes de la déformation de l'élé-

(1) U. CISOSSI, « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », vol. 27, 1^o ser., p. 387; vol. 27, 2^o sem., p. 22.

ment $\overline{MM'}$. En rapprochant les formules (1) et en adoptant les notations

$$\psi_{rs} = \varphi_{rs} - \sum_{i=1}^n \gamma_{rsi} u_i,$$

les égalités (4) peuvent s'écrire

$$(I) \quad u_{rs}^{(1)} = \psi_{rs} + b_{rs}.$$

Les conditions (2) appliquées aux équation (I) donnent

$$(5) \quad \psi_{rst}^{(1)} + \psi_{irs}^{(1)} = \sum_{q=1}^n R_{qr, st} u_q + b_{ris}^{(1)} - b_{rst}^{(1)}.$$

En permutant circulairement les indices r, s, t et en ajoutant les égalités obtenues, on trouve

$$\psi_{rst}^{(1)} + \psi_{sir}^{(1)} + \psi_{irs}^{(1)} = 0,$$

d'où l'on déduit, eu égard aux équations (5), les relations suivantes

$$(II) \quad \psi_{rst}^{(1)} = \sum_{q=1}^n R_{qtsr} u_q + b_{irs}^{(1)} - b_{tsr}^{(1)}.$$

De même, les conditions d'intégrabilité du système (II) nous conduisent aux égalités

$$(III) \quad \sum_{q=1}^n (R_{rsqtu}^{(1)} - R_{rsqut}^{(1)}) u_q - \sum_{q=1}^n R_{sqtu} \psi_{rq} - \sum_{q=1}^n R_{rqut} \psi_{sq} - \sum_{q=1}^n R_{uqrs} \psi_{tq} - \\ - \sum_{q=1}^n R_{lqsr} \psi_{uq} = b_{irsu}^{(2)} - b_{tsru}^{(2)} - b_{ursl}^{(2)} + b_{usrt}^{(2)} + \sum_{q=1}^n R_{rsqu} b_{ql} - \sum_{q=1}^n R_{rsqt} b_{qu}.$$

Remarque. — Les quantités ψ_{rs} et b_{rs} sont les composantes orthogonales de deux tenseurs; il n'en est pas de même des rotations φ_{rs} qui peuvent être toutes annulées par un changement convenable du repère (I).

3. Supposons maintenant que la variété (V_n) soit à courbure constante K . On aura dans ce cas

$$R_{ih, ib} = K \quad (i \neq b),$$

toutes les autres composantes $R_{ik, lu}$ étant nulles. Nous distinguerons dans le système (III) trois groupes d'équations, suivant qu'il y ait deux, trois ou quatre indices différents. Pour obtenir le premier groupe nous pouvons évidemment supposer $t = r, u = s$. Les équations (III) prendront alors la forme suivante

$$b_{rst}^{(2)} + b_{srs}^{(2)} - b_{rrss}^{(2)} - b_{srrr}^{(2)} - K(b_{rr} + b_{ss}) = 0.$$

Dans le deuxième cas ($u = r$), il viendra

$$b_{rstl}^{(2)} + b_{rtlr}^{(2)} - b_{rrsl}^{(2)} - b_{lstr}^{(2)} - K b_{sl} = 0.$$

Envisageons enfin le cas, où tous les quatre indices r, s, t, u sont différents l'un de l'autre; on trouvera

$$b_{trsl}^{(2)} + b_{ustr}^{(2)} - b_{lstru}^{(2)} - b_{uksl}^{(2)} = 0.$$

On vérifie facilement que les équations de trois groupes peuvent être mises sous la forme suivante

$$(IV) \quad b_{trsu}^{(2)} + b_{ustr}^{(2)} - b_{lstru}^{(2)} - b_{uksl}^{(2)} + K(\epsilon_{ir} b_{su} + \epsilon_{us} b_{rl} - \epsilon_{is} b_{ru} - \epsilon_{ur} b_{sl}) = 0$$

$$(\epsilon_{ii} = 1, \epsilon_{ik} = 0, i \neq k).$$

Les équations (IV) constituent l'extension des équations de Barré de Saint-Venant. Elles expriment les conditions nécessaires et suffisantes, pour que les quantités b_{rs} soient les composantes d'une déformation infiniment petite de la variété à courbure constante K ; si elles sont vérifiées, le système formé d'équations (I) et (II) est complètement intégrable, son intégrale contenant $\frac{n(n+1)}{2}$ constantes arbitraires. Si l'on suppose que la variété soit

euclidienne ($K = 0$) et si on la rapporte à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, les équations (IV) deviennent identiques aux relations qui ont été données pour la première fois par M. K. Zorawski⁽¹⁾.

Remarque. Les conditions de B. de St.-Venant pour les variétés à courbure constante ont été trouvées pour la première fois - d'une façon différente de la mienne - par E. Beltrami. Elles ont été aussi assignées par G. Ricci dans ses leçons sur la théorie de l'élasticité. (V. sur ce sujet E. Cesàro « Introduzione alla Teoria matematica della Elasticità », 1894). Se dois ses renseignements à M. le Professeur Levi-Civita.

(1) *Ueber Deformationen komponenten.* « Bull. de l'Ac. des Sc. », Cracovie 1912, p. 727.

Teoria dei numeri. — *Determinazione del numero delle congruenze $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ aventi tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p .* Nota⁽¹⁾ I di G. SANSONE, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

I. Questa Nota fa seguito ad una Memoria in corso di pubblicazione negli « Annali di Matematica »⁽²⁾. Ivi abbiamo studiato la risoluzione delle congruenze cubiche riferite ad un modulo primo le quali possono supporre senz'altro della forma

$$(I) \quad x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p} \quad (p > 3)$$

e ne abbiamo dato la risoluzione nel caso che le tre radici non abbiano lo stesso carattere quadratico rispetto al modulo.

Abbiamo visto che si presenta questa circostanza (tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p) quando l'intero a soddisfa le condizioni

$$(I) \quad D_{p-2}(a) \equiv 0, \quad D_{\frac{p-3}{2}}(a) \equiv 0, \quad D_{\frac{p-5}{2}}(a) \equiv 0 \pmod{p}$$

essendo i polinomi $D_b(a)$ definiti secondo che l'indice sia pari o dispari dalle formule

$$\begin{aligned} D_{2k}(a) &= \binom{k}{0} a^k - \binom{k-1}{2} a^{k-1} + \binom{k-2}{4} a^{k-2} - \\ &\quad - \binom{k-3}{6} a^{k-3} + \dots + (-1)^r \binom{k-r}{2r} a^{k-r}, \\ D_{2k+1}(a) &= -\binom{k}{1} a^k + \binom{k-1}{3} a^{k-1} - \binom{k-2}{5} a^{k-2} + \\ &\quad + \binom{k-3}{7} a^{k-3} - \dots + (-1)^{r+1} \binom{k-r}{2r+1} a^{k-r}, \end{aligned}$$

avendosi rispettivamente nei due casi $r = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$, $r = \left\lfloor \frac{k-1}{3} \right\rfloor$.

In una prossima Nota faremo vedere che alle (I) si può sostituire un'unica condizione per l'intero a e per questo ci sarà comodo determinare ora quante sono le congruenze (I) le cui radici hanno lo stesso carattere quadratico modulo p .

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1928.

(2) La Memoria è riassunta nel « Bollettino dell'Un. Mat. Ital. », anno VII, p. 27, e la indicheremo in seguito con (M).

Abbiamo visto che se x_1, x_2, x_3 sono le tre radici della (1), esiste un intero α per il quale si ha:

$$(2) \quad x_1 \equiv \frac{3 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}, \quad x_2 \equiv -\frac{3 + \alpha^2}{2(1 - \alpha)}, \quad x_3 \equiv -\frac{3 + \alpha^2}{2(1 + \alpha)}, \quad (\text{mod. } p)$$

ed esse avranno lo stesso carattere quadratico modulo p allora soltanto si abbia

$$(3) \quad \left(\frac{1 - \alpha}{p} \right) = \left(\frac{-2}{p} \right), \quad \left(\frac{1 + \alpha}{p} \right) = \left(\frac{-2}{p} \right)$$

e secondochè sia $\left(\frac{3 + \alpha^2}{p} \right) = +1$, $\left(\frac{3 + \alpha^2}{p} \right) = -1$ le tre radici avranno tutte il carattere $+1$ o il carattere -1 .

Sappiamo ancora⁽¹⁾ che se nelle (2) l'intero α percorre la successione

$$2, 4, 5, \dots, \frac{p-1}{2}$$

con l'esclusione dell'eventuale valore di α per il quale si ha $\alpha^2 \equiv -3 \pmod{p}$ si ottengono le stesse terne di radici tre volte; possiamo anche far percorrere ad α i valori

$$(3') \quad 2, 4, 5, \dots, \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}, \dots, p-4, p-2$$

con l'esclusione degli eventuali valori di α per i quali è $\alpha \equiv -3 \pmod{p}$ ed otterremo la stessa terna di radici 6 volte.

Ora per la (3) possiamo porre

$$1 - \alpha \equiv -2\mu^2, \quad 1 + \alpha \equiv -2\lambda^2 \quad (\text{mod. } p)$$

con λ e μ interi non nulli, e da queste segue

$$(4) \quad \lambda^2 + \mu^2 \equiv -1, \quad (4') \quad \alpha \equiv -1 - 2\lambda^2 \quad (\text{mod. } p).$$

Inversamente se λ è un intero positivo per il quale sia possibile la (4), la (4') fornisce un corrispondente valore di α per il quale sono verificate le (3), e perchè questo numero α appartenga alla successione (3') occorre e basta che λ non verifichi nessuna delle congruenze

$$(5)_1 \quad 2\lambda^2 \equiv -1, \quad (5)_2 \quad \lambda^2 \equiv -1, \quad (5)_3 \quad \lambda^2 \equiv -2, \quad (5)_4 \quad \lambda^2 \equiv 1, \\ (5)_5 \quad \lambda^2 \equiv 0, \quad (5)_6 \quad \lambda^2 \pm \lambda + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Queste congruenze per l'ipotesi $p > 3$ come si verifica subito non hanno radici comuni.

(1) Cfr. (M), n. 10.

Si osservi poi che a due valori incongrui di λ , λ e λ_1 corrisponde per la (4') un medesimo valore di α se è $-1 - 2\lambda^2 \equiv -1 - 2\lambda_1^2$ cioè $\lambda \equiv -\lambda_1$, e siccome per la (5), il numero λ non assume il valore 0, concludiamo che il numero delle congruenze (1) le cui radici hanno lo stesso carattere quadratico è uguale ad un dodicesimo del numero di valori di λ scelti nel sistema

$$0, 1, 2, \dots, p-1,$$

esclusi quelli che soddisfano le $(5)_1, \dots, (5)_6$, per i quali è possibile la congruenza (4).

Per determinare questo numero studieremo a parte i due casi $p = 4l + 3$, $p = 4l + 1$.

a) Sia p della forma $4l + 3$, e scegliamo una coppia di interi a e b per i quali sia $(6) a^2 + b^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Tale coppia esiste: Infatti sia g una radice primitiva modulo p ; possiamo supporre $g \equiv 1 \pmod{4}$ perchè se è $g \equiv 3 \pmod{4}$ per la radice primitiva $g + 2p$ si ha $g + 2p \equiv 1 \pmod{4}$; possiamo ancora supporre g numero primo, in caso opposto basterà scegliere un numero primo, nella progressione $g + 4pt$; ne segue che il numero $g^{\frac{p-1}{2}}$ è decomponibile nella somma di due quadrati $a^2 + b^2$, ed avendosi $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ è verificata la (6).

Avendosi $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv -1$, nella (6) a e b sono diversi da 0; la (4) diventa poi:

$$(4'') \quad \lambda^2 + \mu^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{p}.$$

Per $\lambda \equiv \pm a$ si hanno due valori di λ per i quali è possibile la (4''), esclusi questi valori, e posto

$$\sigma(\lambda - a) \equiv b - \mu \pmod{p}$$

la (4'') dà:

$$(7) \quad \lambda = \frac{a\sigma^2 + 2b\sigma - a}{1 + \sigma^2}, \quad \mu = \frac{-b\sigma^2 + 2a\sigma + b}{1 + \sigma^2}.$$

Questi valori di λ e μ che hanno significato qualunque sia σ [non essendo mai $1 + \sigma^2 \equiv 0 \pmod{p}$ perchè p ha la forma $4l + 3$] soddisfano le (4''), perciò quando σ percorre la successione

$$0, 1, 2, \dots, p-1$$

la (7) ci fornisce tutti i valori leciti di λ [compresi $\lambda = +a$, $\lambda = -a$ i quali corrispondono a $\sigma = \frac{a}{b}$, $\sigma = 0$].

La (7) ci fornisce per due valori incongrui di σ , σ e σ_1 lo stesso valore di λ se si ha

$$\sigma_1 (b\sigma - a) \equiv b + a\sigma \pmod{p}.$$

Questa non è identica, perchè il verificarsi simultaneo delle due congruenze $b\sigma - a \equiv 0$, $b + a\sigma \equiv 0 \pmod{p}$ porta $1 + \sigma^2 \equiv 0 \pmod{p}$ e ciò è impossibile; essa non è soddisfatta da $\sigma \equiv \sigma_1$ perchè dovrebbe aversi $b\sigma^2 - 2a\sigma - b \equiv 0$ e ciò è impossibile essendo il suo discriminante $a^2 + b^2 \equiv -1$ non residuo quadratico di p ; concludiamo che al valore di σ per il quale è $b\sigma \equiv a$ corrisponde per la (7) un solo valore di λ per il quale è possibile la (4''), e a tutti gli altri $p-1$ valori di σ corrispondono $\frac{p-1}{2}$ valori incongrui di λ per i quali è possibile la (4'').

Qui conviene distinguere i casi che p abbia la forma $24k+7$, $24k+11$, $24k+19$, $24k+23$. Esaminiamo i casi $p=24k+7$, $p=24k+23$, nello stesso modo si farà l'esame negli altri due casi.

Sia $p=24k+7=6(4k)+7$, e con le notazioni del n. 3 della Memoria citata con (M), $h=4k$; le tre congruenze $(5)_1, (5)_2, (5)_3$ non sono possibili; non è possibile la $(5)_4$ perchè la (4) darebbe $\mu^2 \equiv -2 \pmod{p}$ e ciò non può essere avendosi $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$; non è ancora possibile la $(5)_5$; avendosi invece $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ le $(5)_6$ sono soddisfatte da 4 valori di λ che non sono accettabili; i valori accettabili di λ sono perciò $\frac{p-1}{2} + 1 - 4 = \frac{24k+6}{2} - 3 = 12k$; i valori leciti di α per i quali sono verificate le (3)

$$\text{sono quindi } \frac{12k}{12} = k = \left\lfloor \frac{h+1}{4} \right\rfloor.$$

Sia ancora ad es. $p=24k+23=6(4k+3)+5$, $h=4k+3$.

Avendosi $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ non sono possibili le congruenze $(5)_1, (5)_2, (5)_3, (5)_6$; le $(5)_4$ e $(5)_5$ darebbero per la (4) le congruenze impossibili $\mu^2 \equiv -2$, $\mu^2 \equiv -1 \pmod{p}$, quindi i valori leciti di λ sono: $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{24k+22}{2} + 1 = 12k+12$;

$$\text{i valori leciti di } \alpha \text{ per i quali sono verificate le (3) sono quindi } \frac{12k+12}{12} = k+1 = \left\lfloor \frac{h+1}{4} \right\rfloor.$$

Abbiamo così dimostrato: se p è della forma $4l+3$ il numero delle congruenze $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ le cui tre radici hanno lo stesso carattere quadratico è $\left\lfloor \frac{h+1}{4} \right\rfloor$ con $h = \frac{p-5}{6}$, $\frac{p-7}{6}$ secondochè è $p \equiv 5, 7 \pmod{6}$.

b) Esaminiamo ora il caso che il modulo p abbia la forma $p = 4l + 1$.

Consideriamo l'intero a (non nullo) per il quale si ha; $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$, la (4) può scriversi allora

$$(8) \quad (\lambda - a)(\lambda + a) \equiv (\mu a)^2 \pmod{p}$$

Non possiamo avere $\lambda \equiv \pm a$, perchè sarebbe $\lambda^2 \equiv -1$ e ciò non può essere per la (5)₂. Posto $\sigma(\lambda - a) \equiv \mu a$, la (8) dà $\lambda + a \equiv \sigma \mu a$ e dal sistema lineare formato da queste due congruenze otteniamo:

$$(\sigma^2 - 1)\lambda = a(\sigma^2 + 1) \quad , \quad (\sigma^2 - 1)\mu = 2\sigma.$$

Questo sistema è impossibile per $\sigma \equiv \pm 1$, esclusi questi valori abbiamo

$$(9) \quad \lambda = a \frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1} \quad , \quad \mu = \frac{2\sigma}{\sigma^2 - 1}.$$

Le (9), qualunque sia l'intero $\sigma \equiv \pm 1$ forniscono delle soluzioni della (4). A due valori incongrui di σ , σ e σ_1 corrispondono per la prima delle (9) due valori congrui di λ se è $2 + \frac{1}{\sigma^2 - 1} = 2 + \frac{1}{\sigma_1^2 - 1}$, cioè $\sigma^2 \equiv \sigma_1^2$ ossia $\sigma_1 \equiv -\sigma$, e se osserviamo che per $\sigma = 0$ si ha $\lambda \equiv -a$ quindi $\lambda^2 \equiv -1$ che non è accettabile, abbiamo che ai $p-3$ valori possibili di σ

$$2, 3, 4, \dots, p-4, p-3, p-2$$

corrispondono $\frac{p-3}{2}$ valori incongrui di λ per i quali è possibile la (4).

Qui conviene ancora distinguere i casi che p abbia la forma $24k+1$, $24k'+5$, $24k+13$, $24k+17$; noi esaminiamo per brevità i casi $p = 24k+1$, $p = 24k+17$.

Per $p = 24k+1 = 6(4k-1) + 5$, $h = 4k-1$, abbiamo $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right) = 1$; le congruenze $(5)_1, (5)_3, (5)_4, (5)_6$ sono possibili e soddisfatte da $2 + 2 + 2 + 4 = 10$ valori incongrui di λ , la $(5)_5$ dal valore di $\lambda \equiv 0$ [che corrisponde ai due valori di σ per i quali si ha $\sigma^2 + 1 \equiv 0$], la $(5)_2$ è impossibile [occorre $\sigma \equiv 0$, e noi abbiamo escluso questo valore per σ] quindi i valori leciti per λ sono $\frac{p-3}{2} - 11 = \frac{24k-2}{2} - 11 = 12(k-1)$ e i valori leciti di α per i quali sono verificate le (3) sono $\frac{12(k-1)}{12} = k-1 = \left[\frac{4k-1}{4}\right] = \left[\frac{h}{4}\right]$.

Per $p = 24k+17 = 6(4k+2) + 5$, $h = 4k+2$; abbiamo $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ e perciò le congruenze $(5)_1, (5)_3, (5)_4$ ammettono rispetti-

vamente $2 + 2 + 2 + 1 = 7$ radici, le $(5)_6$ sono impossibili, e siccome per nessun valore di σ otteniamo un valore di λ che soddisfa la $(5)_2$, concludiamo che i valori leciti di λ sono $\frac{p-3}{2} - 7 = 12k$ e i valori leciti

di α per i quali sono verificate le (3) sono $\frac{12k}{12} = k = \left[\frac{h}{4} \right]$.

Concludendo abbiamo il teorema: posto $p = 6h + 5$, $6h + 7$, il numero delle congruenze

$$(I) \quad x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$$

nelle quali le tre radici hanno lo stesso carattere quadratico modulo p è $\left[\frac{h}{4} \right]$

per $p \equiv 1 \pmod{4}$ e $\left[\frac{h+1}{4} \right]$ per $p \equiv 3 \pmod{4}$.

2. Se indichiamo con h_1, h_2, h_3, h_4 rispettivamente il numero delle congruenze (I) le cui radici presentano rispettivamente i caratteri:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{p} \right) = +1, \quad \left(\frac{x_2}{p} \right) = +1, \quad \left(\frac{x_3}{p} \right) = +1; \quad \left(\frac{x_1}{p} \right) = -1, \quad \left(\frac{x_2}{p} \right) = -1, \\ \left(\frac{x_3}{p} \right) = -1; \quad \left(\frac{x_1}{p} \right) = +1, \quad \left(\frac{x_2}{p} \right) = +1, \quad \left(\frac{x_3}{p} \right) = -1; \quad \left(\frac{x_1}{p} \right) = +1, \\ \left(\frac{x_2}{p} \right) = -1, \quad \left(\frac{x_3}{p} \right) = -1, \end{aligned}$$

i teoremi dimostrati nel n. 3 della Memoria citata con (M) e nel numero precedente provano che si ha:

$$(IO) \quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$$

e (II)₁ $h_1 + h_2 = \left[\frac{h}{4} \right]$ se $p \equiv 1 \pmod{4}$; oppure (II)₂ $h_1 + h_2 = \left[\frac{h+1}{4} \right]$ se $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Possiamo ancora trovare un'altra relazione tra i numeri h_1, h_2, h_3, h_4 .

Osserviamo che il numero $h_1 + h_4$ rappresenta il numero delle congruenze (I) per le quali il prodotto $\left(\frac{x_1 x_2 x_3}{p} \right) = \left(\frac{-a}{p} \right)$ ha il valore $+1$, e $h_2 + h_3$ il numero di quelle per le quali risulta $\left(\frac{-a}{p} \right) = -1$.

È subito visto che se è $\left(\frac{3}{p} \right) = -1$, vale la relazione $h_1 + h_4 = h_2 + h_3$. Infatti la sostituzione lineare

$$(I2) \quad y = -3x/(2x+3)$$

muta la (I) nella congruenza

$$y^3 + a'y + a' \equiv 0 \pmod{p}$$

con $a' = -27a/(27+4a)$, ed avendosi $\left(\frac{-27-4a}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$,
abbiamo $\left(\frac{a'}{p}\right) = -\left(\frac{a}{p}\right)$, cioè la (12) muta le congruenze (1) con $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$
in quelle con $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ e inversamente, ne segue che *i due numeri*
 $b_1 + b_4$ *e* $b_2 + b_3$ *sono uguali*, e siccome la loro somma è b , sarà:

$$(13)_1 \quad b_1 + b_4 = \left[\frac{b}{2}\right] \quad , \quad (13)_2 \quad b_2 + b_3 = b - \left[\frac{b}{2}\right].$$

Queste stesse relazioni sussistono se si ha $\left(\frac{3}{p}\right) = +1$, e perciò $p = 6b + 5$,
 $6b + 7$ con b dispari. Basterà per questo ragionare come nel numero pre-
cedente, determinando quante volte avviene che il simbolo $\left(\frac{3+\alpha^2}{p}\right)$ prende
il valore $+1$, quando α percorre la successione $(3')$ ⁽¹⁾.

Geometria. — *Une interprétation géométrique de l'élément li-
néaire projectif de l'hypersurface.* Nota di J. KANITANI, presen-
tata ⁽²⁾ dal corrisp. G. FUBINI.

Considérons une hypersurface dans l'espace projectif à $n+1$ dimen-
sions définie par

$$x^k = f^k(u^1, \dots, u^n) \quad (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Nous désignerons, désormais, une telle équation par

$$x = f(u^1, \dots, u^n),$$

et nous conviendrons aussi de désigner par (x) le point dont les coordon-
nées sont $(x^0, x^1, \dots, x^{n+1})$.

Soit $H_{\sigma\tau} du^\sigma du^\tau$ et $K_{\sigma\tau\rho} du^\sigma du^\tau du^\rho$ la forme asymptotique et la forme
de Darboux de l'hypersurface donnée; l'élément linéaire projectif est défini par

$$\frac{K_{\sigma\tau\rho} du^\sigma du^\tau du^\rho}{H_{\sigma\tau} du^\sigma du^\tau}.$$

(1) In complesso le relazioni (10), (11), (13) formano tre relazioni lineari fra i nu-
meri b_1, b_2, b_3, b_4 e la conoscenza di uno di essi permette di calcolare gli altri tre. Vo-
lendo determinare uno di essi, ad es. b_1 , bisogna trovare quanti sono gli interi α per i
quali si ha $\left(\frac{3+\alpha^2}{p}\right) = \left(\frac{1-\alpha^2}{p}\right)$, ma questa determinazione richiede la teoria delle con-
gruenze biquadratiche.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

Nous supposons que $|H_{ij}| \neq 0$, et introduisant le calcul différentiel absolu, dans lequel la forme asymptotique est prise comme forme fondamentale, nous désignerons par $\bar{d}f_i$ la différentielle absolue de f_i .

Soit (Z^1, \dots, Z^{n+1}) les coordonnées non-homogènes par rapport au repère formés par les $n+1$ points $(x_1), \dots, (x_n), (y)$ définis par

$$x_i = \frac{\partial f}{\partial u^i}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$y = \frac{1}{n} H^{\sigma\tau} \frac{\partial x_\sigma}{\partial u^\tau}.$$

Pour l'hypersurface donnée, on a ⁽¹⁾.

$$Z^i = du^i + \frac{1}{2} \{ \bar{d}(du^i) - K_{\sigma\tau}^i du^\sigma du^\tau \} + \dots,$$

$$Z^{n+1} = \frac{1}{2} du^\sigma du_\sigma + \frac{1}{6} \left\{ \frac{2}{3} d(du^\sigma du_\sigma) - K_{\sigma\tau\rho} du^\sigma du^\tau du^\rho \right\} + \dots$$

Parmi les hyperquadriques qui touchent l'hypersurface donnée en origine, c'est-à-dire, en le point (x) , nous en considérons trois:

La première Q_1 , est l'hyperquadrique de Lie définie par

$$2 Z^{n+1} = H_{\sigma\tau} Z^\sigma Z^\tau + a (Z^{n+1})^2.$$

Le deuxième Q_2 est celle qui a le contact de troisième ordre avec toutes les courbes asymptotiques passant par l'origine. Cette hyperquadrique est définie par l'équation de la forme

$$2 Z^{n+1} = \frac{1}{3} H_{\sigma\tau} Z^\sigma Z^\tau + 2 a'_\sigma Z^\sigma Z^{n+1} + a' (Z^{n+1})^2.$$

La troisième Q_3 est celle qui a le contact de second ordre avec l'hypersurface, et le contact de troisième ordre avec une courbe quelconque C qui passe par P et qui n'est pas une courbe asymptotique. Cette hyperquadrique est définie par

$$2 Z^{n+1} = H_{\sigma\tau} Z^\sigma Z^\tau + 2 a''_\sigma Z^\sigma Z^\tau + a'' (Z^{n+1})^2,$$

où les coefficients a''_i sont assujettis à la condition que

$$a''_\sigma du^\sigma = \frac{2 K_{\sigma\tau\rho} du^\sigma du^\tau du^\rho}{H_{\sigma\tau} du^\sigma du^\tau}, \quad (a'' \text{ quelconque})$$

les du^i étant les différentielles des u^i prises suivant la courbe C .

(1) J. KANITANI, « Mem. Coll. Sc. Imp. Univ. Kyoto », vol. IX (1926), p. 268.

Soit p l'hyperplan tangent en l'origine à l'hypersurface, et p_1, p_2, p_3 les hyperplans polaires du point dans le voisinage de l'origine et sur la courbe C par rapport aux Q_1, Q_2, Q_3 .

Ces quatre hyperplans passent par la variété linéaire de dimensions $n-1$, conjuguée à la tangente à C en l'origine, et le rapport anharmonique (p, p_1, p_2, p_3) est égale à

$$-\frac{K_{\sigma\tau\rho} du^\sigma du^\tau du^\rho}{3 H_{\sigma\tau} du^\sigma du^\tau}.$$

Voilà une très simple interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif d'une hypersurface, que M. Fubini avait défini par une méthode seulement analytique.

Idromeccanica. — *Sopra il teorema di Kutta-Joukowski.*
Nota ⁽¹⁾ di B. FINZI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota recente il prof. Signorini ⁽²⁾ dà una nuova elegante dimostrazione del teorema di Kutta-Joukowski, che non rimuove però il caso eccezionale segnalato da Cisotti, perchè dimostreremo che essa è subordinata alla condizione di regolarità al contorno.

1. Nel piano $z = x + iy$ un profilo rigido g sia investito da una corrente traslo-circolatoria irrotazionale, di densità μ . Si consideri nel piano complesso $\zeta = \xi - i\eta$ la regione I' esterna alla circonferenza γ di centro $\zeta = 0$ e raggio unitario, e si pensi alla trasformazione conforme che fa corrispondere a I' la regione esterna a g . Sfruttando la condizione in virtù della quale per $\zeta = \infty$ è infinito z e nullo l'argomento di $\frac{dz}{d\zeta}$, Signorini pone

$$(1) \quad z = \frac{1}{k} \left(\zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \right);$$

con che il punto $z = 0$ coincide col centro del profilo. Allora

$$(2) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{a_1}{\zeta^2} - \dots \right).$$

Da questa Signorini trae ⁽³⁾:

$$(3) \quad \frac{d\zeta}{dz} = k \left(1 + \frac{a_1}{\zeta^2} + \dots \right).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1928.

(2) Questi « Rendiconti », vol. VII, 1° sem. 1928, p. 823.

(3) Loc. cit., formula (2).

Osservo sin d'ora che lo sviluppo (3) vale in una regione τ esterna ad un cerchio con centro nel punto $\zeta = 0$, e in τ la funzione $\frac{d\zeta}{d\chi}$ non ha singolarità. In τ non cadranno dunque zeri di $\frac{d\chi}{d\zeta}$. Se si vuole che lo sviluppo (3) valga fino al contorno γ di Γ (contorno compreso) sarà necessario che τ contenga γ , e quindi che nessun zero di $\frac{d\chi}{d\zeta}$ cada su γ ; cioè il profilo g non potrà avere punti angolosi⁽¹⁾. Ciò premesso, supponiamo che g non abbia punti angolosi.

Se $f(\zeta)$ è il potenziale complesso di velocità, λ una linea chiusa del piano ζ circondante γ , e l la linea corrispondente nel piano χ ; se X_l e Y_l sono le componenti cartesiane della risultante delle pressioni relative al bordo esterno di l , Signorini dimostra che

$$(4) \quad Y_l + iX_l = -\frac{1}{2}\mu \int_{\lambda} \frac{d\zeta}{d\chi} \frac{df}{d\zeta} \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}.$$

Dopo ciò, supponendo da prima λ una circonferenza di centro 0, poi una linea qualsiasi tendente alla circonferenza di raggio uno, l'ordinario calcolo dei residui permette di valutare $Y_g + iX_g$. Però, siccome per ipotesi nessuna singolarità della funzione che compare nellà (4) sotto segno di integrale è in Γ e γ , detto R_{∞} il residuo all'infinito, sarà

$$(5) \quad Y_g + iX_g = R_{\infty}.$$

Ma, se c è la velocità asintotica della corrente, C la circolazione, sarà $R_{\infty} = \mu c C$, e si ritrova così il ben noto teorema di Kutta-Joukowski.

Mi propongo ora di completare le considerazioni di Signorini, includendo il caso, da lui implicitamente escluso, in cui il profilo g presenti dei punti angolosi.

2. Diciamo α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) i punti di γ che corrispondono alle singolarità del profilo g . Scriveremo allora la (3) così:

$$(3') \quad \frac{d\zeta}{d\chi} = k \left(1 + \frac{a_1}{\zeta^2} + \dots + \sum_{i=1}^m \frac{a_{i1}}{\zeta - \alpha_i} + \dots \right).$$

(1) La presenza di un punto angoloso al contorno comporta in $\frac{d\chi}{d\zeta}$ uno zero di ordine $\frac{2\alpha}{\pi}$, se 2α è l'angolo tra le tangenti ai due rami di profilo concorrenti nel punto angoloso (cfr. T. LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza*. «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», tomo XXIII (1907); cfr. § 9 e § 10, ricordando la posizione di § 5 e le relazioni (16), (17) di § 7. In particolare, se il contorno è un poligono, cfr. direttamente U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, I, Milano 1921, p. 38).

Essa sarà valida in una regione τ contenente γ . Sostituendo la (3') nella (4) si avrà ⁽¹⁾:

$$(5') \quad Y_g + iX_g = R_\infty + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m R_{\alpha_i},$$

dove R_{α_i} rappresenta il residuo del polo α_i . Ora, se l'angolo tra le tangenti ai due rami di contorno formanti un punto angoloso è diverso da π , il residuo è nullo; è diverso da zero invece se tale angolo è uguale a π . Se allora α'_j ($j = 1, 2, \dots, n$) sono i punti di γ che corrispondono a cuspidi di g , sarà:

$$(6) \quad Y_g + iX_g = R_\infty + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n R_{\alpha'_j}^{(2)}.$$

La (6) estende il teorema di Kutta-Joukowski al caso in esame. Se $\sum_{j=1}^n R_{\alpha'_j} = 0$, il risultato ottenuto non coincide con quello voluto dal teorema ora ricordato.

Ad esempio:

3. Nel caso della lamina, se β è l'inclinazione della lamina sulla direzione asintotica della corrente, si ha ⁽²⁾:

$$(2) \quad \frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{le^{i\beta}}{2} \left(e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2} \right);$$

e questa ha due zeri: per $\zeta = e^{i\beta}$ e $\zeta = -e^{i\beta}$ (estremi della lamina). Allora la (3') diviene:

$$(3') \quad \frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{2}{l} \left(1 + \frac{e^{i\beta}}{2} \frac{1}{\zeta - e^{i\beta}} - \frac{e^{i\beta}}{2} \frac{1}{\zeta + e^{i\beta}} \right);$$

(1) Si osservi che l'artificio di operare nel piano ζ , passando da una linea λ alla circonferenza γ , se permette di operare il passaggio al limite senza che intervengano singolarità nel contorno d'integrazione, comporta però singolarità nella funzione integranda, appunto nei punti di γ corrispondenti alle angolosità di g , (cfr. la Nota (1) a pag. 542 delle Osservazioni sulla Nota di P. STRANEO al teorema di K. J., di U. CISOTTI e B. FINZI, inserita in questi « Rendiconti », vol. VII, 1° Sem. 1928.

(2) Allo stesso risultato perviene A. ROSENBLATT, *Sur le théorème de Kutta-Joukowski*. Questi « Rendiconti », vol. V (1927), p. 564, cfr. form. (6).

(3) U. CISOTTI, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*. Questi « Rendiconti », vol. V (1927), p. 16.

e questa ha due poli di primo ordine nei due punti $e^{i\beta}$, $-e^{i\beta}$. La somma dei semiresidui in questi due poli è⁽¹⁾:

$$(7) \quad -\frac{\mu c C}{2} (1 - e^{-2i\beta});$$

quindi

$$(8) \quad Y_g + iX_g = \mu c C (\cos^2 \beta - i \cos \beta \sin \beta).$$

Cioè la risultante delle pressioni esercitantesi sulla lamina è normale alla lamina stessa, ha modulo uguale a $\mu c |C| \cos \beta$, e verso ottenuto ruotando la lamina di $\frac{\pi}{2}$ nel verso opposto alla circolazione. Ciò in pieno accordo con il risultato direttamente ottenuto da Cisotti^{(2) (3)}.

(1) A. ROSENBLATT, loc. cit., cfr. form. (11).

(2) U. CISOTTI, loc. ultimo cit.

(3) A tal proposito, mi sia permessa un'osservazione relativa ad una recente Nota di C. FERRARI, *La lastra piana e la legge di Kutta-Joukowski*. (Questi «Rendiconti», volume VII, 1928, p. 821).

In una Nota dallo stesso titolo della precedente (questi «Rendiconti», vol. VII, 1928, p. 487) il Ferrari dimostra che la risultante delle pressioni sopra un circuito s , racchiuso nel suo interno la lamina, è costituito da due archi di parabola di parametro ε , aventi i fuochi nei bordi della lamina, e da due segmenti rettilinei paralleli alla lamina e distanti da essa ε , quando $\varepsilon \rightarrow 0$ sia quella voluta dal teorema di Kutta-Joukowski. «Non appare però evidente che la stessa espressione valga anche per l'azione della corrente sulla piastra», osserva il Ferrari. Se Q è la quantità di moto del liquido nello spazio S compreso tra s e la lamina g , se R_g è la risultante delle pressioni sulla lamina g , R_s quella su s sarà:

$$R_g + \frac{dQ}{dt} = R_s.$$

Ma, osserva Ferrari,

$$(8) \quad \frac{dQ}{dt} = \int_S \frac{\partial(\mu v)}{\partial t} dS - \int_s v \mu v \times n ds;$$

da cui, essendo il moto stazionario, si trae facilmente

$$\lim_{s \rightarrow g} \frac{dQ}{dt} = 0, \quad \text{e quindi} \quad R_g = \lim_{s \rightarrow g} R_s;$$

e R_g risulta definito dal teorema di Kutta-Joukowski.

Osserviamo semplicemente che la (8) è una trasformazione di un integrale doppio in integrale semplice, che l'A. attribuisce a M. LELLI, (*Una formula più generale del principio di Archimede*. «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», vol. IV, 1925, pp. 63-64). La (8) è un caso particolare di una formula dovuta a T. BOGGIO, *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide* (questi «Rendiconti», vol. XX, 1911, p. 634), pure contenuta in U. CISOTTI, *Sulle azioni dinamiche di masse fluide continue*. («Rendiconti del R. Istituto Lombardo», vol. L, 1917). Questa formula di trasformazione

Astronomia. — *Gli eclissi di Sole totali-non-centrali.* Nota di P. EMANUELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Corrisp. A. BEMPORAD.

1. Nella teoria degli eclissi di Sole si presenta come caso speciale il tipo totale-non-centrale di cui quest'anno 1928 si ha un esempio il giorno 19 maggio. È noto che dicesi « centrale » quell'eclisse in cui l'asse, o il prolungamento dell'asse, del cono d'ombra lunare, incontra la superficie terrestre: nel primo caso, l'eclisse è totale, nel secondo è anulare.

Il tipo totale-non-centrale è rarissimo; secondo la monumentale opera *Canon der Finsternisse* di Th. von Oppolzer, se ne presentano solo 19 casi in 33 secoli. Esso è caratterizzato dalla circostanza che il cono d'ombra proiettato dalla Luna colpisce lateralmente la superficie terrestre, mentre l'asse rimane completamente all'esterno e non ha alcun punto di contatto con questa superficie: ne risulta così una fascia di totalità la quale ha un solo limite (il boreale o l'australe) ed è priva della linea centrale. Esaminiamo nella presente Nota questo tipo di eclisse solare, tanto più che, per quanto è a mia conoscenza e per quanto mi è stato assicurato da colleghi italiani e stranieri, la letteratura astronomica non possiede studi in proposito.

2. Ammettiamo, in prima approssimazione, la Terra sferica, con raggio $r = 1$. Riferiamoci, secondo il metodo besseliano, ad un piano che passa per il centro della Terra e che ad ogni istante è perpendicolare alla retta che unisce i centri del Sole e della Luna. È ovvio che la condizione necessaria perchè l'asse del cono colpisca la superficie terrestre è che la distanza Δ dal centro dell'ombra sul piano fondamentale, dal centro della Terra, sia ≤ 1 .

Agli istanti corrispondenti agli estremi della linea centrale, l'equazione fondamentale della teoria degli eclissi:

$$(l - i \zeta)^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

vale se entro S non vi sono singolarità. Se entro S vi sono singolarità - ed è il nostro caso - bisogna, come è ben noto, isolare queste singolarità con circonferenze ω di raggio infinitesimo e centro nelle singolarità, poi eseguire la trasformazione (8). Risulta quindi:

$$(9) \quad \frac{dQ}{dt} = \sum_{\omega} \int v_{\mu} v \times n d\omega.$$

Ma, nel caso in esame, il secondo membro della (9) è un vettore rappresentato dal numero complesso (7): R_g ha quindi l'espressione stabilita da Cisotti, e non quella voluta dal teorema di Kutta-Joukowski.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

e le seguenti che da essa si deducono :

$$(l - i \zeta) \sin Q = x - \xi$$

$$(l - i \zeta) \cos Q = y - \eta$$

divengono identicamente nulle nei due membri, essendo in quei punti estremi $(l - i \zeta) = 0$.

Abbiamo quindi:

$$x = \xi \quad , \quad y = \eta \quad , \quad \zeta_1 = 0$$

$$\xi^2 + \eta_1^2 = 1 \quad , \quad x^2 + y_1^2 = 1 .$$

Negli eclissi totali-non-centrali, questa distanza Δ è sempre maggiore di 1, ma il valore di $(\Delta - 1)$ diviene, per qualche tempo, minore del raggio l_2 dell'ombra sul piano fondamentale, così che si produce un'intersezione fra la superficie terrestre e il cono d'ombra, intersezione che però non raggiunge mai l'asse del cono.

È chiaro che questo strisciamento laterale del cono d'ombra non possa avvenire sul globo terrestre che in latitudini geografiche relativamente elevate, e che la sua durata debba essere abbastanza breve.

3. A titolo di esempio, riportiamo qui la distanza Δ fra il centro dell'ombra sul piano fondamentale e il centro della Terra, il valore di $(\Delta - 1)$, il valore l_2 del raggio dell'ombra sul piano fondamentale, e il valore di $(\Delta - 1) - l_2$, nell'eclisse del 19 maggio 1928:

Tempo civile di Greenwich	Δ	$\Delta - 1$	l_2	$(\Delta - 1) - l_2$
13 ^h 0 ^m	1.03140	0.03140	0.01468	+ 0.01672
10	1.01395	.01395	.01468	— 0.00073
20	1.00566	.00566	.01468	— 0.00902
30	1.00672	.00672	.01467	— 0.00795
40	1.01716	.01716	.01467	+ 0.00249
50	1.03664	.03664	.01467	+ 0.02197
14 0	1.06468	0.06468	0.01467	+ 0.05001

Da questa tabellina si vede: a) come l'asse del cono d'ombra non tocchi in alcun istante il globo terrestre al quale tuttavia passa molto vicino; b) come la distanza fra il centro dell'ombra sul piano fondamentale e la superficie terrestre divenga, nell'intervallo di tempo fra 13^h 9^m e 13^h 39^m,

minore del raggio dell'ombra nel punto considerato. Avviene quindi una intersezione fra la superficie terrestre e l'ombra, la quale determina il solo limite boreale della zona di totalità.

4. Gli eclissi di Sole totali-non-centrali sono rarissimi: in 33 secoli (1200 av. Cristo-2100 d. Cristo) sono 19 solamente: nella seguente lista ne riportiamo le date e gli estremi del limite (boreale o australe) della zona della totalità. Il segno — davanti l'anno significa che per gli anni precedenti l'inizio dell'era volgare, il computo è fatto secondo la regola astronomica; la longitudine è contata da Greenwich, ed è positiva all'Est, negativa all'West.

Numero	Data dell'eclisse	Punti estremi del limite (boreale o australe) della zona della totalità			
		λ	φ	λ	φ
1	— 962 IX 3	— 91°	— 63°	— 63°	— 77°
2	— 894 VIII 2	— 147	— 60	— 137	— 65
3	— 261 XII 21	— 31	— 66	— 76	— 64
4	— 243 XII 31	+ 179	— 66	+ 148	— 63
5	— 196 II 1	— 94	— 71	— 120	— 67
6	— 159 VII 8	+ 90	— 66	+ 110	— 66
7	— 26 VI 8	+ 100	+ 60	+ 64	+ 67
8	115 V 11	— 81	— 72	— 53	— 65
9	257 VIII 26	— 30	+ 66	— 41	+ 57
10	351 II 12	+ 28	— 69	— 1	— 53
11	568 VI 11	+ 69	— 66	+ 86	— 63
12	984 VII 31	— 47	+ 66	— 65	+ 58
13	1389 IV 26	+ 86	— 67	+ 96	— 57
14	1418 IX 30	+ 75	— 63	+ 42	— 80
15	1522 III 27	+ 124	+ 56	+ 114	+ 66
16	1656 VII 21	— 150	— 57	— 125	— 68
17	1928 V 19	+ 11	— 67	+ 30	— 58
18	1967 XI 2	— 15	— 54	— 46	— 69
19	2043 IV 9	+ 160	+ 53	+ 141	+ 70

5. L'origine degli eclissi totali-non-centrali sarà chiaramente dimostrata appena noi prenderemo in esame il ciclo di Saros di 18 anni e 11 giorni, o, più precisamente, secondo Newcomb, di giorni 6585.321. Questo ciclo gode di parecchie proprietà generali:

a) La longitudine del perigeo lunare è quasi la medesima dopo 18 anni, ed anche la posizione del Sole è, dentro 11° , la stessa. Conseguentemente tutte le quantità che caratterizzano un'eclisse — le parallassi, i semidiametri, le declinazioni e i movimenti orari, ecc. — sono le medesime che quelle di 18^a 11^d precedenti; due eclissi consecutivi saranno perciò quasi simili;

b) Le latitudini dei tre punti (A, B, C,) della superficie terrestre in cui l'eclisse centrale accade rispettivamente al nascere del Sole, a mezzogiorno vero, e al tramonto del Sole, sono quasi le medesime dopo un Saros; il lieve spostamento sarà verso il nord se l'eclisse è nel nodo lunare discendente, verso il sud se è in quello ascendente;

c) La longitudine dei tre punti A, B, C, è spostata di circa 120° verso l'ovest dopo un Saros; tre Saros riportano quindi la linea centrale a circa la medesima longitudine che aveva 54 anni prima.

6. Nella loro successione, gli eclissi sono raggruppati per famiglie di Saros. Ad esempio, se noi prendiamo tutti gli eclissi solari del xx secolo (1901-2000), noi vediamo che essi sono distribuiti fra una quarantina di famiglie i cui membri sono a distanza di 18^a 11^d l'uno dall'altro. Ciascuna famiglia di eclissi ha un principio ed una fine, e consta di tre serie: la 1^a di eclissi parziali, la 2^a di centrali, la 3^a di parziali.

La famiglia ha inizio con un piccolo eclisse parziale nelle estreme regioni boreali o australi della Terra, il quale, ad ogni Saros va gradualmente aumentando fino a raggiungere una fase massima fra le massime: si ha la 1^a serie di eclissi. Poi l'eclisse diviene centrale (totale, anulare-totale-anulare, anulare) e in questa forma rimane per parecchi Saros: è la 2^a serie di eclissi. L'eclisse infine cessa di essere centrale e torna parziale, cominciando con una fase massima fra le massime, e terminando, dopo parecchi Saros, nelle regioni australi o boreali della Terra, con un eclisse di fase piccolissima con il quale si chiude la 3^a serie e la intera famiglia.

Non è quindi esatto ciò che si legge a tal proposito in qualche trattato di Astronomia, che cioè il periodo di Saros riproduce gli eclissi per qualunque epoca passata o futura; non si deve invece dimenticare che nel periodo di Saros gli eclissi appartengono a famiglie le quali hanno tutte un principio ed una fine, prima e dopo di che è vano cercare la riproduzione del Saros.

Conseguentemente, durante un secolo nascono o muoiono una o più famiglie di eclissi; nell'VIII secolo av. Cristo ne nacquero non meno di 7, mentre nel VII secolo d. Cristo solamente 1. La media delle nascite e delle morti di queste famiglie è di circa 1 su 31 anno. Una nuova serie comincia sempre con un eclisse che è secondo di una coppia di eclissi (il loro intervallo è di una lunazione); ed una vecchia serie muore sempre con un eclisse che è primo di una simile coppia.

La durata di una famiglia di eclissi è superiore al millennio, e si svolge attraverso molti Saros. La famiglia cui appartiene l'eclisse totale-non-centrale del 19 maggio 1928 cominciò, come piccolo parziale, nelle regioni boreali della Terra, il 24 giugno 792; rimase parziale fino all'8 settembre 918; cominciò ad essere centrale (anulare) il 18 settembre 936, e come centrale (anulare, anulare-totale, totale) rimase per quasi mille anni, fino cioè al 9 maggio 1910; nel successivo Saros, 19 maggio 1928, è totale-non-centrale, e diviene parziale il 30 maggio 1946 e come tale rimane fino al 3 agosto 2054, giorno in cui accade l'ultimo eclisse di questa famiglia.

Questa famiglia consta quindi di 8 eclissi parziali che costituiscono la 1^a serie la quale va dall'anno 792 al 918 (durata = 126 anni), e di altrettanti che formano la 3^a serie, dal 1928 al 2054 (durata = 126 anni); consta inoltre di 54 eclissi centrali che costituiscono la 2^a serie la quale va dall'anno 936 al 1910 (durata = 974 anni). In media, gli eclissi solari che formano una famiglia sono così distribuiti e ordinati: a) 10 parziali, ciascuno più grande del precedente, al principio (1^a serie); 40 o 50 centrali, nel mezzo (2^a serie); altri 10 parziali, ciascuno più piccolo del precedente, alla fine (3^a serie).

7. La linea centrale (dove l'eclisse è totale o anulare) comincia ad essere tracciata dall'asse (o dal suo prolungamento) nelle vicinanze di un polo, raggiunge le regioni equatoriali alla metà, abbandona la Terra per il polo opposto, alla fine; poichè, come abbiamo detto, la linea centrale si sposta, ad ogni Saros, procedendo da un polo all'altro; il movimento, ad ogni Saros, è variabile, e durante lo svolgersi di una stessa famiglia, può assumere valori fra 0,03 e 0,10 raggi terrestri.

8. Da quanto abbiamo detto risulta ora chiaro come avvenga un'eclisse totale-non-centrale. Quando in una famiglia di eclissi di Sole è terminata la 1^a serie dei parziali, dovrebbe apparire, nel Saros immediatamente seguente, il primo centrale (anulare o totale); e così avviene infatti nella maggior parte dei casi. Ma può qualche rarissima volta accadere che, in questo eclisse, l'asse del cono d'ombra non giunga a toccare la Terra, per una quantità piccolissima inferiore al raggio della sezione circolare del cono nel punto considerato: in tal caso, l'ombra toccherà e coprirà la superficie terrestre, ma l'asse sarà sempre di fuori.

Questa rarissima condizione può analogamente prodursi al termine della 2^a serie di eclissi (centrali); in tal caso, il Saros immediatamente seguente dovrebbe essere un semplice parziale; ma può avvenire che il cono non si sia allontanato dalla Terra della distanza sufficiente affinchè esso non abbia a colpire la superficie terrestre e non dia luogo ad un'eclisse totale, pur lasciando completamente all'esterno l'asse del cono.

Le circostanze di questi eclissi vanno calcolate caso per caso; e costituendo esse dei limiti di tipi speciali di eclissi, si deve fare il calcolo con molta precisione.

9. Gli eclissi totali-non-centrali hanno luogo, come abbiamo detto, o al principio o alla fine della 2ª serie (eclissi centrali) di una famiglia, ed accadono in regioni terrestri di elevata latitudine. Dei 19 eclissi di tal tipo, fra il 1200 av. Cristo e il 2100 d. Cristo (33 secoli), 5 avvengono nelle regioni boreali e 14 in quelle australi, 8 al principio e 11 alla fine della 2ª serie. Nelle seguenti tabelle riportiamo le date di questi eclissi, e per ciascuno quelle del Saros immediatamente precedente e seguente. Così si vede subito, come ogni totale-non-centrale sia sempre preceduto da un centrale e seguito da un parziale, o preceduto da un parziale e seguito da un centrale. Fa eccezione a questa regola il solo eclisse del — 261 il quale anche nel Saros seguente è totale-non-centrale.

10. Le coordinate geografiche dei tre punti A, B, C, si riferiscono alla linea centrale se l'eclisse è centrale, al limite boreale o australe della zona della totalità se l'eclisse è totale-non-centrale. In riguardo a questi tre punti deve qui essere posta in rilievo una particolarità importante. In via generale, i tre punti A, B, C, della linea centrale di un eclisse corrispondono rispettivamente al sorgere, al mezzodì vero, e al tramonto del Sole; a questa regola fanno però eccezione alcuni eclissi le cui circostanze danno luogo ad una linea centrale i cui estremi A (principio) e C (fine) si trovano ambedue al nascere o ambedue al tramonto, e la quale non ha, di conseguenza, il punto B (mezzodì vero); si tratta di quegli eclissi che avvengono in elevate latitudini. Dei 19 eclissi totali-non-centrali, 17 condividono questa eccezione: gli estremi A (principio) e C (fine) del limite boreale o australe della zona della totalità sono ambedue al nascere, o ambedue al tramonto del Sole. I due eclissi totali-non-centrali che seguono invece la regola generale, sono quelli del — 261 XII 21 e del — 159 VII 8; gli estremi A e C della loro zona di totalità cadono l'uno al nascere, l'altro al tramonto; il punto B corrisponde al mezzogiorno vero per l'eclisse del — 159, e alla mezzanotte vera per l'eclisse del — 261, il quale è uno dei rari eclissi solari totali (o anulari) che accadono a mezzanotte.

11. Ecco infine le tabelle di cui si è parlato sopra.

REGIONI BOREALI DELLA TERRA.

Eclissi totali-non-centrali immediatamente prima del principio della 2^a serie.

Saros precedente ECLISSE PARZIALE Data	ECLISSE TOTALE-NON-CENTRALE						Saros seguente. — ECLISSE CENTRALE-TOTALE											
	Data			A		B		C		Data			A		B		C	
				λ	φ	λ	φ	λ	φ				λ	φ	λ	φ		
— 44 V 28	— 26 VI 8	+ 100°	+ 60°	—	—	+ 64°	+ 67°	—	—	+ 6°	+ 54°	— 60°	+ 86°	— 95°	+ 63°			
1504 III 16	1522 III 27	+ 124	+ 56	—	—	+ 114	+ 66	—	—	+ 13	+ 44	—	—	— 44	+ 77			
2025 III 29	2043 IV 9	+ 160	+ 53	—	—	+ 141	+ 70	—	—	+ 42	+ 45	—	—	— 15	+ 73			

REGIONI BOREALI DELLA TERRA.

Eclissi totali-non-centrali immediatamente dopo la fine della 2^a serie.

Saros precedente. — ECLISSE CENTRALE-TOTALE										ECLISSE TOTALE-NON-CENTRALE										Saros seguinte ECLISSE PARZIALE Data	
Data			A		B		C		Data			A		B ^o		C					
			λ	φ	λ	φ	λ	φ				λ	φ	λ	φ	λ	φ				
239 VIII 16	+130°	+74°	—	—	—	+71°	+47°	—	—	257 VIII 26	—30°	+66°	—	—	—41°	+57°					
966 VII 20	+123	+70	+120°	+76°	+36	+48	+48	—	—	984 VII 31	—47	+66	—	—	—65	+58					

REGIONI AUSTRALI DELLA TERRA.

Eclissi totali-non-centrali immediatamente prima del principio della 2ª serie.

SAROS precedente ECLISSE PARZIALE Data	ECLISSE TOTALE-NON-CENTRALE						SAROS SEGUENTE. — ECLISSE TOTALE-CENTRALE					
	Data	A		B		C	Data	A		B		C
		λ	φ	λ	φ			λ	φ	λ	φ	
— 912 VII 22	— 894 VIII 2	— 147°	— 60°	—	—	— 137°	— 876 VIII 13	+ 81°	— 47°	—	—	+ 123° — 72°
— 214 I 20	— 196 II 1	— 94	— 71	—	—	— 120	— 178 II 11	+ 158	— 75	—	—	+ 90 — 61
97 IV 30	115 V 11	— 81	— 72	—	—	— 53	133 V 22	+ 126	— 66	+ 154°	— 51°	— 161 — 56
1638 VII 11	1656 VII 21	— 150	— 57	—	—	— 125	1674 VIII 2	+ 87	— 45	+ 140	— 69	+ 141 — 72
1949 X 21	1967 XI 2	— 15	— 54	—	—	— 46	1985 XI 12	— 146	— 52	—	—	+ 164 — 70

REGIONI AUSTRALI DELLA TERRA.

Eclissi totali-non-centrali immediatamente dopo la fine della 2^a serie.

Saros precedente. — ECLISSE CENTRALE-TOTALE						ECLISSE TOTALE-NON-CENTRALE						Saros seguinte	
Data	A		B		C	Data	A		B		C	ECLISSE PARZIALE Data	
	λ	φ	λ	φ	λ		λ	φ	λ	φ	λ		
— 980 VIII 23	+ 38°	— 58°	+ 91°	— 66°	+ 99°	— 962 IX 3	— 91°	— 63°	—	—	— 63°	— 944 IX 13	
— 279 XII 9	+ 107	— 66	+ 87	— 72	+ 75	— 261 XII 21	— 31	— 66	— 44°	— 74°	— 76	L'eclisse è ancora totale-non-centrale (— 243 XII 31).	
— 177 VI 27	— 172	— 63	— 146	— 48	— 108	— 243 XII 31	+ 179	— 66	—	—	+ 148	— 224 I 11	
333 II 1	+ 178	— 71	—	—	+ 129	— 159 VII 8	+ 90	— 66	+ 99	— 62	+ 110	— 141 VII 19	
550 VI 1	+ 151	— 66	+ 169	— 49	— 144	351 II 12	+ 28	— 69	—	—	— 2	369 II 23	
1371 IV 16	— 172	— 76	—	—	— 140	568 VI 11	+ 69	— 66	—	—	+ 86	586 VI 22	
1400 IX 18	— 149	— 57	—	—	+ 170	1389 IV 26	+ 86	— 67	—	—	+ 96	1407 V 7	
1910 V 9	+ 111	— 73	—	—	+ 156	1418 IX 30	+ 75	— 63	—	—	+ 42	1436 X 10	
						1928 V 19	+ 11	— 67	—	—	+ 30	1946 V 30	

*Problema. — Sopra la distribuzione dell'elettricità nei
conduttori immersi in un mezzo omogeneo anisotropo. Nota di
P. BURGATTI (al Corresp. P. BURGATTI).*

Trattato in una precedente Nota ¹ come la distribuzione
dell'elettricità su un ellissoide conduttore immerso in un dielettrico omo-
geneo, sia indipendente dall'omografia dielettrica del
mezzo, sia, con quella che si presenta quando il die-

lettrico è anisotropo, se questa proprietà sia comune
anche a conduttori di forma diversa.

Per trattare, per trattare il problema nella massima generalità, un
sistema di conduttori immerso in un mezzo anisotropo, di omografia die-
lettrica $\epsilon = \epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ le superficie dei singoli conduttori, σ il
loro insieme, Ω lo spazio occupato dal dielettrico. Dette φ e ψ due funzioni
regolari in Ω , si ha:
dalla relazione di Green, si ha:
differenziazione si ha:

$$(1) \quad \int_{\sigma} (\epsilon \text{ grad } \varphi - \varphi \epsilon \text{ grad } \psi) \times n \, d\sigma = - \int_{\Omega} [\psi \text{ div } (\epsilon \text{ grad } \varphi) - \\ - \varphi \text{ div } (\epsilon \text{ grad } \psi)] \, dS,$$

che è una generalizzazione del primo lemma di Green.

Sia ora ϕ il potenziale del campo; poniamo:

$\phi = \varphi$ se O_i è un punto interno all' i^{mo} conduttore; ψ (al pari di φ) è regolare
in ogni punto di Ω , poichè O_i non appartiene a questo spazio; di più si ha:

$$\text{div } (\epsilon \text{ grad } \varphi) = 0 \quad ; \quad \text{div } (\epsilon \text{ grad } \psi) = 0,$$

si ha:

$$(2) \quad \int_{\sigma} (\epsilon \text{ grad } \varphi - \varphi \epsilon \text{ grad } \psi) \times n \, d\sigma = 0$$

Poichè φ sulle superficie dei conduttori ha i valori costanti $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ l'integrale a secondo membro può scriversi nel modo seguente:

$$\varphi_1 \int_{\sigma_1} \varepsilon \operatorname{grad} \frac{1}{\operatorname{mod} \alpha^{-1}(P - O_i)} \times n d\sigma_1 + \varphi_2 \int_{\sigma_2} \varepsilon \operatorname{grad} \frac{1}{\operatorname{mod} \alpha^{-1}(P - O_i)} \times n d\sigma_2 + \dots$$

Ora è facile vedere che

$$\varepsilon \operatorname{grad} \frac{1}{\operatorname{mod} \alpha^{-1}(P - O_i)} \times n d\sigma = \frac{-(P - O_i) \times n d\sigma}{[\operatorname{mod} \alpha^{-1}(P - O_i)]^3}$$

rappresenta il triplo dell'elemento di volume staccato nell'ellissoide

$$\varepsilon^{-1}(Q - O_i) \times (Q - O_i) = r$$

del cono, che proietta da O_i l'elemento di superficie $d\sigma^{(1)}$; preso col segno + o col segno - secondo che da O_i si vede la faccia positiva o quella negativa di $d\sigma$. (La distinzione fra le due facce essendo fatta in relazione al senso della normale e risultando quindi positiva la faccia che guarda il dielettrico).

Gli integrali scritti sono dunque tutti nulli, ad eccezione dell' i^{mo} , che ha il valore $-4\pi I_i \alpha$. Ricordando di più che la densità superficiale di elettricità, ω , ha l'espressione:

$$\omega = -\frac{1}{4\pi} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi \times n$$

la (2) diventa:

$$(3) \quad \varphi_i = I_i \alpha^{-1} \int_{\sigma} \frac{\omega}{\operatorname{mod} \alpha^{-1}(P - O_i)} d\sigma.$$

Da cui, derivando rispetto ad O_i e tenendo presente che il primo membro è costante, si ottiene:

$$\int_{\sigma} \frac{\omega}{[\operatorname{mod} \alpha^{-1}(P - O_i)]^3} \alpha^{-2} (P - O_i) d\sigma = 0$$

(1) Siano infatti dv e dV gli elementi di volume compresi entro il detto cono elementare e limitati rispettivamente dalla superficie del conduttore e dell'ellissoide $\varepsilon^{-1}(Q - O_i) \times (Q - O_i) = r$. Si ha, poichè $\operatorname{mod} \alpha^{-1}(Q - O_i) = 1$

$$\frac{dv}{dV} = \left[\frac{\operatorname{mod}(P - O_i)}{\operatorname{mod}(Q - O_i)} \right]^3 = \left[\frac{\operatorname{mod} \alpha^{-1}(Q - O_i)}{\operatorname{mod}(Q - O_i)} \operatorname{mod}(P - O_i) \right]^3 = [\operatorname{mod} \alpha^{-1}(P - O_i)]^3$$

e poichè $dv = \frac{1}{3} (P - O_i) \times n | d\sigma$, segue

$$dV = \frac{1}{3} \frac{1}{[\operatorname{mod} \alpha^{-1}(P - O_i)]^3} |(P - O_i) \times n | d\sigma.$$

o anche:

$$(4) \quad \int_{\sigma} \frac{\omega}{[\text{mod } \alpha^{-1}(P - O_i)]^2} (P - O_i) d\sigma = 0.$$

3. La (4), valida per tutti i punti O_i dei conduttori, può considerarsi come l'equazione funzionale, che serve a determinare ω , quando sia nota la carica totale dei singoli conduttori. Vediamo sotto quali condizioni la funzione ω così definita non dipenda da α .

Scriviamo perciò la (4) sotto la forma:

$$(4a) \quad \int_{\sigma} \left[\frac{\text{mod}(P - O_i)}{\text{mod } \alpha^{-1}(P - O_i)} \right]^2 \frac{P - O_i}{[\text{mod}(P - O_i)]^2} \omega d\sigma = 0.$$

Introduciamo l'angolo solido $d\Omega$, sotto il quale $d\sigma$ è visto da O_i e raggruppiamo in un solo tutti i termini, che corrispondono a punti della superficie dei conduttori allineati con O_i .

Poichè

$$d\Omega = \frac{|\text{grad mod}(P - O_i) \times \mathbf{n}|}{(P - O_i)^2} d\sigma,$$

la (4a) diventa:

$$(5) \quad \int \left[\frac{\text{mod } \alpha^{-1} \text{grad mod}(P_i - O_i)}{|\text{grad mod}(P_i - O_i) \times \mathbf{n}_i|} \right] \left[\sum_r \frac{\omega(P_r)}{|\text{grad mod}(P_r - O_i) \times \mathbf{n}_r|} - \sum_s \frac{\omega(P_s)}{|\text{grad mod}(P_s - O_i) \times \mathbf{n}_s|} \right] \text{grad mod}(P_i - O_i) d\Omega = 0.$$

Gli indici r ed s si riferiscono a punti della superficie dei conduttori, che si trovano da bande opposte rispetto ad O_i ; P_i indica uno qualunque di questi punti. L'integrazione va estesa alla superficie di una mezza sfera di centro O_i e di raggio uno.

Si vede ora che la condizione necessaria e sufficiente perchè la (5) sia verificata per qualunque omografia α è la seguente:

$$(6) \quad \sum_r \frac{\omega(P_r)}{|\text{grad mod}(P_r - O_i) \times \mathbf{n}_r|} = \sum_s \frac{\omega(P_s)}{|\text{grad mod}(P_s - O_i) \times \mathbf{n}_s|}.$$

Diamo di questa condizione una interpretazione fisica.

Sopra un conduttore (o sistema di conduttori) che, per semplicità, immagineremo immerso nel vuoto⁽¹⁾, le cariche si distribuiscono in modo che la risultante delle forze elettriche da esse esercitate sopra un qualunque punto O del conduttore, è nulla. Ma non sempre avverrà che si compen-

(1) Qualora fosse immerso in un dielettrico, bisognerebbe distinguere fra carica vera e carica libera.

rette, che incontrano σ in più di due punti; ossia quando nel campo siano presenti più conduttori o quando, pur essendovi un solo conduttore, la sua superficie non sia dovunque convessa. Vi sarà in tal caso, dunque, almeno un punto P della superficie dei conduttori, in cui la densità ω è nulla. E, per quanto abbiamo detto, ω sarà pure eguale a zero in tutti quei punti di σ , che possono essere congiunti con P mediante una spezzata, i cui lati sono costituiti da segmenti (finiti o infiniti), che appartengono al dielettrico e si appoggiano alla superficie dei conduttori; ossia su tutta la superficie σ , se ammettiamo che il volume occupato dal dielettrico sia connesso⁽¹⁾.

5. Resta quindi da esaminare come solo caso in cui possa verificarsi la compensazione fra le cariche diametralmente opposte (e conseguentemente la distribuzione delle cariche stesse possa essere indipendente dalla omografia dielettrica del mezzo), quello in cui vi sia un solo conduttore e la sua superficie sia dovunque convessa.

Prendiamo allora tre punti P_1, P_2, P_3 sulla superficie di tale conduttore; fra le densità $\omega(P_1), \omega(P_2), \omega(P_3)$ intercederanno le relazioni:

$$\frac{\omega(P_1)}{r_{12} \times n_1} = \frac{\omega(P_2)}{r_{21} \times n_2} ; \quad \frac{\omega(P_2)}{r_{23} \times n_2} = \frac{\omega(P_3)}{r_{32} \times n_3} ; \quad \frac{\omega(P_3)}{r_{31} \times n_3} = \frac{\omega(P_1)}{r_{13} \times n_1} .$$

Moltiplicandole membro a membro si ottiene:

$$(7) \quad \frac{r_{12} \times n_1}{r_{13} \times n_1} \cdot \frac{r_{23} \times n_2}{r_{21} \times n_2} \cdot \frac{r_{31} \times n_3}{r_{32} \times n_3} = 1 .$$

Consideriamo l'intersezione della superficie del conduttore col piano $P_1 P_2 P_3$; le proiezioni n_{10}, n_{20}, n_{30} su questo piano dei vettori unitari n_1, n_2, n_3 (questi vettori sono normali alla curva di intersezione rispettivamente nei punti P_1, P_2, P_3 , ma non unitari); ed infine i vettori unitari τ_1, τ_2, τ_3 , tangenti alla curva nei punti P_1, P_2, P_3 e diretti nel senso della precorrenza positiva.

Poichè $r_{12} \times n_1 = r_{12} \times n_{10}$; $r_{21} \times n_2 = r_{21} \times n_{20}$, ecc. la (7) diventa

$$(8) \quad \frac{r_{12} \times n_{10}}{r_{13} \times n_{10}} \cdot \frac{r_{23} \times n_{20}}{r_{21} \times n_{20}} \cdot \frac{r_{31} \times n_{30}}{r_{32} \times n_{30}} = 1 .$$

(1) Quando questo volume non è connesso, ossia quando vi sono delle cavità nei conduttori, una discussione analoga porta a concludere che deve essere nulla la densità elettrica sulle pareti interne della cavità e sui conduttori, che vi fossero eventualmente contenuti; si può quindi prescindere da tali cavità e ragionare sui conduttori come se fossero compatti.

Ma

$$\frac{\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{n}_{10}}{\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{n}_{10}} = \frac{\text{mod } \mathbf{n}_{10} \cdot \cos(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{n}_{10})}{\text{mod } \mathbf{n}_{10} \cdot \cos(\mathbf{r}_{13}, \mathbf{n}_{10})} = (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_1)$$

dove $(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_1) = \frac{\sin(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_1)}{\sin(\mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_1)}$ rappresenta il rapporto semplice dei tre raggi $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_1$ appartenenti al fascio di centro P_1 .

Analogamente si ha:

$$\frac{\mathbf{r}_{23} \times \mathbf{n}_{20}}{\mathbf{r}_{21} \times \mathbf{n}_{20}} = (\mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_2) \quad ; \quad \frac{\mathbf{r}_{31} \times \mathbf{n}_{30}}{\mathbf{r}_{32} \times \mathbf{n}_{30}} = (\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{32}, \mathbf{r}_3)$$

e la (8) può scriversi:

$$(9) \quad (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{32}, \mathbf{r}_3) = 1.$$

Poichè sappiamo dalla Geometria proiettiva che questa condizione è caratteristica delle coniche, giungiamo al risultato che l'intersezione della superficie del conduttore con un qualsivoglia piano deve essere una conica. La superficie stessa è quindi una quadrica; più precisamente anzi, dovendo essere limitata, un ellissoide.

Possiamo dunque concludere che *la distribuzione dell'elettricità sulla superficie di un conduttore non dipende dall'omografia dielettrica del mezzo (supposto omogeneo) solo quando il conduttore stesso ha la forma di un ellissoide (o, in particolare, di una sfera) e non sono presenti nel campo altri conduttori.*

Fisica. — *Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen e ottici a causa dell'elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio.* Nota ⁽¹⁾ di G. GENTILE e E. MAJORANA, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

1. Vogliamo mostrare in questa Nota che il potenziale di Fermi non solo permette una buona determinazione *a priori* di tutti i livelli energetici degli atomi pesanti; ma permette anche di calcolare con grande esattezza, dato il carattere statistico di questa teoria dell'atomo, lo sdoppiamento dei termini; cosa tanto più importante quando si pensi che a questi sdoppiamenti non erano applicabili le formule relativistiche di Sommerfeld, uscendo questo fenomeno fuori dagli schemi della teoria della struttura fina. Infatti si sa che bisogna ricorrere all'ipotesi dell'elettrone rotante, ipotesi che del resto ha perso ogni carattere ipotetico e appare oggi come fondata su solide basi teoriche, dopo l'ultimo lavoro di Dirac ⁽²⁾. I nostri calcoli si riferiscono per i livelli Roentgen al termine 3 M del Gadolino ($Z = 64$) e dell'Uranio ($Z = 92$) e per i termini ottici ai termini P del cesio ($Z = 55$).

Il potenziale elettrostatico nell'interno d'un atomo di numero Z si può porre sotto la forma: $V = \frac{Ze}{r} \varphi \left(\frac{r}{\mu} \right)$ dove φ è una funzione numerica in genere minor d'uno, che tien conto dell'azione di schermo delle altre cariche elettroniche. Precisamente in prossimità del nucleo ove questa azione è minima $\varphi = 1$, inoltre per r crescente φ diminuisce finchè, per $r = \infty$ e per atomi neutri, $\varphi = 0$.

Evidentemente i valori di φ dipendono dalla distribuzione media locale degli elettroni intorno al nucleo. Di questa nuvola di elettroni si sa inoltre questo: che obbedisce al principio di Pauli. Quindi la statistica di Fermi applicata a questo speciale gas degenerare fornisce un'ulteriore relazione fra potenziale e densità elettrica. Scrivendo allora l'equazione di Poisson, Fermi ⁽³⁾ arriva all'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \quad \text{in cui: } x = \frac{r}{\mu} \quad ; \quad \mu = \frac{3^{\frac{2}{3}} h^2}{2^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} m e^2 Z^{\frac{1}{3}}}.$$

Se si fissa l'attenzione su di un determinato elettrone si può in prima approssimazione ritenere ⁽⁴⁾ che gli altri $Z - 1$ siano distribuiti come in un

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1928.

(2) DIRAC, « Roy. Soc. Proc. », A, vol. 117, p. 610; vol. 118, p. 351, 1928.

(3) FERMI, « Ztschr. für Phys. », 48, p. 73, 1928.

(4) Id., « Rendic. Lincei », serie 6^a, vol. VII, fasc. 9, p. 726, 1928.

atomo neutro di numero $Z - 1$ e quindi scrivere il potenziale a cui esso è soggetto: $V = \frac{e}{r} \left[1 - (Z - 1) \varphi \left(\frac{r}{\mu} \right) \right]$; naturalmente così si trascurano, nel caso di un elettrone interno, sopra tutto le conseguenze del principio di Pauli, che non è un principio statistico ma un rigoroso principio di esclusione, e nel caso di un elettrone esterno la polarizzazione che nasce nel resto atomico. Tuttavia nel primo caso l'errore è minimo e nel secondo esistono incertezze di più grave importanza dovute all'esistenza del sistema periodico che si manifesta con regolari oscillazioni di tutte le proprietà atomiche superficiali intorno a un andamento medio; il solo perseguibile con mezzi statistici.

2. L'equazione di Schrödinger si scriverà in generale:

$$\Delta_2 \psi + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} \left[E + \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r} (Z - 1) \varphi \right] \psi = 0.$$

Se k è il quanto azimutale, ψ si spezza in una funzione sferica di ordine k e in una funzione del raggio che conviene mettere sotto la forma $\frac{\chi}{r}$; la χ obbedisce allora all'equazione:

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = \left[\frac{k(k+1)}{x^2} - a \frac{1 + (Z-1) \varphi}{x} + \varepsilon \right] \chi$$

essendo:

$$a = \frac{8 \pi^2 m}{h^2} e^2 \mu \quad ; \quad \varepsilon = - \frac{8 \pi^2 m}{h^2} \mu^2 E$$

l'integrazione numerica per i tentativi è semplice nel caso di quanto radiale 1 (nessun nodo nella χ). In prossimità dello zero ci siamo serviti dello sviluppo in serie della φ .

Per il termine 3 λ del gadolino, $\varepsilon = 4,29$ e quindi il termine espresso in Rydberg risulta: $-E = 86,3$, in esatto accordo con l'esperienza (86.6) ove si tenga conto della correzione relativistica che abbassa il termine semplice in maniera che risulti la sua distanza dal termine più basso precisamente la metà della distanza fra i termini effettivi. Lo sdoppiamento in una teoria semplificata si calcolerebbe in base all'energia mutua fra il momento magnetico dell'elettrone e il valor medio del campo magnetico virtuale in cui esso viene a trovarsi.

La teoria di Dirac dà in prima approssimazione;

$$\Delta E = \frac{5}{2} \frac{h^2}{8 \pi^2 m} \int \psi \psi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} dS.$$

Per il gadolino si trova: $\Delta E = 2,20 R$, in buon accordo con l'esperienza ($2,4 R$).

Il calcolo ripetuto per lo stesso termine dell'uranio dà: $-E = 258 R$ (anche questa volta in piena armonia con il valore sperimentale 255) e $\Delta E = 11,7$ invece di $12,96$.

3. Il calcolo del termine $6p$ del cesio, perfettamente analogo al precedente, conduce all'autofunzione di cui riportiamo i valori numerici. Si trova per il valore del termine:

$$n = 24600 \text{ cm}^{-1}$$

di fronte al doppietto sperimentale:

$$n_1 = 19674$$

$$n_2 = 20228$$

lo sdoppiamento calcolato secondo la formula ricordata più sopra con il coefficiente corrispondente al diverso quanto azimutale risulta:

$$\Delta n = 1020 \text{ cm}^{-1}$$

invece del valore sperimentale:

$$\Delta n = 554 \text{ cm}^{-1}$$

Le divergenze fra teoria e esperienza si spiegano perfettamente entro l'ambito delle approssimazioni statistiche, fra le quali ha massima importanza quella che dipende dal posto che l'elemento occupa nel sistema periodico. Precisamente essendo il cesio un metallo alcalino, il resto atomico ha la struttura compatta dei gas nobili, di modo che la carica efficace, per l'elettrone luminoso tende a 1 con particolare rapidità. Nè deve sorprendere che per lo sdoppiamento si manifesti uno scarto tanto più forte che per l'energia. Per comprenderne intuitivamente la ragione basta riferirsi al modello classico di Bohr-Sommerfeld; si vede allora facilmente che tutte le orbite molto allungate e di uguale quanto azimutale hanno approssimativamente la stessa distanza perielica e in vicinanza del nucleo si confondono in una unica curva percorsa con la stessa legge orario. Ora è essenzialmente in questa zona che ha origine lo sdoppiamento; segue che esso è all'incirca inversamente proporzionale al periodo di rivoluzione (intervallo fra due passaggi al perielio). Se la non newtonianità del campo si manifesta fortemente, come nel nostro caso, già a non grande distanza dall'afelio, un allungamento anche modesto dell'orbita determina una variazione considerevolissima del periodo di rivoluzione⁽¹⁾. Del resto un calcolo diretto mostra che la nostra inter-

(1) In generale, per livelli non eccitati o per livelli eccitati di debole quanto azimutale, si ha nel modello classico un ordinario moto a rosetta. Al contrario, per taluni

pretazione è fondata. Supponiamo di correggere il potenziale statistico in guisa che il valore del termine si accordi con quello sperimentale. Ciò può farsi in infiniti modi; tuttavia una limitazione si impone, e cioè che il potenziale corretto sia sempre intermedio fra quello statistico e quello newtoniano limite. Si trova allora che esiste un limite superiore per lo sdoppiamento calcolato in base all'autofunzione corrispondente, il quale vale:

$$\Delta_s n = 750 \text{ cm}^{-1}$$

esso corrisponde al passaggio brusco del potenziale statistico a quello newtoniano a una distanza di circa $2,2 \text{ \AA}$ dal nucleo. Con un raccordo più verosimile fra potenziale statistico e newtoniano del tipo:

$$\frac{v_s - v}{v_s - v_n} = e^{-\lambda r}$$

si trova un valore in quasi perfetto accordo con l'esperienza.

Abbiamo infine calcolato il rapporto fra le intensità delle prime due righe di assorbimento. Se si indica con ψ_0 l'autofunzione corrispondente al termine fondamentale, 6_s e con ψ'_1 e ψ''_1 quelle corrispondenti ai termini 6_p e 7_p , tale rapporto vale:

$$\frac{i_1}{i_2} = \left[\frac{\int \psi_0 \psi'_1 x^3 dx}{\int \psi_0 \psi''_1 x^3 dx} \right]^2$$

Le auto-funzioni sono state determinate conservando il potenziale statico fino a $r = 2,2 \text{ \AA}$ e il potenziale newtoniano a distanza maggiore. In queste condizioni, come si è detto, si ottiene per il termine 6_p il valore sperimentale; è notevole che nelle stesse condizioni anche il valore teorico del termine 7_p si accordi presso che esattamente con l'esperienza. Per ragioni di semplicità non si è determinato teoricamente il termine 6_s ; l'autofunzione ψ_0 è stata invece costruita dall'infinito e fino a non grande distanza dal nucleo, in base al valore sperimentale del termine. Le χ non normalizzate sono riportate nella tabella. Si trova:

$$\frac{i_1}{i_2} = 125$$

Lo sdoppiamento del termine 7_p calcolato in base all'autofunzione ψ''_1 risulta:

$$\Delta_s n = 220 \text{ cm}^{-1}$$

livelli eccitati di forte quanto azimutale, l'orbita di Bohr-Sommerfeld si spezza in due distinte, di cui l'una si svolge nella zona profonda dell'atomo, l'altra nella regione più esterna. Il modello cessa allora di dare indicazioni intuitive.

e deve ancora considerarsi come un limite superiore. L'esperienza dà:

$$\Delta_n = 181$$

in accordo questa volta assai migliore, per ragioni facili a comprendersi.

TAVOLA I.

x	χ_{04}	χ_{92}
0,2	0,174	2,138
0,4	0,603	6,840
0,6	0,925	8,265
0,8	1,031	7,231
1,0	0,976	5,482
1,2	0,838	3,739
1,4	0,675	2,396
1,6	0,521	1,515
1,8	0,389	0,940
2,0	0,284	0,570

TAVOLA II.

x	χ
0	0
0,1	0,0519
0,2	0,1030
0,4	0,0627
0,6	— 0,0593
0,8	— 0,1442
1	— 0,1587
1,5	0,0019
2	0,1831
3	0,2024
4	— 0,0374
6	— 0,3990
8	— 0,3764
10	— 0,1508
12	0,1276
16	0,5942
20	0,8503
25	0,9281
30	0,8474
35	0,7012
40	0,5462
50	0,2990

TAVOLA III.

x	χ_0	χ'_1	χ''_1
4	— 0,091	— 0,038	— 0,039
5	— 0,390	— 0,269	— 0,270
6	— 0,513	— 0,399	— 0,399
7	— 0,477	— 0,426	— 0,425
8	— 0,336	— 0,376	— 0,373
9	— 0,141	— 0,276	— 0,270
10	0,072	— 0,147	— 0,139
11	0,279	— 0,007	0,004
12	0,466	0,134	0,147
14	0,757	0,391	0,406
16	0,931	0,596	0,601
18	1,000	0,740	0,723
20	1,005	0,840	0,788
25	0,898	0,967	0,781
30	0,717	0,962	0,571
35	0,535	0,876	0,234
40	0,377	0,749	— 0,154
50	0,171	0,484	— 0,820
60	0,071	0,282	— 1,227
70	0,027	0,153	— 1,326
80	0,010	0,079	— 1,221
100	0,001	0,019	— 0,791

Chimica. — *Ricerche sui solfosali.* — VII. *Polisolfovanadati.*
Nota ⁽¹⁾ di L. FERNANDES, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

A. Rosenheim, nel suo classico lavoro ⁽²⁾ sulla costituzione dei polimolibdati, polivolframati e polivadanati, considera i vari prodotti che si originano nella graduale polimerizzazione dei vanadati per azione degli acidi minerali. Partendo da una soluzione di un ortovanadato alcalino e aggiungendo gradatamente, per esempio, acido cloridrico, si ottiene successivamente:

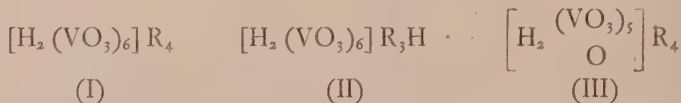


Il prodotto di ulteriore polimerizzazione del metavanadato, l'esavanadato, deriva da un acido:



capostipite di una numerosissima serie di polivanadati complessi, che il Rosenheim annovera fra gli acquati alla stregua dei corrispondenti polimolibdati e polivolframati.

Di questo acido si conoscono soprattutto tre serie di derivati



Si ottiene l'uno o l'altro a seconda della natura della base e del diverso grado di acidità della soluzione madre.

Nell'attuale lavoro io ho esteso le mie ricerche sui solfosali complessi e in particolare sui tioacquati, allo studio dei prodotti di polimerizzazione dei solfovanadati.

Per il solfomolibdato di ammonio io avevo studiato la spontanea decomposizione di questo sale e avevo potuto stabilire la formazione di parasolfomolibdati in base alla reazione:



Nel caso invece del solfovanadato, la reazione di decomposizione spontanea avviene pure con sviluppo di ammoniaca, il composto però che in

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1928.

(2) «Z. anorg. allgem. Chem.», (1916), 96, 166.

un primo tempo si forma e che probabilmente è un polisolfovanadato; subisce una ulteriore rapida decomposizione, con riduzione del vanadio a sale di vanadile e ossidazione dell'idrogeno solforato a solfo.

Questa decomposizione avviene con la massima rapidità, con sviluppo di calore ed è quindi impossibile isolare ed individuare i prodotti intermedi.

Per via umida, in soluzione acquosa, il solfovanadato di ammonio subisce pure una rapida decomposizione, i prodotti che si formano non hanno composizione costante.

A volte si separa del pentasolfuro di vanadio, in altre condizioni invece si separano delle polveri scure, quasi nere, poverissime di solfo.

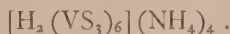
L'aggiunta di poche gocce di ammoniaca o di solfuro ammonico stabilizza completamente il sale e ne impedisce la decomposizione.

Facendo agire su questa soluzione stabilizzata idrogeno solforato sotto pressione, si possono ottenere i prodotti gradualmente della polimerizzazione.

Se l'ammoniaca o il solfuro ammonico superano una certa concentrazione si ottiene il metalsolfovanadato viola cupo microcristallino di formula



Per azione prolungata invece, dell'idrogeno solforato in soluzione piuttosto concentrata di solfovanadato, alcalino solo per piccole quantità di ammoniaca o di solfuro ammonico, si ottiene un sale simile al precedente più marcatamente cristallino e di colore più cupo, la cui composizione è analoga a quella del sale ossigenato di Rosenheim:



In questo composto è nettamente evidente la presenza di una molecola di idrogeno solforato che si può mettere in libertà distruggendo il complesso con un acido diluito.

Questa molecola proveniente dall'originario acido tioacquico occupa nel complesso un posto costitutivo ed esercita sui sei aggruppamenti VS_3 la sua azione coordinante.

Con questa ricerca, la teoria degli iso- ed eteropolitioacquati, sorta dallo studio dei polisolfomolibdati e dei solfomolibdovanadati, riceve una nuova conferma.

L'azione ulteriore dell'idrogeno solforato non porta a composti più acidi; non è stato possibile preparare composti contenenti atomi liberi di idrogeno extracoordinati, né composti, come nel caso dei sali ossigenati, contenenti un atomo di ossigeno al posto di un aggruppamento VO_3 .

L'aggiunta invece di un acido più forte del solfidrico provoca l'immediata decomposizione del solfovanadato con separazione di pentasolfuro di vanadio.

Se vogliamo considerare allora la polimerizzazione del solfovanadato normale dobbiamo distinguere due casi.

Con un acido relativamente forte si passa direttamente al termine estremo:



Con idrogeno solforato invece:

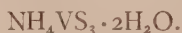


Il pirosoolfovanadato non è stato identificato.

PARTE SPERIMENTALE.

(In collaborazione con C. Orlandi).

Metasolfovanadato di ammonio:



12 gr. di solfovanadato normale furono sciolti in 50 cm.³ di acqua e addizionati con 5 cc. di solfidrato ammonico. La soluzione così ottenuta venne saturata con idrogeno solforato in bottiglia a pressione per circa due ore.

Si separò in questo modo un prodotto microcristallino viola cupo che venne spremuto alla pompa e lavato ripetutamente con alcool ed etere.

Per l'analisi il vanadio veniva dosato arroventando il sale e pesando l'anidride vanadica formatasi.

Il solfo veniva ossidato con acqua ossigenata ammoniacale e dopo acidificazione con acido cloridrico, veniva precipitato e pesato il solfato di bario.

In un'altro campione veniva dosata l'ammoniaca spostandola con potassa e raccogliendola su acido solforico titolato.

Trovato %	V 25.61	S 46.91	NH ₃ 8.95	H ₂ O 18.08
Per NH ₄ VS ₃ · 2H ₂ O:				

Calcolato %	V 25.37	S 47.76	NH ₃ 8.95	H ₂ O 17.9
-------------	---------	---------	----------------------	-----------------------

Metasolfovanadato di guanidina:



Alcuni grammi di metasolfovanadato di ammonio spremuti di fresco e lavati con poco alcool vennero sospesi in una soluzione concentrata di cloruro di guanidina. Dopo circa 24 ore il sale si era trasformato in un prodotto viola meno cupo di quello di ammonio e più spiccatamente cristallino.

L'analisi di questo composto venne condotta in modo analogo che per il sale di ammonio, l'azoto venne dosato gasvolumetricamente per combustione del sale.

Trovato %	V 21.05	S 39.9	N 17.13	H ₂ O 14.6
Per $\text{GuVS}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$:				
Calcolato %	V 20.9	S 39.5	N 17.28	H ₂ O 14.8

Vanadiotioacquato di ammonio:



12 gr. di solfovanadato ammonico sciolti in 50 cm.³ di acqua alla quale erano stati aggiunti 2 cm.³ di solfidrato ammonico, furono saturati con idrogeno solforato sotto pressione per più di due ore alla temperatura di circa 0°.

Dopo alcuni minuti di riposo il prodotto cristallino formatosi venne rapidamente spremuto e lavato con alcool ed etere.

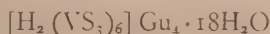
Questo composto presenta una straordinaria instabilità; dopo pochi minuti che il sale è spremuto, non appena è secco, inizia la sua rapida decomposizione. Lasciato sopra un pezzo di carta da filtro emette fumi bianchi che odorano di ammoniaca e si scalda rapidamente così forte che a volte il foglio si incendia.

Per poter eseguire l'analisi di questo prodotto, cosa che richiese numerosissime preparazioni, non appena spremuto lo si introduceva in pesafiltri tarati si chiudeva rapidamente e si pesava.

Per il dosaggio dell'ammoniaca veniva poi immediatamente trattato con qualche goccia di acido solforico diluito, per l'idrogeno solforato con ammoniaca.

Trovato %	V 23.58	S 44.80	NH ₄ 6.03	H ₂ O 26.1
Per $(\text{NH}_4)_4\text{V}_6\text{S}_{18}\text{H}_2 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$:				
Calcolato %	V 23.91	S 45.00	NH ₄ 5.65	H ₂ O 25.44

Vanadiotioacquato di guanidina:



Per la preparazione di questo composto veniva spremuto il sale di ammonio, lavato rapidamente con un poco di alcool, operandone l'acqua l'immediata decomposizione, e immerso poi in una soluzione concentrata di cloruro di guanidina.

Il sale viola così ottenuto presenta una stabilità di gran lunga superiore a quella del sale di ammonio.

Trovato %	V 20.59	S 40.04	N 11.10	H ₂ O 22.9
Per $\text{Gu}_4\text{V}_6\text{S}_{18}\text{H}_218\text{H}_2\text{O}$:				
Calcolato %	V 21.19	S 39.90	N 11.64	H ₂ O 22.4

Vanadiotioacquato di tallio:



In modo analogo al precedente fu preparato il sale di tallio, per aggiunta cioè del sale di ammonio ad una soluzione concentrata di sale di tallio.

Anche questo composto, viola più chiaro del precedente, microcristallino, presenta una stabilità assai superiore a quella del sale di ammonio.

Trovato %	V 14.93	S 27.93	Tl 41.0	H ₂ O 17.5
Per $\text{Ti}_4\text{V}_6\text{S}_{18}\text{H}_218\text{H}_2\text{O}$:				
Calcolato %	V 15.13	S 28.50	Tl 40.3	H ₂ O 17.8

Chimica-fisica. — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide.* — III. *Analisi termica dei sistemi* $\text{MnCl}_2\text{—CoCl}_2$; $\text{CdCl}_2\text{—CoCl}_2$ *e* $\text{MgCl}_2\text{—CoCl}_2$ *anidri*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di A. FERRARI e A. INGANNI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Nei sistemi studiati nelle due precedenti Note (LiCl—CoCl_2 e LiCl—CdCl_2)⁽³⁾ la completa miscibilità allo stato solido che era prevedibile in relazione alla forma cristallina simile dei componenti viene disturbata dalla affinità dei due cloruri che porta alla formazione di composti, cosa abbastanza naturale se si considera che i due metalli hanno una diversa valenza.

Per indagare l'influsso della forma cristallina sopra la solubilità allo stato solido è quindi conveniente considerare i sistemi binari dei cloruri bivalenti anidri, struttura tipo « cloruro di magnesio » che sono elencati nella Nota precedente.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica-fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta il 24 luglio 1928.

(3) Questi « Rendiconti » (6^a), VII (1928) 848 e 1040.

È abbastanza fondato il ritenere che questi cloruri avendo la stessa valenza abbiano minor tendenza a dare combinazioni.

Le coppie che con questi cloruri si possono ottenere sono le seguenti:

1. $\text{MgCl}_2\text{—CoCl}_2$	6. $\text{CoCl}_2\text{—NiCl}_2$	11. $\text{NiCl}_2\text{—MnCl}_2$
2. $\text{MgCl}_2\text{—NiCl}_2$	7. $\text{CoCl}_2\text{—FeCl}_2$	12. $\text{NiCl}_2\text{—CdCl}_2$
3. $\text{MgCl}_2\text{—FeCl}_2$	8. $\text{CoCl}_2\text{—MnCl}_2$	13. $\text{FeCl}_2\text{—MnCl}_2$
4. $\text{MgCl}_2\text{—MnCl}_2$	9. $\text{CoCl}_2\text{—CdCl}_2$	14. $\text{FeCl}_2\text{—CdCl}_2$
5. $\text{MgCl}_2\text{—CdCl}_2$	10. $\text{NiCl}_2\text{—FeCl}_2$	15. $\text{MnCl}_2\text{—CdCl}_2$

Salvo l'esistenza di composti, la grande analogia dei reticoli cristallini di questi cloruri farebbe prevedere per tutti questi sistemi una miscibilità completa allo stato solido.

Fino ad ora di questi sistemi sono stati studiati: quello $\text{MgCl}_2\text{—MnCl}_2$ da C. Sandonnini ⁽¹⁾, quello $\text{MnCl}_2\text{—CdCl}_2$ da C. Sandonnini e G. Scarpa ⁽²⁾ e quello $\text{MgCl}_2\text{—CdCl}_2$ da O. Menge ⁽³⁾.

Per tutti e tre questi sistemi la detta previsione è verificata, perchè fu ritrovata una miscibilità completa con punti di fusione delle miscele intermedi a quelli dei componenti puri. Non risultandoci che gli altri dodici sistemi siano stati studiati abbiamo esteso l'esame a questi con lo scopo di confermare con un maggior numero di esempi la previsione basata sulle analogie cristallografiche di questi cloruri.

Nel presente lavoro riferiamo lo studio dei sistemi $\text{MnCl}_2\text{—CoCl}_2$; $\text{CdCl}_2\text{—CoCl}_2$ e $\text{MgCl}_2\text{—CoCl}_2$.

I punti di fusione dei cloruri di manganese, di cadmio e di magnesio furono riscontrati coincidenti abbastanza bene con quelli ottenuti da altri autori, e precisamente 649° , 560° e 712° ; il punto di fusione del cloruro di cobalto esente da nichelio fu riconfermato di 724° , come è già stato comunicato nella prima Nota del presente studio. È stato pure confermato che aggiungendo al cloruro di cobalto piccole quantità di cloruro di nichelio il suo punto di fusione viene subito fortemente innalzato. Ammesso che i cloruri di nichelio e di cobalto siano miscibili in ogni proporzione, l'effetto innalzante del cloruro di nichelio porterebbe a presumere altissima la temperatura di fusione di questo, e con grande probabilità irrealizzabile alla pressione ordinaria, data la tendenza alla sublimazione che questo cloruro presenta già a temperature non troppo elevate.

I dati sperimentali relativi al sistema $\text{MnCl}_2\text{—CoCl}_2$ sono raccolti nella tabella I e rappresentati graficamente nella fig. 1.

(1) Questi « Rendiconti » (5^a), XXI, (1912), 634.

(2) Questi « Rendiconti » (5^a), XX, (1911), 61.

(3) « Zeit. anorg. Chem. », LXXII, (1911), 165.

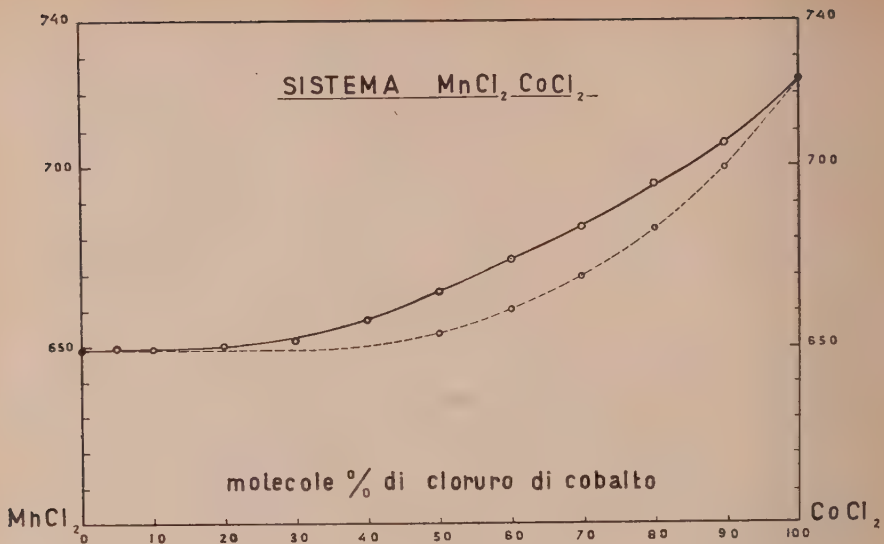


Fig. I.

TABELLA I.

Molecole % di CoCl_2	Inizio della cristal- lizzazione	Fine della cristal- lizzazione	Molecole % di CoCl_2	Inizio della cristal- lizzazione	Fine della cristal- lizzazione
0	649°	—	49.5	665°	653°
5.0	650	—	60.0	674	660
10.0	650	—	69.5	684	670
20.0	651	—	80.5	696	683
30.0	653	—	89.5	706	700
40.0	659	—	100.0	724	—

I dati ottenuti nelle fusioni delle miscele dei cloruri di cobalto e di cadmio sono riportati come per il precedente sistema nella tabella II e graficamente riassunti nella fig. 2.

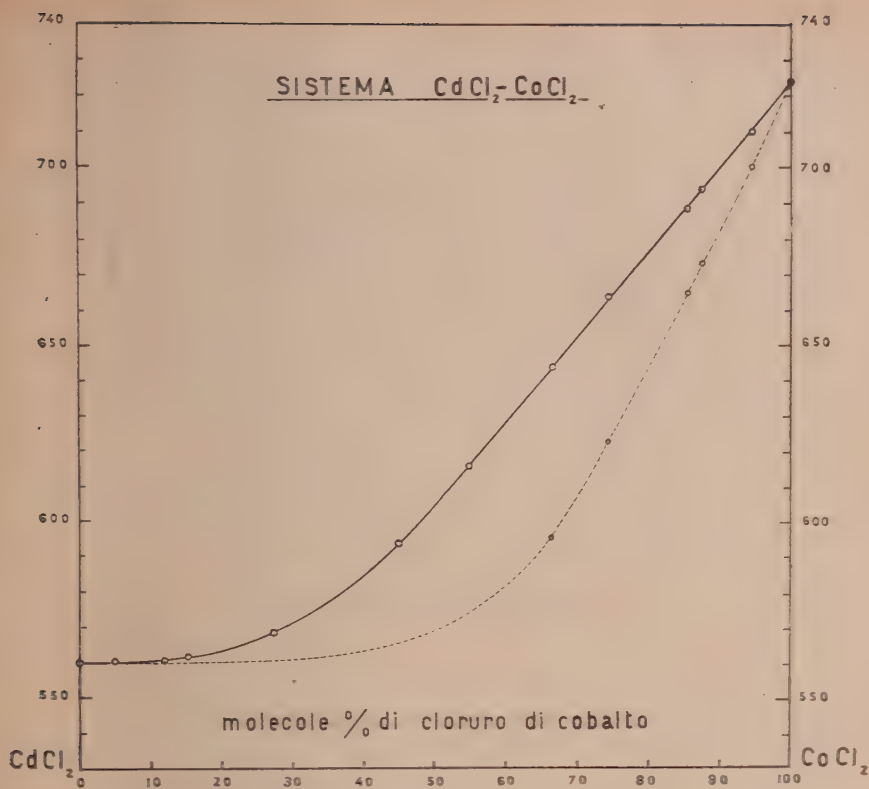


Fig. 2.

TABELLA II.

Molecole % di CoCl_2	Inizio della cristal- lizzazione	Fine della cristal- lizzazione	Molecole % di CoCl_2	Inizio della cristal- lizzazione	Fine della cristal- lizzazione
0	560°	—	66.5	643°	596°
5.0	561	—	74.5	663	622
12.0	561	—	85.5	688	665
15.0	562	—	87.5	694	674
27.5	568	—	94.5	710	700
45.0	593	—	100.0	724	—
54.0	614	—	—	—	—

Per entrambi i precedenti sistemi le fini della cristallizzazione si individuano con difficoltà, soprattutto nelle miscele povere in cloruro di cobalto nelle quali si avrebbe una apparente fine della cristallizzazione a temperature inferiori a quella di fusione del componente che fonde più basso.

Ciò non si può ammettere nel caso dei nostri sistemi in cui gli inizi della solidificazione delle miscele sono tutti compresi fra i punti di fusione dei componenti puri. Le fini della cristallizzazione per queste miscele non sono quindi state segnate nelle tabelle, e nei grafici le curve della fine della solidificazione sono punteggiate volendosi indicare con esse in grosso modo, solo l'andamento della curva stessa.

Le miscele sono state analizzate dopo la fusione, allo scopo di rilevare le eventuali variazioni della composizione avvenute durante la stessa per effetto della volatilità dei cloruri di cobalto e di cadmio e per la eventuale presenza di umidità.

Infine riassumiamo nella tabella III e graficamente nella fig. 3 il comportamento alla fusione delle miscele dei cloruri di magnesio e di cobalto.

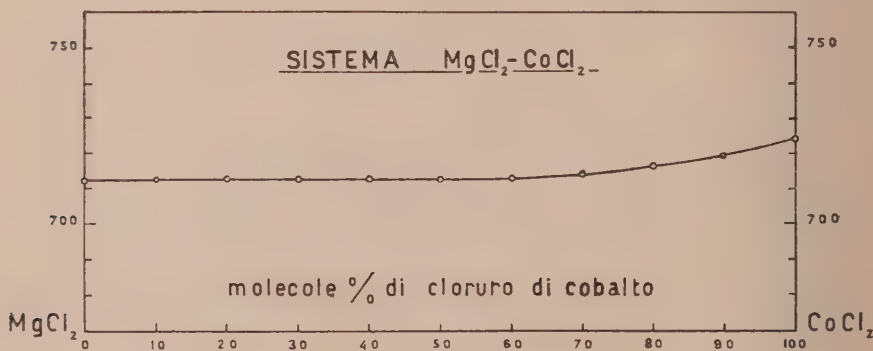


Fig. 3.

TABELLA III.

Molecole % di $CoCl_2$	Inizio della cristal- lizzazione	Molecole % di $CoCl_2$	Inizio della cristal- lizzazione
0	712°	60	712°
10	712	70	714
20	712	80	716
30	712	90	719
40	712	100	724
50	712	—	—

Queste miscele a differenza di quelle dei due precedenti sistemi non sono state analizzate perchè data la piccolissima influenza della composizione sul punto di fusione, piccole variazioni del rapporto magnesio-cobalto nella fusione non possono avere un effetto sensibile sull'andamento della curva della fig. 3.

L'intervallo di temperatura di cristallizzazione è in questo sistema praticamente nullo per cui nella soprastante tabella viene omessa la colonna colle temperature della fine della solidificazione.

La mancanza di un intervallo della temperatura di solidificazione apprezzabile è dovuto alla grande vicinanza dei punti di fusione dei due cloruri che compongono il sistema (MgCl_2 712° e CoCl_2 724°). Infatti essendo in questi sistemi a miscibilità completa senza nè massimi nè minimi, gli intervalli di cristallizzazione tanto più grandi, quanto maggiore è la differenza fra le temperature di fusione dei componenti puri; gli intervalli massimi si hanno nel sistema cloruro di cadmio-cloruro di cobalto dove si raggiungono per alcune miscele i 50 gradi.

Lo studio dei tre predetti sistemi dimostra quindi che i cloruri di manganese, di cadmio e di magnesio sono completamente miscibili anche allo stato solido col cloruro di cobalto, questo risultato conferma quindi pienamente la previsione fatta all'inizio del presente lavoro.

Riassumendo:

Si dimostra che i sistemi $\text{MnCl}_2\text{—CoCl}_2$, $\text{CdCl}_2\text{—CoCl}_2$, $\text{MgCl}_2\text{—CoCl}_2$ anidri danno miscibilità allo stato solido in ogni proporzione.

Le temperature di inizio della solidificazione non presentano nè massimo nè minimo, ma sono intermedie a quelle dei componenti puri.

I tre sistemi considerati hanno quindi quella miscibilità completa che è stata prevista in base alle considerazioni sopra esposte.

Mineralogia. — *Il giacimento di zolfo di Monte Solforoso presso Scrofano in provincia di Roma* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di E. ONORATO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Monte Solforoso, così chiamato per le emanazioni solfidriche che da esso si sprigionano, è una collina (m. 376) che taglia il ciglio del cratere di Scrofano, la più grande valle craterica riconosciuta dal Moderni ⁽³⁾ nei vulcani Sabatini. Lo stesso autore ritiene anche che Monte Solforoso possa ritenersi uno dei resti di un piccolo cratere apertosi sul ciglio di quello di Scrofano oppure un piccolo cono di estrusione.

(1) Lavoro eseguito nell'Ist. di Mineralogia della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1928.

(3) MODERNI, *Le bocche eruttive dei Sabatini*. « Boll. R. Com. Geol. d'Italia », XXVII (1896), p. 136.

La produzione di idrogeno solforato, in alcuni giorni abbondante, sembra abbia formato in questa località il giacimento di zolfo da circa due secoli e, secondo notizie storiche raccolte dall'ing. Perron ⁽¹⁾, coltivato dai Francesi per venti anni circa (1850-70) ed in seguito abbandonato. Il gas fuoriesce dalle regioni profonde per spaccature, alcune delle quali, dopo aver attraversato la lente del giacimento solfifero, arrivano fin sotto il terreno vegetale, senza però raggiungere mai la superficie stessa. Le gallerie aperte per i vecchi lavori minerari certo favorirono l'uscita del gas H_2S , CO_2 e fino al punto da impedire un'ulteriore coltivazione sotterranea che, d'altra parte, per quanto ci fa sapere il De Marchi ⁽²⁾, pare fosse già poco conveniente per la grande umidità del materiale, da cui si soleva separare lo zolfo con il metodo dei calcaroni.

Ora son pochi anni, la miniera di zolfo di Monte Solforoso, meglio conosciuta come « Miniera di zolfo di Scrofano » è stata riattivata con criteri più razionali e con moderni mezzi di ventilazione. Per concessione dell'ing. Perron, direttore della miniera, e del successore ing. Usoni, i quali io ringrazio ancora una volta, mi è stato possibile fare in miniera tutte le osservazioni che ho ritenuto necessarie.

Tufi e lapilli. — Le numerose gallerie dei vecchi lavori aperte in diversi livelli del versante ovest della collina, le gallerie dei nuovi lavori (Italia, Mussolini, Nuova, ecc.) e le sezioni recentemente fatte per il livellamento del terreno su cui sorge la palazzina della miniera (area che fa parte della regione Solforata), mostrano che in questa regione esistono soltanto tufi e lapilli.

Il tufo che, per livello, viene subito dopo il terreno vegetale, è poco coerente, di colore rossiccio molto chiaro, con leggera stratificazione nella parte superiore, stratificazione che diventa sempre meno distinta inferiormente. Esso è caratterizzato dalla presenza di numerose pisoliti, variabili in diametro, formate dallo stesso materiale tufaceo e senza nessuna particolare struttura interna. Per gradi si passa da questo tufo ad un altro sottostante litoide, privo di tali pisoliti, come quello della cava (anche in regione Solforata) da cui si è estratto il materiale per la costruzione della palazzina, e che non compare a Monte Solforoso. Nel tufo a pisoliti si distinguono ad occhio nudo soltanto laminette di mica nera che al microscopio dimostrano meglio la loro alterazione con impoverimento di ferro. Asportando con successivi lavaggi la parte terrosa e rossiccia che è il maggior costituente del tufo, si riconoscono al microscopio granuli di quarzo e di pirosseno, il quale si conserva anche in cristallini superficialmente corrosi. Data la natura litologica della regione e le specie minerali riconosciute, si può ritenere che si tratti di un tufo relativamente acido, forse trachitico,

(1) PERRON, *La miniera di zolfo di Scrofano*. « La Miniera Italiana », n. 9, 1925.

(2) DE MARCHI, *I prodotti minerari della prov. di Roma*, 1882.

abbastanza alterato, non essendovi più alcun elemento feldspatico riconoscibile. L'analisi chimica dà le seguenti percentuali:

SiO ₂	47.47
Al ₂ O ₃	23.44
Fe ₂ O ₃	2.78
FeO	1.10
CaO	6.57
MgO	2.44
Na ₂ O	2.32
K ₂ O	2.59
H ₂ O (al rosso)	12.90
	<hr/> 101.61

Tutto il ferro che dà il colore rossiccio alla massa tufacea è contenuto allo stato di ossido di ferro idrato. Esso passa in soluzione nell'acido cloridrico a concentrazione media, ed a freddo. Data la percentuale d'acqua, deve ritenersi che anche l'alluminio, almeno in parte, si trovi come idrato. Non vi sono elementi per stabilire quale sia stata la causa determinante di tale alterazione; estendendo però le osservazioni su maggior area, si potrebbe decidere se l'alterazione del tufo fu prodotta da azioni atmosferiche o da una particolare azione delle ultime manifestazioni vulcaniche della regione. L'estensione del tufo trachitico in questa parte orientale dei vulcani Sabatini, potrebbe inoltre accertare se anche in questa regione, analogamente a quella occidentale, vi fu un periodo di attività più acida di quello che ha dato le rocce basiche leucitiche assai più diffuse nella regione.

Al di sotto del tufo in parola trovasi un materiale tufaceo, di colore perfettamente bianco, coerente, a struttura trachitica, leggero e con tutto l'aspetto del gesso cotto. Anche questo materiale si distingue in pisolitico e non pisolitico. Le pisoliti sono più resistenti alla rottura di quelle del tufo superiore e sono formate da gusci concentrici. Per questi caratteri, anche ad un primo esame sul posto, si può riconoscere questo materiale tufaceo come un'ulteriore alterazione del tufo rossiccio. Dall'analisi chimica risulta che esso in realtà non è che il residuo di una tale alterazione, perchè risulta, costituito in gran parte da silice:

SiO ₂	84.43
SO ₃	1.27
Al ₂ O ₃ (+ tr. di Fe ₂ O ₃)	4.67
CaO	0.73
MgO	0.43
H ₂ O	8.60
	<hr/> 100.14

Il ciclo di trasformazione del tufo trachitico in quello siliceo è certamente dovuto alla formazione di solfati portati in soluzione dalle acque circolanti ed altrove depositati; si tratta del solito ciclo che si verifica nelle solfatare ed il piccolo residuo di SO_3 ce ne può dare conferma.

Tra il tufo trachitico e quello siliceo si trova chiusa una lente di lapilli, anche essi diventati bianchi, impregnati di molti cristallini di zolfo. Il lapillo si alterna con qualche strato di materiale tufaceo, bigio, compatto, e sterile; una tale alternanza è bene identificabile nel cantiere detto Boccio.

Dove la lente va assottigliandosi, il lapillo si conserva sempre più inalterato e nello stesso tempo si impoverisce di zolfo fino a diventarne sterile. Il passaggio dal lapillo ricco di zolfo al tufo siliceo sterile si può ben osservare in vari punti dei nuovi lavori.

A tale proposito credo necessario far notare che là dove il tufo siliceo presenta piani di stratificazione e quindi di minor resistenza, lo zolfo vi si è depositato come una spalmatura cristallina (Galleria Mussolini).

I minerali. — I cristallini di zolfo che trovansi nel lapillo sono grandi qualche millimetro, lucenti e si prestano bene a misure goniometriche. Come abito nulla vi è da aggiungere a quanto di solito è stato osservato per questo minerale, è solo da notare che talvolta i cristallini sono tabulari per sviluppo della $\{010\}$ o per lo sviluppo di due facce parallele della forma $\{111\}$. Nei cristalli in parola sono presenti tutte e quattro le forme caratteristiche di questa specie: $c\{001\}$, $m\{011\}$, $p\{111\}$, $s\{113\}$ ed ancora le accessorie $m\{110\}$, $e\{101\}$, $b\{010\}$.

Angoli	N. misure	Media	Calc. (Dana)
$(001):(113)$	5	$45^\circ 10' \frac{1}{2}$	$45^\circ 10'$
$(111):(113)$	7	$26^\circ 29' \frac{2}{3}$	$26^\circ 29' \frac{3}{4}$
$(111):(110)$	4	$18^\circ 20'$	$18^\circ 20' \frac{1}{4}$
$(111):(11\bar{1})$	3	$36^\circ 40' \frac{1}{6}$	$36^\circ 40' \frac{1}{2}$
$(111):(101)$	1	$36^\circ 46'$	$36^\circ 47'$
$(111):(011)$	1	$47^\circ 29'$	$47^\circ 26'$
$(101):(10\bar{1})$	1	$46^\circ 25'$	$46^\circ 16'$
$(011):(01\bar{1})$	3	$55^\circ 24' \frac{1}{3}$	$55^\circ 26'$
$(011):(010)$	4	$27^\circ 43' \frac{1}{2}$	$27^\circ 43'$

Le combinazioni osservate sono:

1^a : c, n, p ; 2^a : c, n, p, m, e ; 3^a : c, n, p, m, e, s ; 4^a : c, n, p, b, m, s ;
 5^a : c, n, p, b, m, c, s .

Tutte queste combinazioni, tranne la terza, sono da aggiungere al quadro statistico delle combinazioni date dal Niggli⁽¹⁾ per questo minerale.

(1) NIGGLI, *Kristallisation und Morphologie des rhombischen Schwefels*, «Zeit. f. Kryst. u. Miner.», B. LVIII, p. 496.

Lo zolfo si trova anche in grossi blocchi formati da strati sovrapposti con struttura fibro-raggiata. Questo tipo di zolfo si trova però soltanto nei vecchi lavori abbandonati, dove si produce ancora idrogeno solforato (Cantiere coltivato vicino all'imbocco della Galleria Vittorio Emanuele).

Le acque circolanti depositano continuamente incrostazioni cristalline di solfati, stalattiti e masserelle fibrose. In alcune gallerie dei vecchi lavori scavate nel tufo siliceo, vi si nota anche come una trasudazione di minuti cristallini di allume, difficilmente isolabili dal tufo stesso. Tra i campioni che ho pensato di raccogliere, ho riconosciuto l'allume e l'alotrichite:

L'allume è in cristalli distorti, trasparenti ed imperfetti oppure in croste cristalline bianche, entrambi perfettamente isotropi.

L'alotrichite più comunemente si deposita in fibre distorte ad un estremo, con accrescimento parallelo, di color bianco con leggero riflesso azzurrognolo e lucentezza silicea. Queste fibre si riuniscono in strati alquanto compatti e di solito mostrano un'alterazione superficiale; la loro estinzione è indecisa e retta. In complesso questo minerale per i suoi caratteri fisici può paragonarsi a quello di Rio studiato dal Millosevich⁽¹⁾. Se ne distingue invece per la composizione chimica; infatti l'alotrichite di Rio ha una piccola percentuale di ferro-ferrico e soltanto tracce di calcio, inoltre essa si avvicina di più alla composizione teorica.

Si può invece paragonare la composizione chimica dell'alotrichite bianca di Monte Solforoso (analisi I) a quella di Mörsfeld (anal. II)⁽²⁾.

Meno facile è il rinvenimento dell'alotrichite depositata in ciuffetti di piccoli aghi sericei, di color giallo paglia. Questo tipo di alotrichite si distingue da quello bianco, oltre che per il colore, anche per una estinzione inclinata con notevole angolo rispetto alla direzione di allungamento. Questo differente comportamento ottico delle fibre di alotrichite è stato più volte riscontrato [G. Linck, J. Uhlig (ang. est. 37°) A. Arzruni, Cesàro (estin. paral.)]⁽³⁾, per cui ancora oggi non è decisa la classe di simmetria da assegnare a questo minerale. Nella miniera di Monte Solforoso sono perciò presenti tutti e due i tipi di fibre, analogamente a quanto è stato osservato a Vulcano dal Panichi⁽⁴⁾.

L'alotrichite gialla di Monte Solforoso si distingue dall'altro tipo anche per la composizione chimica, perchè contiene circa la metà di ossido ferroso ed affatto calcio (anal. III); essa può paragonarsi a quella di Idria (anal. IV)⁽⁵⁾.

(1) F. MILLOSEVICH, *Alotrichite di Rio (isola d'Elba)*. «R. Accad. Lincei», vol. XXIV, serie 5^a, fasc. 11.

(2) RAMMELSBERG, pagg. XLIII, (1848), vedi anche DANA, *Lyst of Mineral*.

(3) *Analisi di Janovsky* in «Zepharovich - Hallotrichit - Melanterit Von Idria».

(4) Vedi DOELTER, *Handb. d. Mineralch.*, B. IV, 10.

(5) PANICHI, *Contributo allo studio dei minerali dell'isola di Vulcano*, «Mem. Soc. It. Scienz.», ser. III, tom. XIX.

	I.	II.	III.	IV.
SO ₃	35.10	36.03	36.15	34.90
Al ₂ O ₃	10.61	10.91	10.84	10.29
Fe ₂ O ₃	—	—	—	1.40
FeO	9.10	9.37	4.98	4.36
CaO	2.33	—	tr.	—
MgO	tr.	0.23	—	—
K ₂ O	—	0.43	—	—
H ₂ O	42.93	43.03	46.99	47.11
	<hr/> 100.07	<hr/> 100.00	<hr/> 100.57	<hr/> 100.00

Nell'analisi III su grammi 0.483 ho avuto un residuo di gr. 0.012, dato da granuli di tufo e da qualche fibra di solfato basico, insolubile in acqua e riconoscibile per la mancanza dello splendore sericeo. Non potei evitare tale residuo malgrado la cura presa nella separazione meccanica; perciò le percentuali date sono state calcolate sulla differenza dei due valori. Il materiale bianco sericeo invece non ha dato che un residuo indosabile.

Se è vero, come il Panichi ritiene, che il ferro influisca sul valore dell'angolo di estinzione delle fibre di alotrichite, dalle mie analisi (I e III) e dai caratteri ottici osservati, risulterebbe che l'angolo di estinzione diminuisce con l'aumento della percentuale di ossido ferroso.

Alterazione del tufo e origine del giacimento. — Come già ho accennato, deve ritenersi che il ciclo percorso dal tufo trachitico per trasformarsi in quello siliceo, dipenda dalla formazione dei solfati solubili di Al, Fe, ecc., per reazioni che furono facilitate dallo stato di decomposizione del materiale feldspatico. Non si può d'altra parte sostenere, come a prima vista sembrerebbe, che la formazione dei solfati sia dovuta ad uno stato di attività solfatariana quale è quella che oggi constatiamo. La trasformazione di rocce feldspatiche, per azione dell'idrogeno solforato, talvolta facilitata da quella dell'anidrite carbonica, è una reazione che in linea di massima non si può escludere perchè molte volte nella letteratura si trova confermata una tale capacità dell'idrogeno solforato; infatti dai più si ammette che nella solfataria di Pozzuoli l'idrogeno solforato si sia decomposto in zolfo ed in prodotti solforosi che, ossidatisi all'aria, attaccarono la roccia trachitica, formando incrostazioni di gesso e di allume. Io stesso ho potuto osservare in altra località dei Sabatini (Fosso del Biscione) che l'idrogeno solforato, gorgogliando all'aperto dalle acque di un torrente, ha attaccato, per uno strato superficiale, blocchi erratici di trachite. Una reazione di tal natura è stata osservata, ancora nei Sabatini, nella solfataria di Manziana dal Millosevich ⁽¹⁾

(1) F. MILLOSEVICH, *Di alcuni giacimenti di alunogeno in provincia di Roma*, « Boll. Soc. Geologica ital. », vol. XX (1901).

il quale ideò anche due esperienze atte a realizzare in laboratorio la formazione di zolfo e di solfati, partendo dal caolino e dall'idrogeno solforato. Dai risultati egli dedusse che lo zolfo si produce accanto ai solfati in proporzione minore se l'ossidazione del gas solfidrico avviene lentamente, perchè può formarsi più acido solforico.

Si tratta dunque sempre di reazioni avvenute allo scoperto, e quindi con il concorso dell'ossigeno atmosferico.

Ora data la mancanza di zolfo nel tufo siliceo di Monte Solforoso, dovremmo ammettere, in base alle precedenti esperienze, che l'ossidazione del gas solfidrico sia stata lenta e completa, cosa impossibile per il nostro caso perchè il tufo trovasi in profondità, a meno che non si voglia sostenere che il tufo siliceo, oggi sottostante a quello trachitico ed al lapillo, fosse stato invaso dal gas allo scoperto. In tal caso però dovremmo supporre che vi fosse stato un gran numero di depositi poco potenti di tufo e susseguentisi l'uno all'altro soltanto dopo che ciascuno di essi fosse stato completamente trasformato; spiegazione, invero, troppo artificiosa. Per ragioni analoghe a quelle già dette, ed anche per la natura chimica del materiale con il quale il gas H_2S avrebbe dovuto reagire, deveasi anche scartare l'ipotesi che i vari solfati derivino dall'ossidazione dei rispettivi solfuri. Escluse queste due possibilità, ritengo che la trasformazione del tufo trachitico avvenne per reazione con l'anidride solforosa, direttamente emessa dalla solfatara; perciò il tufo siliceo è il testimone di una attività solfatariana acida di Monte Solforoso, antecedente a quella basica attuale. A conferma di questo aggiungo che, in una delle mie gite alla miniera, dopo circa 130 metri dall'imbocco della Galleria Nord (nuovi lavori) ed a destra, da una specie di infossamento, veniva fuori una potente esalazione di gas SO_2 . Seppi dal soprintendente ai lavori che una tale emissione si verificava ad intermittenza ed irregolarmente. Data la forte intensità dell'esalazione, e la constatazione del soprintendente, credo che non si debba attribuire questa esalazione ad ossidazione del gas H_2S comunque avvenuta, ma ad uno degli ultimi strascichi dell'attività acida della solfatara.

Allo scopo di averé a mia disposizione più elementi per la presente discussione, in laboratorio ho fatto agire l'idrogeno solforato sul tufo rossiccio chiuso in grosso tubo da saggio, e su due altri campioni separatamente anidride solforosa ed anidride solforica. Nel primo esperimento il tufo è diventato bigio per formazione di solfuro di ferro ed è rimasto tale fin quando, esposto all'aria, non ha ripreso il suo colore, forse per decomposizione dei solfuri o per formazione di solfati. Negli altri due esperimenti il tufo è diventato rapidamente bianco per attacco con SO_3 , più lentamente per attacco con SO_2 . Dopo la reazione con l'anidride solforica, le pisoliti hanno acquistato gli stessi caratteri di quelli naturalmente alterati, cioè struttura a gusci concentrici, i quali verosimilmente indicano i vari strati di penetrazione e di reazione dell'anidride solforica, e maggior resistenza

alla rottura. Onde assicurarmi se il tufo grigio che si alterna al lapillo nel giacimento di zolfo, fosse rimasto quasi inalterato per la natura stessa del suo materiale oppure per altre cause, ho fatto agire anche su esso la SO_2 , ed in realtà il tufo, che sembra un impasto compatto di ceneri e di lapilli, si è dimostrato resistente a reagire. Sarebbe logico pensare che anche l'imbianchimento del lapillo fosse dovuto soltanto al gas SO_2 emesso direttamente dalla solfatara ma la presenza dello zolfo fa certamente nascere dei dubbi in proposito, perciò concluderò su questo dopo aver parlato della probabile origine dello zolfo cristallino.

Ho fatto notare a suo tempo che attualmente si ha produzione di zolfo per decomposizione dell'idrogeno solforato che riempie le gallerie dei vecchi lavori le quali non hanno ventilazione meccanica. Questo zolfo che attualmente si produce è quello fibroso di cui ho già parlato. Ora, anche quando potessimo parlare di circolazione di aria o di acqua del lapillo, entrambi capaci di determinare il deposito di zolfo dal gas H_2S , dovremmo pur spiegarci come mai soltanto nel lapillo si siano potuti formare i cristalli. Facendoci guidare soltanto da quello che la letteratura ci indica in proposito, potremmo concludere che lo zolfo ottenuto per decomposizione dell'idrogeno solforato, dopo essersi depositato nel lapillo, abbia subito condizioni che resero possibile la sublimazione in ambiente umido oppure nell'aria od anche nel vuoto. Nè credo che vi siano altre vie da seguire per spiegare il diverso modo di cristallizzazione dello zolfo ottenuto ugualmente nei due casi per decomposizione del gas H_2S . Questa spiegazione resta però priva di ogni attendibilità sia perchè essa, allorché si passa a precisare il fenomeno anche nelle sue linee principali, non ci dà, per quello che a me sembra nel nostro caso, alcuna possibilità di sviluppo, sia perchè essa ci costringe a trascurare elementi che indiscutibilmente hanno il loro valore per una spiegazione adeguata delle condizioni in cui si potè formare lo zolfo in cristalli. Si può infatti ammettere che il passaggio dall'attività acida a quella basica della solfatara sia stato brusco? Secondo Fouqué e St. Claire Ch. Deville l'emissione di SO_2 e di H_2S corrispondono a differenti stati delle fumarole, sono perciò sempre separate. Ma è anche vero, o per lo meno possibile, che in una solfatara la sorgente di questi gas non sia unica, per cui ciascuna di esse può passare da uno stadio ad un altro in un tempo differente, ed in proposito ricordo la produzione di SO_2 che mi fu dato di riscontrare nella galleria Nord, emissione che ripeto fu molto intensa tanto che non riuscii ad avvicinarmi allo sbocco del gas per raccoglierlo con tubi a vuoto. Ma anche ammettendo che il gas H_2S sia stato emesso soltanto dopo la cessazione dello sviluppo di SO_2 , non posso credere che tutta l'anidride solforosa sia stata fissata dalla reazione con il lapillo e che perciò non ve ne sia rimasta a riempire i vuoti esistenti fra i frammenti del lapillo stesso. Credo perciò che vi siano ragioni sufficienti per ritenere che il deposito di zolfo si ottenne per reazione di doppio scambio fra i gas SO_2 ed

H₂S. Se poi teniamo presente che il lapillo, come già ho detto, dove va assottigliandosi diventa sempre meno alterato e contemporaneamente s'impoverisce di zolfo fino a diventare sterile, possiamo con la suddetta ipotesi meglio spiegarci questa relazione di deposito di zolfo ed alterazione del lapillo, ammettendo appunto un minore afflusso di gas SO₂. In tal caso infatti l'idrogeno solforato, forse anch'esso, per cause analoghe, affluito in minor quantità, non trovò residuo dell'altro gas con cui reagire. Siano stati umidi oppure no i due gas ciò poco interessa sapere perchè l'esperienza di Ilosvay⁽¹⁾ hanno dimostrato che il fenomeno si verifica lo stesso e che anzi lo zolfo nei due casi si deposita in croste cristalline e non con l'aspetto dello zolfo ottenuto per decomposizione dell'idrogeno solforato all'aria.

Intanto mi si potrebbe domandare come mai il tufo siliceo, pur essendo il residuo di una profonda trasformazione, sia sterile di zolfo. La risposta che io trovo è che il tufo siliceo, imbevuto dalle acque che portarono via i solfati, formò una pasta impenetrabile, che poi asciugatasi conservò tale carattere, e a riprova di ciò sta il rinvenimento di croste cristalline nei piani di stratificazione del tufo i quali evidentemente non opposero troppa resistenza alla espansione del gas.

Quanto al lapillo io credo che in base alla precedente discussione sia dimostrato che esso fu soltanto alterato dal gas SO₂ emesso nel periodo acido della solfatarà, perciò il suo imbianchimento è precedente alla formazione solfifera.

Mineralogia. — *Sulla applicabilità dell'analisi isopicnometrica alle rocce aurifere.* Nota ⁽²⁾ di ENRICO CLERICI, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Nell'intraprendere alcune indagini sopra un campione di roccia presunta aurifera, raccolta a Cà Mufolino presso Sassoferrato, io pensavo che se la roccia contenesse oro nativo, oppure in miscela o in combinazione con solfuri, solfosali e composti analoghi, avrei potuto concentrarlo, con la separazione meccanica, nella porzione più pesante e fare agevolmente su questa i vari saggi per la constatazione dell'oro, nonchè dell'argento che si diceva esservi in quantità ancora maggiore dell'oro.

Ma nella porzione più pesante vidi soltanto magnetite e zircone; e il risultato dei saggi per via umida su questa porzione è sulla roccia stessa fu completamente negativo ⁽³⁾.

(1) I ILOSVAJ, *Ueber die Bedingungen der Bildung von gediegenem Schwefel*. «Zeit. f. Krist.», B. X., p. 91.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1928.

(3) CLERICI E., *Sulla presunta roccia aurifera di Sassoferrato*. «Boll. Soc. Geol. Italiana», XLII (1923).

Venni alla conclusione che, qualora fosse confermata la presenza dei due metalli nella roccia, il procedimento microchimico; nelle condizioni in cui avevo operato, non è applicabile ed inoltre che l'oro vi sarebbe in uno stato di diffusione invisibile al microscopio.

Ritorno ora sull'argomento trattando la questione da un punto di vista più ampio, quale è il campo di applicabilità dell'analisi isopicnometrica a rocce aurifere.

Premetto che il prof. Perrier ⁽¹⁾, per spiegare il mio risultato negativo, ha supposto che la roccia abbia un tenore in oro variabile e che il campione esaminato provenisse, per caso, dalla parte sterile; ha anche ricordato che i saggi per via umida talvolta sono in difetto rispetto a quelli per via secca, che una lega a parti eguali di oro e argento è inattaccabile dall'acqua regia ⁽²⁾.

Faccio notare che, ammessa l'esistenza della lega oro argento, essa doveva restare nella porzione più pesante e vedersi meglio dopo l'eliminazione della magnetite.

Ad ogni modo ho potuto procurarmi due altri campioni della stessa roccia, provenienti rispettivamente dalle località Fontana e Colmerone, ambedue dichiarati auriferi. Trattati, in quantità ciascuno di 50 grammi, per via secca col metodo al litargirio e successiva coppellazione, il risultato è stato negativo per ambedue.

Mi fu anche obiettato che, con i tenori asseriti, soltanto per puro caso la separazione meccanica potrebbe far vedere l'oro nativo, e che quando le particelle di oro fossero minutissime resterebbero in sospensione e la separazione sarebbe impossibile.

Fino a qual punto si debba tener conto di queste due obiezioni può essere giudicato dai seguenti esperimenti.

Ho formato una miscela di quarzo puro polverizzato e polvere d'oro ottenuta per precipitazione a caldo di una soluzione di cloruro d'oro con acido ossalico, raccogliendo su filtro e bruciando questo.

Le proporzioni erano tali da corrispondere al tenore di 10 grammi d'oro per tonnellata. Ho fatto la separazione usando il mio liquido al formiato-malonato di tallio, peso specifico 3.43, in apparecchio di media grandezza ⁽³⁾.

La porzione pesante raccolta è stata travasata in vetro d'orologio. Osservata al microscopio, si vede subito che un risultato egualmente ottimo si sarebbe avuto anche se il tenore fosse stato minore e minore la quan-

(1) PERRIER C., *Sulla presenza dell'oro in alcune arenarie di Sassoferrato (Ancona)*, « Boll. Soc. Geol. Italiana », XLIV (1925).

(2) Da apposito esperimento mi risulta che un pezzo di lamina di lega oro argento puri a parti eguali del peso di 480 mg. ha perduto 70 mg. dopo mezz'ora di trattamento in acqua regia.

(3) CLERICI E., *Sulla analisi isopicnometrica delle rocce*, « Nuovi Annali dell'Agricoltura », I, 1921; ved. fig. 5.

tità di sostanza assoggettata alla separazione. Con una quantità pesata di tale miscela addizionata di egual peso di polvere di quarzo, e ben rimescolata, con che il tenore discende a 5 grammi d'oro per tonnellata, la separazione dà risultato analogo.

Ho preparato successivamente altre miscele con tenori d'oro decrescenti ed adoperato un apparecchio più piccolo con 7 ad 8 centimetri cubici di liquido del peso specifico 3.03, e soltanto due grammi di sostanza. La quantità d'oro raccolta, pur essendo diminuita in confronto ai saggi precedenti, è ancora più che sufficiente per un'ottima constatazione anche quando il tenore è di un grammo per tonnellata.

Un'altra prova con un grammo di sostanza al tenore di mezzo grammo per tonnellata mi ha permesso di separare e raccogliere un quantitativo di polvere d'oro che tutto al più avrebbe pesato cinque decimillesimi di milligramma (mg. 0,000.5).

Ho esaminato allo stesso modo un pezzetto di quarzite sicuramente, ma non visibilmente, aurifera di Ravenswood Goldfields, Queensland, Australia, polverizzata e prendendone 2 grammi. Dopo mezz'ora ho raccolto e lavato in vetro d'orologio la parte pesante. Al microscopio, fra molti cristallotti di magnetite e di altri minerali scuri, si vedono distintamente, se illuminate per riflessione, le masserelle d'oro il cui aspetto è così caratteristico che non occorrono prove per darne la conferma.

Nel trattare un campione di sabbia del fiume Oglio, essendo essa relativamente grossolana, ho adoperato liquido al peso specifico 4.19 allo scopo di eliminare subito il maggior numero di minerali pesanti che vi abbondano ⁽¹⁾. Malgrado la maggiore viscosità del liquido, la separazione è avvenuta regolarmente. L'oro si vede nella porzione affondata, costituita da magnetite con poco zirconio e qualche granulo di almandino. Con l'ago da dissezione le particelle d'oro possono essere raggruppate scansando gli altri minerali.

Ad un campione di sabbia bianca, fina, del Soratte ho aggiunto polvere d'oro. Questa ottenni riducendo il cloruro con soluzione ammoniacale di solfato di idrazina, lavando e asciugando in capsula, con la speranza di avere particelle poco agglomerate.

La separazione, con liquido p. sp. 3.09, ha dato un discreto assortimento di minerali pesanti; l'oro a prima vista vi sembra assente; ma arroventando, previa lavatura, su lamina di platino, si riconoscono subito le masserelle d'oro, avendo esse acquistato colore e splendore caratteristici. Le più piccole hanno dimensioni intorno a 10-15 μ .

Per verificare il comportamento di particelle più piccole, poichè esse hanno grande tendenza ad agglomerarsi, quasi addentellandosi fra loro, ad

(1) Però di regola le separazioni si dovrebbero iniziare con liquidi a basso peso specifico usando poi liquidi a peso specifico successivamente più elevato per frazionare le porzioni precipitate.

un poco dello stesso oro, lavato per decantazione, in un bicchierino con acqua ho fatto, rimescolando bene, successive aggiunte del liquido formiato-malonato di tallio molto concentrato. A qualunque peso specifico del liquido l'affondamento dell'oro avviene senza dar luogo a speciali rimarchi.

Ho utilizzato inoltre una polvere d'oro, minutamente cristallina, trovata al fondo di una vecchia soluzione di cloruro. Immessa nell'apparecchio di separazione (liquido p. sp. 3.61) ho constatato che dopo mezz'ora il precipitato conteneva anche particelle dell'ordine di $2-3 \mu$.

Dalla mia conclusione, di sopra ricordata, che nella roccia di Sassoferato l'oro si troverebbe (ben inteso qualora sia dimostrato che vi esista) in uno stato di diffusione invisibile al microscopio, si è passati ad invocare lo stato colloidale e, per altra assimilazione del linguaggio scientifico, le speciali combinazioni complesse nelle quali gli elementi metallici sono mascherati; ma finora nessuna dimostrazione pratica della reale esistenza ne è stata data da coloro che si ritengono scopritori di nuovi giacimenti auriferi e di nuovi procedimenti atti a rendere docile quell'oro che sarebbe ribelle alla constatazione microscopica ed agli ordinari trattamenti chimici.

È stata anche avanzata l'ipotesi che la mica sia quel costituente della roccia di Sassoferato che dia ricetto all'oro. Ma io penso che particelle di oro incluse fra le superfici di sfaldatura dovrebbero esser visibili come sono ben visibili, alla superficie e nell'interno delle miche di molte rocce sedimentarie argillose, le masserelle di solfuro di ferro talvolta in cristalli minutissimi ed in punteggiature, che un trattamento all'acido nitrico asporta completamente: mi sembra lecito dedurre che, analogamente, l'acqua regia asporterebbe, almeno in parte, l'oro anche se presente in masserelle non discernibili al microscopio con modesti ingrandimenti.

In un piccolo cristallizzatore con poca soluzione di cloruro d'oro ho messo verticalmente delle striscioline di mica (moscovite del Canada e di Bodenmais in Baviera e biotite di Ariccia) che ne sono bagnate in basso soltanto per due o tre millimetri. La soluzione salisce nell'interno per capillarità. Seccate le striscioline, le ho collocate allo stesso modo in altro cristallizzatore con poca soluzione ammoniacale di solfato di idrazina. Mano mano che questa soluzione penetra nell'intero, la mica assume colore violaceo sempre più scuro. Sfaldate le lamine esterne ed osservate al microscopio quelle interne, vi si vedono bellissime dendriti d'oro e tinteggiature e nebulosità violacee più o meno scure di oro estremamente suddiviso. L'acqua regia toglie le une e le altre.

Dopo quanto ho esposto confermo le deduzioni che avevo fatte per la roccia di Sassoferato e concludo che l'analisi isopichnometrica, in modo rapido e con poca quantità di sostanza, nei limiti di suddivisione sopraccennati, consente la constatazione dell'oro nativo anche quando il suo tenore corrisponde a mezzo grammo per tonnellata.

Biologia. — *Analisi della curva di assorbimento dell'ossigeno di poltiglie muscolari in funzione della concentrazione degli idrogenioni.* Nota ⁽¹⁾ del dott. M. COMEL, presentata dal Corrisp. C. FOÀ.

Nelle mie ricerche sul ricambio gassoso di poltiglie di tessuti sospese in soluzioni moderatrici a vario pH, avevo potuto concludere che esso è una funzione del pH della miscela, per cui, chiamandolo y ,

$$(1) \quad y = f(\text{pH}).$$

In una ulteriore serie di determinazioni del ricambio gassoso di poltiglie muscolari di rana sospese in soluzioni equilibratrici di fosfati, nelle quali avevo pure tenuto conto del potere regolatore dei tessuti, che spostano il pH delle soluzioni avvicinandolo al proprio, ottenevo, portando sull'asse delle ordinate i valori di y e su quello delle ascisse i valori del pH delle miscele, una curva, dallo studio della quale risultava che per $\text{pH} = 5.3$, y era eguale a zero. Ponendo quindi

$$(2) \quad x = \text{pH} - 5.3$$

avevo calcolata con approssimazione fino alla quarta potenza di x , la curva dell'assorbimento di ossigeno, che risultava espressa dall'equazione

$$(3) \quad y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$$

in cui i parametri a e c avevano segno positivo; i parametri b e d segno negativo. I valori sperimentali si accordavano in modo soddisfacente con quelli calcolati. Ottenuta la curva dell'assorbimento dell'ossigeno, ne ho eseguito l'analisi matematica per comprendere il significato fisiologico della curva; e ne ho riferito altrove ⁽²⁾. L'analisi della curva dava due massimi, per $x = 1.92$ e per $x = 0.44$, un minimo per $x = 0.80$; e due punti di inflessione, per $x = 1.6$ e per $x = 0.67$. Ora, di questi cinque valori della curva quelli che avevano un diretto significato fisiologico erano il massimo per $x = 1.92$, che indicava il punto della massima intensità dell'assorbimento di ossigeno, e i due punti di inflessione, che indicavano, il primo, il punto in cui l'assorbimento di ossigeno tendeva decisamente a decrescere in funzione della diminuzione del pH, il secondo, il punto in cui questo ricambio diminuito tendeva ad annullarsi per l'ulteriore diminuzione del pH.

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1928.

(2) «Soc. It. di Biol. Sper.», Sez. di Milano, seduta d. d. 9 maggio 1928.

Per contro, nè il minimo per $x = 0.80$, nè il secondo massimo per $x = 0.44$ avevano un significato fisiologico; inoltre, il massimo per $x = 1.92$ indicava un valore di alcalinità ($\text{pH} = 7.2$) più accentuato di quanto non avessi constatato sperimentalmente. Lo scopo della presente Nota è di comunicare i dati dell'analisi della curva espressa dall'equazione (3), di cui ho ripetuto il calcolo con approssimazione sino alla quarta potenza di x , sostituendo nel calcolo dei parametri qualche valore sperimentale, alla cui falsità era verosimilmente dovuto l'apparire del secondo massimo e del minimo. I parametri a e c sono positivi, b e d sono negativi. I dati sperimentali si dispongono in modo soddisfacente sulla curva così calcolata. L'equazione (3) esprime che l'assorbimento di ossigeno è funzione del pH ; per cui, tenendo conto dell'equazione (2),

$$(4) \quad y = f(x).$$

Il calcolo dei massimi e minimi dell'equazione (3) è dato da:

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

$$(6) \quad y' = a + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3.$$

Una delle radici dell'equazione di terzo grado dà per il massimo della curva il valore di $x = 1.7$. Che esso sia un massimo si deduce, oltre che dall'esame della curva (v. figura), anche dal calcolo della seconda derivata, y'' , dell'equazione (3), che risulta negativa. La curva non possiede altri massimi o minimi; presenta, invece, due punti d'inflessione, dati da

$$(7) \quad \frac{d \lg \alpha}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

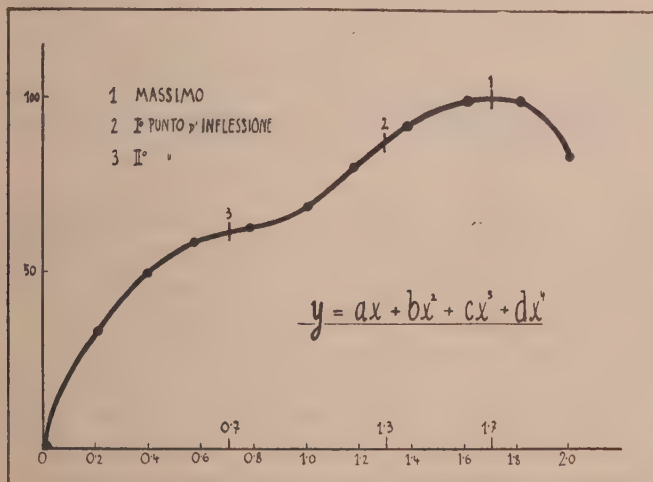
$$(8) \quad y'' = b_2 + c_2x + d_2x^2.$$

Le radici dell'equazione di secondo grado fanno porre il primo punto d'inflessione in immediata vicinanza di $x = 1.3$ il secondo in tutta prossimità di $x = 0.7$.

La curva (v. figura), espressa dall'equazione (3) dà dunque a considerare un massimo e due punti d'inflessione, di cui conviene indurre il significato fisiologico. Il massimo per $x = 1.7$ ($\text{pH} = 7.0$) sta senz'altro ad indicare la massima intensità del ricambio respiratorio, che corrisponde dunque alla neutralità. La discesa della curva ai due lati di $x = 1.7$ corrisponde alla diminuzione dell'assorbimento di ossigeno in funzione della diminuzione del pH da un lato, del suo aumento dall'altro. Il punto d'inflessione per $x = 1.3$ ($\text{pH} = 6.6$) sta a indicare il punto in cui da un ricambio gassoso elevato, si passa a un ricambio via via minore, man mano che la diminuzione del pH allontana la poltiglia dalle condizioni fisiologiche della respirazione. Il secondo punto d'inflessione, per $x = 0.7$ ($\text{pH} = 6.0$), indica

il punto in cui da questo assorbimento di ossigeno mediocrementemente elevato, si passa a un ricambio molto diminuito, e che tende rapidamente ad annullarsi, in funzione dell'ulteriore diminuzione del pH; l'assorbimento di ossigeno è nullo per $x = 0$ ($\text{pH} = 5.3$).

Lo studio analitico della curva dell'assorbimento di ossigeno permette di distinguere, per tal modo, tre zone di ricambio gassoso, delimitate dai due punti d'inflessione della curva: una prima, di ricambio elevato, corrisponde a valori di pH raggruppati intorno al pH della neutralità; essa giunge, dal lato acido, sino a $\text{pH} = 6.6$. Man mano che da questo valore si scende a valori di pH minori, il ricambio presenta una più considerevole diminuzione: la zona compresa tra $\text{pH} = 6.6$ e $\text{pH} = 6.0$ è una zona di ricambio



mediocre, che si compie in condizioni prossime a quelle fisiologiche. Sotto a $\text{pH} = 6.0$ le condizioni sono da esse troppo lontane, e il ricambio tende rapidamente ad annullarsi; questa zona di ricambio molto basso finisce a $\text{pH} = 5.3$ al qual valore è nullo: in vicinanza del loro punto isoelettrico le proteine muscolari cessano di assorbire ossigeno. Queste deduzioni tratte dallo studio della curva, sono in sostanza identiche alle conclusioni che avevo tratte dagli esperimenti sullo scambio gassoso delle poltiglie di tessuti sospese in soluzioni moderatrici a vario pH; dall'esame dei dati sperimentali avevo infatti concluso che il ricambio gassoso, elevato a valori di pH corrispondenti alla neutralità o che di poco se ne allontanano, diminuisce in funzione della diminuzione del pH, per giungere a valori molto bassi per valori molto bassi del pH stesso.

Fisiologia. — *Energia di crescita dello « Sterigmatocistis Nigra ».* Nota ⁽¹⁾ di L. DE CARO, presentata dal Socio F. BOTTAZZI.

La grandezza dell'energia che caratterizza il processo d'accrescimento è stata accuratamente definitiva da Terroine e collaboratori come il rapporto fra la quantità d'energia che l'organismo immagazzina sotto forma di riserve e di tessuti, e la quantità dell'energia metabolizzata.

Questo rapporto esprime soltanto il rendimento energetico bruto dell'energia di crescita, cioè un valore nel quale non si tien conto dell'energia di mantenimento o di conservazione dell'organismo formato, energia legata a processi che, indipendentemente da quelli responsabili dell'accrescimento, si svolgono nell'organismo.

Fra i valori più attendibili di rendimento energetico sono quelli calcolati da Terroine ⁽²⁾ con i dati calorimetrici di Tangl e allievi sullo sviluppo delle uova. E questi valori esprimono un rendimento del 61 % per lo sviluppo delle uova di gallina; dell'87 % per quello delle uova di baco da seta; e uno del 78 %, e anche più, per quello delle uova di *fundulus*.

Calcolando, invece, il rendimento energetico dalle cifre di Rubner, per la crescita dei mammiferi, e d'altra parte, per lo sviluppo dei batteri, Terroine, ottiene dei valori molto più bassi di rendimento energetico. Egli fa risalire queste differenze al fatto che non si è tenuto conto dell'energia legata alla conservazione dell'organismo formato, facendo giustamente osservare che una simile trascuranza importa un errore analogo a quello che si commette quando, volendo calcolare il rendimento energetico d'un orga-

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1928.

(2) TERROINE E. et WURMSER R., *L'Energie de croissance*. I. *Le développement de l'Aspergillus niger*. « Bull. de la Soc. de Chim. Biol. », 4, 1922, p. 519.

nismo durante il lavoro, si stabilisce il rapporto della quantità di lavoro fornito alla quantità totale d'energia consumata dall'organismo, senza sottrarre, da quest'ultima, l'energia di conservazione, quella, cioè, che l'organismo spenderebbe ugualmente, senza compiere alcun lavoro.

E in effetti, nella crescita dei mammiferi, si ottengono valori di rendimento energetico più elevati, quando si tien conto, oltre che dell'energia immagazzinata dall'organismo e di quella totale, metabolizzata durante il periodo di esperienza, anche di quella corrispondente alla conservazione dei tessuti formati e calcolata, in ogni periodo, con la legge della superficie. In queste condizioni, anche per i mammiferi, si hanno cifre che si avvicinano molto a quelle dello sviluppo delle uova (Kellner e Kohler per il bue; Fingering, Kohler e Reinhardt per il maiale) ⁽¹⁾.

La necessità di conoscere con precisione l'energia di conservazione, caso per caso, appare, quindi, evidente, per ottenere il rendimento reale dell'energia di crescita.

Un interessante tentativo, in questo senso, è stato fatto da Terroine e Würmser nelle loro ricerche sul rendimento materiale (coefficiente d'utilizzazione) ed energetico della crescita dell'*Aspergillus niger*. Questi AA. hanno seguito una duplice via per la determinazione dell'energia di mantenimento:

1° Assodato che la crescita, salvo le prime ore di sviluppo, è per l'*Aspergillus* sensibilmente proporzionale all'età della cultura, si dà poter essere espressa dalla formula:

$$p = Kt$$

(dove p è il peso del micelio formato, t , l'età della cultura in ore, e K una costante) gli AA. ammettono che ad ogni momento dello sviluppo il peso del glucosio consumato è somma di due termini; uno, proporzionale alla velocità K di sviluppo e rappresentante la quantità di glucosio, la cui scomparsa è dovuta a formazione di costituenti del micelio; l'altro, proporzionale al peso del micelio già formato, nell'istante considerato, e rappresentante il consumo di mantenimento.

Poichè il consumo di glucosio, nell'istante t è dato da $\frac{dc}{dt} = K(a + bt)$, integrando, (tenendo conto che esso è nullo per $t = 0$) si ha la quantità di glucosio totale, consumata nel tempo t , dall'inizio dello sviluppo, e cioè

$$C = p \left(a + \frac{1}{2} bt \right).$$

(1) Cit. da TERROINE, loc. cit.

Le costanti a e b rappresentano, rispettivamente, il coefficiente trofico (consumo legato all'accrescimento) e il coefficiente di mantenimento. Esse sono state determinate nei limiti massimi della velocità di sviluppo (a pH 1.7 e a pH 1.2) e assumono, rispettivamente, i valori seguenti:

$b = \text{gr. } 0.011 \text{ di glucosio per grammo di micelio e per ora.}$

$a = \text{» } 2.2 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$

2° Determinando la produzione di CO_2 che il micelio presenta in condizioni tali che esso viva senza accrescersi. E gli AA. hanno creduto di realizzare questa condizione trasportando il micelio formato, dal mezzo iniziale in un altro, in cui era sottratto l'azoto e il glucosio. Ma non hanno ottenuto valori costanti sufficienti per dare una media, e ciò perchè durante l'inanizione i processi di combustione vengono modificati, sia qualitativamente, sia quantitativamente.

Non resta quindi agli AA., che calcolare l'energia di conservazione, col primo metodo, e questa energia risulta per l'*Aspergillus* uguale a circa 1.6 — 1.09 Cal. Il rendimento energetico reale risulta, quindi, uguale a 72-73 %, laddove quello brutto corrisponde a un valore alquanto inferiore, cioè 58 %.

Ma questa via, di calcolare l'energia di mantenimento dalla quantità di glucosio consumata, non è certamente la più diretta. Gli AA. stessi, in effetti, non l'adottano nel prosieguo delle loro ricerche, contentandosi di determinare in ogni caso soltanto il rendimento energetico brutto.

Una condizione migliore, invece, tale che un organismo inferiore, un micelio, continui a vivere senza che si accresca, almeno entro certi limiti di tempo, e senza che esso venga a trovarsi in uno stato di inanizione, mi è parso di poter ottenere privando il liquido nutritivo iniziale, nel quale il micelio si è accresciuto fino a un certo punto, del suo normale contenuto in fosfati.

Seminando delle spore di *Sterigmatocistis nigra* sul comune terreno minerale di Czapek, glucosato (al 3 %), privo, però, del suo normale contenuto in fosfati, il micelio non si sviluppa.

Similmente, trasportando un micelio già cresciuto su mezzo con fosfato, in un altro terreno identico al precedente (per contenuto in $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ e glucosio), ma senza fosfati, il micelio continua a vivere ma non si accresce, o solo lentamente e di poco (per tracce di fosfati che nonostante il ripetuto lavaggio restano ad esso aderenti).

La quantità di CO_2 , direttamente misurata, che il micelio sviluppa in queste condizioni, può, quindi, rappresentare un indice del consumo di glucosio, necessario al mantenimento della vita delle cellule già formate.

Nella seguente tabella trovasi indicata la quantità di CO_2 prodotta da miceli di *Sterigmatocistis nigra*, messi nelle condizioni qui sopra dette:

TABELLA I.

Tempo di sviluppo	gr. sost. secca micelio formato nel liquido Czapek normale	CO ₂ emesso su Czapek senza fosfati per grammo-ora di micelio	
		in gr.	in cm ³
72 ore	0.552	0.0157	7.95
»	0.569	0.0172	8.74
»	0.575	0.0171	8.70
»	0.535	0.0168	8.55
media	0.557	0.0167	8.48

Per grammo di micelio secco e per ora, si hanno in media 8.48 cm³ di CO₂. Per trasformare questo valore in calorie, basta adottare il coefficiente termico della combustione degli idrati di carbonio per il CO₂, cioè 0.005 Cal. per cm³. Si ha allora un valore medio di 0.0424 Cal. per grammo-ora.

La quantità di micelio che si forma in funzione del tempo anche qui può esprimersi con la formula di Terroine e Würmser, trovata per l'*Aspergillus*: $p = Kt$, ma qui il valore di K è differente e propriamente esso è in media:

$$K \cdot 10^5 = 704$$

come risulta dal calcolo dei dati raccolti nella seguente tabella:

TABELLA II.

Tempo in ore	Micelio secco in grammi	K. 10 ⁵
30	0.213	710
46	0.347	732
65	0.430	661
72	0.514	713
	media	704

Essendo noto il variare del peso del micelio col tempo, si può calcolare la produzione, dC , di CO_2 nell'istante t :

$$(1) \quad dC = Ksdt + 2 Kstdt$$

e, integrando, la quantità, C , di CO_2 prodotta nel tempo t a partire dall'inizio dello sviluppo, cioè:

$$(2) \quad C = Kst (1 + t)$$

dove $Ks = \frac{K}{2} \cdot \frac{C}{p}$; K = costante di sviluppo = 0.00704; C = acido carbonico per grammo-ora (in calorie); p = peso di micelio dopo 72 ore di sviluppo; t = tempo di sviluppo = 72 ore.

Sostituendo in (2) i valori sperimentali, risultano 1.407 calorie come energia di mantenimento del micelio, durante 72 ore.

Si hanno così tutti i dati per calcolare il rendimento reale dell'energia di crescita dello *Sterigmatocystis nigra*, secondo la formula stabilita da Terroine e Würmser:

$$(3) \quad \frac{U'}{(U_1 - U_2 - U_R + U_E)}$$

dove U' = energia del micelio formato (in calorie)

$U_1 - U_2$ = variazione dell'energia dell'alimento (calorie cedute dalla combustione dell'alimento alla bomba calorimetrica)

U_R = energia residuale (in calorie, del mezzo di cultura, dopo lo sviluppo del micelio)

U_E = energia corrispondente alla conservazione del micelio formato, misurata direttamente in CO_2 e trasformata in calorie.

TABELLA III.

Alimento iniziale calorie $U_1 - U_2$	Residuo calorie U_R	Micelio formato calorie U'	Rendimento energetico brutto $\frac{U'}{(U_1 - U_2) - U_R}$
4.734	0.636	2.392	0.58
»	0.557	2.393	0.57
»	0.436	2.215	0.58
»	0.589	2.446	0.59
media	0.554	2.436	0.58

Sostituendo nella (3) i valori numerici sperimentali, si ha come rendimento energetico reale, $\frac{2.436}{4.734 - (0.554 + 1.707)} = 0.87$.

CONCLUSIONE.

L'energia di conservazione dello *Sterigmatocistis nigra* è misurata direttamente determinando l'acido carbonico che il micelio sviluppa quando è trasportato in liquido nutritizio privo di fosfati. La mancanza di fosfati impedisce un ulteriore accrescimento, o rallenta al massimo il processo di crescita. L'acido carbonico che si sviluppa in queste condizioni, può esprimere, quindi, il consumo di energia inerente alla conservazione dello stato di vita delle cellule formate.

Questa energia necessaria al micelio per mantenersi in vita, da che incomincia a formarsi alla 72^a ora, ascende a 1.407 Calorie.

La conoscenza di questa quantità di energia permette di calcolare il rendimento reale dell'energia di crescita dello *Sterigmatocistis nigra*. Esso ascende a un valore alquanto superiore a quello calcolato, con diverso procedimento da Terroine e Würmser per l'*Aspergillus niger* e raggiunge l'ordine di grandezza del rendimento dell'energia di crescita nello sviluppo delle uova.

N. P.

ERRATA-CORRIGE

Nel fascicolo n. 3-4 (Ferie) a p. 159 per errore tipografico si legge la formula

$$\frac{I - I}{I} \sim \frac{1}{4} \frac{v_{n1}^2}{v_{n1} v_{n2}}$$

invece di

$$\frac{I - I}{I} \sim \frac{1}{4} \frac{v_{21}^2}{v_{n1} v_{n2}}.$$

RENDICONTI.

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1928 (Anno VI).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Geometria. — *Le trasformazioni di Laplace, di Lévy e di Moutard per le ipersuperficie.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. FUBINI.

È ben nota l'importanza delle trasformazioni di Laplace, Lévy e Moutard per le equazioni lineari del 2° ordine di tipo iperbolico

$$(A) \quad z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0.$$

E alla importanza analitica non è certo inferiore l'importanza geometrica: tali trasformazioni, per opera di Darboux, Guichard, Demoulin, Tzitzeica, Eisenhart hanno dato origine alla teoria delle reti e alla creazione di uno dei più notevoli ed ampi capitoli della Geometria Differenziale. Ho cercato di costruire una teoria analoga per la ipersuperficie: le difficoltà relative furono vinte con la introduzione di certe funzioni (le τ , R della presente Nota) e con l'uso delle formole del Ricci relative ai sistemi di congruenze di linee. Cominceremo con l'estendere agli spazi S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni alcune definizioni del Guichard. Diremo che un sistema K di linee o di rette forma una *congruenza* se per ogni punto di S_{n+1} (o di una sua regione) esce una ed una sola linea di K ; dualmente un sistema K di spazi lineari S_{n-1} ad $n-1$ dimensioni sarà detto formare una *congruenza* se ogni iperpiano S_n di S_{n+1} ne contiene uno ed uno solo. In generale una congruenza K di rette possiede n sistemi di sviluppiabili. Se esse interse-

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1928.

cano una ipersuperficie V_n di S_{n+1} in n sistemi di linee a due a due coniugati (dicendo *coniugate* in un punto A di V_n due linee uscenti da A , le cui direzioni sono coniugate rispetto al cono asintotico in A), noi diremo che K è *coniugata* a V_n . Dualmente diremo che una congruenza K di S_{n-1} è *armonica* a V_n , se alle sviluppabili di K corrispondono sistemi di linee coniugati su V_n . La corrispondenza di cui qui si tratta, è quella che ad un punto A di V_n fa corrispondere quello S_{n-1} di K che giace sull'iperpiano S_n tangente in A a V_n ; e chiamiamo *sviluppabili* quei sistemi di $\infty^1 S_{n-1}$, contenuti in K , tali che due consecutivi giacciono in un S_n e quindi si intersecano in un S_{n-2} .

Chiameremo *trasformazione di Laplace-Lévy* di 1^a specie ogni trasformazione che faccia passare dai punti di una V_n ai punti di un'altra ipersuperficie V'_n tale che la congruenza K delle congiungenti punti omologhi sia *coniugata ad entrambe* le V . Diremo che la trasformazione è di 2^a specie se le intersezioni S_{n-1} di due iperpiani tangenti omologhi genera una congruenza K di S_{n-1} *armonica* ad entrambe le V .

Userò le notazioni della *Geometria proiettiva differenziale* mia e di E. Čech (Bologna, Zanichelli), a cui rinvierò sovente nel seguito. E cominciamo subito con l'osservare che per $n+1 > 3$, le sviluppabili di una congruenza K di rette non sempre determinano un sistema coniugato su una falda focale V_n . Infatti, se le u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sono coordinate curvilinee in V_n , se K è generata dalle tangenti alle linee u_i , se le sviluppabili di K segnano sulle V_n le linee coordinate, allora le linee u_i sono *coniugate alle u_i* (per $i \neq 1$), ma le linee u_i, u_j ($1 \neq i \neq j \neq 1$) possono non essere coniugate tra loro. Affinchè $\sigma^{(i)}x + x_n$ sia lo *iesimo* fuoco ($i \neq 1$) di una retta di K , occorre e basta che $\frac{\partial}{\partial u_i} [\sigma^{(i)}x + x_n]$ sia combinazione lineare delle x, x_u ; dal che segue appunto che a_{1i} è (per $i \neq 1$) nullo, ma non già che $a_{ij} = 0$, come si potrebbe provare anche con esempi. Questo fatto costituisce già una profonda differenza tra gli S_3 e gli spazi a più di 3 dimensioni.

Cominciamo dunque dal caso generale di una congruenza K di rette non tangenti ad una V_n , a cui K è *coniugata*. Per i risultati del Cap. XII (loc. cit.) potremo scegliere il fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee x di punto in guisa che la retta generica di K sia quella congiungente il punto x al punto X , ossia sia l'intersezione degli iperpiani ξ ; (essendo ξ le coordinate corrispondenti di iperpiano tangente). Valgono le:

$$(1) \quad X_i = g_i x + \sum l_{ir} a^{rs} x_s = g_i x + \sum (\pi_{ir} + a_{ir} \Omega) a^{rs} x_s = g_i x + \sum \pi_{ir} a^{rs} x_s + \Omega x_i \quad (1)$$

$$(2) \quad \Xi_i = \gamma_i \xi + \sum f_{ir} a^{rs} \xi_s + \Omega \xi_i \quad ; \quad \Omega_i = g_i + \gamma_i \quad ; \quad \sum a^{rs} p_{rs} = \sum a^{rs} \pi_{rs} = 0$$

(1) È posto, come nel caso di $n = 2$, $\Omega = SX \Xi$; è poi $l_{is} = -SX_i \xi_s = SX \xi_{is} = SX (a_{is} \Xi + \pi_{is} \xi) = \pi_{is} + a_{is} \Omega$.

$$(3) \quad X = \frac{1}{n} \sum a^{rs} x_{rs} = \frac{1}{n} \Delta_2 x \quad ; \quad \Xi = \frac{1}{n} \Delta_2 \xi.$$

Sia $y = X + \sigma x$ il punto descrivente la superficie V'_n trasformata, che non sia neanch'essa falda focale di K ; e siano η coordinate del corrispondente iperpiano tangente. Le scriveremo nella forma

$$(4) \quad \eta = \Xi + \rho \xi + \sum q^i \xi_i.$$

Le $S\eta y = S\eta y_i = 0$, caratteristiche dell'iperpiano tangente, danno per le (1):

$$(5) \quad \Omega + \rho + \sigma = 0 \quad ; \quad (g_i + \sigma_i) - (\Omega + \sigma) q_i - \sum \pi_i^r q_r = 0 \quad \left(\pi_i^r = \sum \pi_{is} a^{rs} \right).$$

Se la retta (x, X) è coniugata anche a V' , dovremo poter scegliere un fattore R di proporzionalità tale che essa sia l'intersezione dei piani $(R\eta)_i$ [che tutti contengono il punto y]. Dalle $Sx(R\eta)_i = 0$ si trae $R_i + Rq_i = 0$; cioè $\sum q_i du_i$ dev'essere un differenziale esatto $-dR : R$. In tale ipotesi le (5) diventano, posto $\tau = -\sigma R$:

$$(6) \quad \tau_i = g_i R + \Omega R_i + \sum \pi_r^i R_r,$$

ossia:

$$(7) \quad d\tau = R \sum g_i du_i + \Omega dR + \sum \pi_{r,i}^r R_r du_i.$$

Poichè le (6) si deducono da (1), sostituendo R, τ al posto di x, X si ha la seguente semplice generalizzazione del teorema di Lévy per l'equazione (A) di Laplace. *Per le ipersuperficie una trasformazione di Laplace-Lévy è determinata da una qualsiasi coppia di soluzioni R, τ delle equazioni (1) cui soddisfano le coordinate x di punto della V_n e le corrispondenti X , o, ciò che è lo stesso, da una soluzione R delle condizioni di integrabilità, cui soddisfano le x , dedotte dalle (1) pensate come equazioni nelle X .*

Una soluzione delle (6) si ha pertanto ponendo R uguale ad una delle x e τ uguale alla X corrispondente (solo apparentemente sarebbe più generale la soluzione ottenuta ponendo R uguale ad una combinazione lineare a coefficienti costanti delle x). Questo caso *banale* è da trascurarsi perchè una delle y (o una loro combinazione lineare a coefficienti costanti) si annullerebbe, e la V' si ridurrebbe a un iperpiano. Da (2), (4), (5) e dalla $R_i + Rq_i = 0$ si trae che le $(R\eta)_i$ sono combinazioni lineari omogenee delle ξ_i , come si poteva prevedere osservando che, per ipotesi, gli iperpiani $(R\eta)_i$ passano per la retta (x, X) , in cui si intersecano gli iperpiani ξ_i . Si trova pure:

$$(8) \quad y_i = -\tau \bar{x}_i + R (\Omega \bar{x}_i + \sum \pi_i^r \bar{x}_r) \quad (\text{ove è } \bar{x} = x : R).$$

Cioè le derivate delle coordinate omogenee y di un punto di V' sono combinazioni lineari omogenee delle derivate delle coordinate omogenee \bar{x} di un punto di V . Cioè lo S_{n-2} (cui appartengono i punti y_i, \bar{x}_i) intersezione dei due iperpiani tangenti a V, V' in punti omologhi genera una congruenza armonica ad entrambe le V, V' . Cioè, se V, V' sono trasformate l'una dell'altra mediante una trasformazione di prima specie, sono anche trasformate di seconda specie.

Geometria. — Ancora sulle trasformazioni di Laplace, Lez e Montard per le ipersuperficie. Nota del Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — Sulla determinazione quantitativa spettroscopica di piccole quantità di stronzio, di bario, e di cesio nei minerali, nelle rocce, nelle acque minerali, ecc. ⁽¹⁾ Nota ⁽²⁾ del Socio F. ZAMBONINI e del dott. V. CAGLIOTI.

La determinazione degli elementi presenti in tenui quantità nei minerali, nelle rocce e nelle acque minerali possiede, come è ovvio, una grande importanza pratica, ma interessa grandemente anche dal punto di vista scientifico. Si deve appunto alle ricerche eseguite in questo ordine di idee, se è stato possibile, negli ultimi decenni, il giungere ad una veduta di insieme intorno alla distribuzione degli elementi nella litosfera e, soprattutto, alle loro associazioni. Molti dei risultati così conseguiti hanno avuto, di recente, una spiegazione, grazie al progredire degli studi intorno alle strutture degli atomi delle sostanze cristalline. A loro volta, queste più recenti indagini rendono necessarie ulteriori ricerche sperimentali intorno alla diffusione di certi elementi. Benchè non ve ne sia, certamente, alcun bisogno, pure, per dare un'idea delle conseguenze alle quali porta il trascurare la ricerca ed il dosaggio degli elementi subordinati (i costituenti minori dei petrografi americani), basterà ricordare quanto è accaduto per il germanio. Questo elemento, che così bene risponde, per le sue proprietà, a quelle divinate da Mendeleev per il suo ekasilicio, avrebbe dovuto avere una certa diffusione nella litosfera, come sostituito del silicio, o di altri elementi tetravalenti, quali il titanio e lo zirconio, così come avviene anche allo stagno, piccole quantità del quale furono spesso osservate nei silicati. Sembrava, invece, che il germanio si trovasse, nella litosfera a noi accessibile, soltanto come

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1928.

solfosale, senza alcuna relazione, perciò, col silicio. Invece, W. M. Goldschmidt ⁽¹⁾ ha mostrato di recente, che GeO_2 è trigonale o pseudotrigonale, vicinissimo al quarzo, e che il germanio in natura non deve rinvenirsi soltanto come alluvio, ma anche quale sostituyente del silicio nei composti ossigenati, sicchè la sua relativa scarsenza potrebbe essere solo apparente, e dovuta ad un fenomeno di mascheramento del germanio da parte del silicio.

E che, effettivamente, il germanio sia meno raro di quanto si credeva, risulta dalle indagini di J. H. Müller ⁽²⁾, che ha trovato questo elemento nelle acque provenienti da una miniera.

Se, talvolta, basta lo stabilire la presenza di certi elementi in minerali, in rocce od in acque minerali per giungere a conclusioni di un certo interesse, più spesso è necessario eseguire anche determinazioni quantitative.

Così, per esempio, soltanto le numerose analisi eseguite da W. F. Hillebrand e dagli altri chimici del Laboratorio Chimico dell'U. S. Geological Survey hanno permesso a H. S. Washington di dedurre che il bario si trova soprattutto in rocce ricche in potassio, conclusione che fu, poi, spiegata scientificamente da uno di noi.

La necessità, poi, di non limitarsi a constatare spettroscopicamente la presenza del rubidio e del cesio, ma di procedere, invece, a determinazioni quantitative, risulta chiara dalle indagini di Vernadsky ⁽³⁾ il quale ha dimostrato, insieme a Neniadkiewicz, che un minerale notissimo e più volte analizzato, come l'amazonite dei Monti d'Ilmeny, contiene 3.12 % Rb_2O , e da quelle eseguite da uno di noi con L. Coniglio ⁽⁴⁾, dalle quali è risultato che certi miscugli di sublimazioni saline vesuviane contenevano quantità molto considerevoli di cesio.

Per tutte queste ricerche, però, è necessario poter disporre di metodi sicuri e rapidi.

Ora, il metodo comunemente usato da W. F. Hillebrand ⁽⁵⁾ per la determinazione del bario e dello stronzio nelle rocce è abbastanza lungo, e si deve riconoscere che, quando si tratta di non più di 0.1 % e magari anche meno, di BaO e di SrO , perchè i numeri ottenuti sieno attendibili occorre una perizia non comune. Noi abbiamo cercato, perciò, di vedere se non fosse possibile di eseguire la determinazione quantitativa dello stronzio e del bario mediante lo spettroscopio, in modo analogo a quello in uso da lungo tempo per il litio, soprattutto nelle acque minerali, e che consiste, come è noto, nello stabilire a quale diluizione la riga rossa caratteristica

(1) « *Naturwissenschaften* », 14, 295 (1926).

(2) « *Industrial and Engineering Chemistry* », 16, 604 (1925).

(3) « *Bull. Soc. franç. minér.* », XXXVI, décembre 1923.

(4) F. ZAMBONINI e L. CONIGLIO, « *Rend. R. Acc. Lincei* », (5) 3, 1° sem., 521, (1920).

(5) *The Analysis of Silicate and Carbonate Rocks*.

dello spettro del litio scompare nella soluzione a tenore incognito ed in una titolata di cloruro di litio.

Col nostro tentativo non pretendiamo, certo, di proporre delle novità, ma semplicemente di richiamare l'attenzione su un mezzo assai semplice di determinare piccole quantità di stronzio e di bario⁽¹⁾, mezzo del quale noi, dopo qualche anno di pratica applicazione nel nostro Laboratorio, non possiamo che dichiararci molto soddisfatti.

C. Porlezza e A. Donati⁽²⁾ hanno eseguito il dosaggio spettrografico del bario nell'acqua di Salsomaggiore.

Di recente, J. Meunier⁽³⁾ ha proposto di dosare lo stronzio spettrograficamente, fondandosi sulla intensità delle righe di spettri dati da miscele di acetato di stronzio e ossido ferrico e quando già il presente lavoro era scritto abbiamo veduto un lavoro di K. Hukuda⁽⁴⁾ il quale ha fatto conoscere un metodo semplice per l'analisi spettrale *semi-quantitativa* del calcio, dello stronzio, del bario e del litio, consistente nell'osservare soluzioni di sali dei metalli in questione folgorate in uno speciale fulguratore, con l'anodo nella soluzione. Nelle nostre esperienze si sono adoperati sempre dei fili di platino dello spessore di 0.1 mm.: il raggio dell'occhietto formato col filo si manteneva sempre sui 4 mm. Le burette adoperate, sempre controllate, avevano la scala divisa in ventesimi di centimetro cubo.

Per il bario ci siamo riferiti alla scomparsa ovvero alla ricomparsa della linea $\lambda = 553.5 \mu\mu$. Prendendo 0.25 cc. di una soluzione di BaCl_2 corrispondente a 0.0004059 BaO ⁽⁵⁾ per centimetro cubo, noi abbiamo trovato che la linea in questione si vedeva ancora bene dopo l'aggiunta di 9 cc. di acqua, era pallidissima quando 1 cc. di acqua erano diventati 10, ed era scomparsa con 11 cc. di acqua addizionata. Il limite di sensibilità risulta, perciò, di 0.00009022 per cc.

Questo stesso valore si è ottenuto aggiungendo ad acqua cloruro di bario fino all'apparizione della linea $\lambda = 553.5 \mu\mu$. Abbiamo verificato, che la presenza del calcio e dello stronzio non esercita influenza sulla scomparsa o sulla apparizione della riga in questione del bario. s'intende a parità di

(1) E. H. RUSSELL e G. PETER (B. 46, 5140 (1903)) hanno costruito un piccolo apparecchio, col quale è possibile ottenere lo spettro d'arco, senza le linee dell'aria, dei metalli alcalino-terrosi, adoperando anche soltanto 1 cc. di soluzione. Il metodo, certamente elegante, è stato proposto per il riconoscimento *qualitativo* dei detti metalli, e non pare sia entrato nell'uso, benché molto sensibile.

(2) «Annali Chim. appl.», 15, 535 (1925).

(3) «C. R.», 242, 1160 (1926) 1° semestre. Con questo metodo, A. DASSALET e J. MEUNIER («C. R.», 242, 609 (1926)) hanno determinato il contenuto in stronzio dell'acqua di mare.

(4) «Bull. Chem. Soc. Japan.», 2, 115 (1927).

(5) Abbiamo espresso la composizione di tutte le soluzioni di confronto in ossidi perché è questa la forma sotto la quale si plasmano comunemente i risultati delle analisi di minerali o di rocce.

concentrazione di quest'ultimo. Aggiungendo a 5.25 cc. della soluzione di BaCl_2 dieci centimetri cubici di acqua, ovvero 5 cc. di una soluzione di CaCl_2 , contenente per cc. tanto calcio da corrispondere a 0.0243 di CaO , e 5 cc. di una soluzione di SrCl_2 il cui tenore equivale a 0.0000792 SrO per cc., la riga $\lambda = 553.5 \text{ m}\mu$ compare in tutti e due i casi ugualmente pallidissima. Se, invece, 0.25 cc. di BaCl_2 vengono diluiti con 11 cc. di acqua, la riga non si vede, e non appare nemmeno se, invece dall'acqua, si aggiungono 5 cc. della soluzione di CaCl_2 e 6 cc. di quella di SrCl_2 .

Per lo stronzio abbiamo scelto la riga rossa $\lambda = 662.7 \text{ m}\mu$. La soluzione impiegata di SrCl_2 corrispondeva a 0.0000792 SrO per cc.

Prendendo 1 cc. di questa soluzione, si aveva che, dopo diluizione con 54 cc. di acqua, la riga $\lambda = 662.7 \text{ m}\mu$ si vedeva ancora, ma pallidissima: scompariva con 55 cc. di acqua. Il limite di sensibilità per cc. è, perciò, 0.00001235. Risultati concordanti si sono avuti, prendendo mezzo centimetro cubo di soluzione di SrCl_2 . Infatti, con 25 cc. H_2O la linea era ben visibile, con 27 cc. appena percettibile, con 27.5 cc. non compariva.

Il bario non influisce, secondo le nostre osservazioni, sul dosaggio spettroscopico dello stronzio. Non così il calcio, il quale, quando è in quantità rilevante, rende meno esatta la determinazione. Così, per esempio, aggiungendo 1.05 cc. della soluzione solita di SrCl_2 a 30 cc. di soluzione di CaCl_2 addizionati di 25 cc. di acqua, la linea dello stronzio con $\lambda = 662.7 \text{ m}\mu$, non si vede, mentre compare con 1.10 cc. di soluzione di cloruro di stronzio.

L'errore che si commetterebbe non è grave, ma nemmeno strascurabile. Va, però, notato che, qualora la quantità del calcio risulti così grande rispetto a quella di stronzio come nella esperienza ora riferita (0.7290 CaO per 0.00008 di SrO) occorre, prima di procedere alla determinazione spettroscopica dello stronzio, eliminare una buona parte del calcio. S'intende, poi, che, così come si fa nel caso del litio, la soluzione titolata di stronzio deve contenere quantità di calcio, ecc., approssimativamente uguali a quelle che si trovano nella sostanza in esame.

Per dare un'idea della precisione che si può raggiungere nel dosaggio quantitativo dello stronzio, operando come si è detto, diremo che di recente il prof. Francesco Stella Starrabba, di Catania, ha eseguito un'analisi assai accurata della anortite dei Monti della Ciacca (Etna), ed ha trovato che essi contengono, cosa del tutto insolita, una quantità considerevole di stronzio (0.13 % SrO) mentre il bario sembra mancare completamente. Data l'importanza dell'osservazione dello Stella Starrabba abbiamo voluto controllare la sua determinazione gravimetrica col metodo spettroscopico. Nei frammentini limpidi di cristalli che lo Stella ci ha inviato, noi abbiamo trovato $\text{SrO} = 0.15 \%$. L'accordo fra il nostro valore e quello di Stella è più che soddisfacente: corrisponde, infatti, ad una differenza di tre decimi di milli-

grammo nel peso di SrSO_4 che si otterrebbe nei due casi, partendo da un grammo di anortite.

Dobbiamo soggiungere che per la determinazione quantitativa spettroscopica del bario e dello stronzio è essenziale l'assenza di acidi liberi.

Per quel che riguarda il cesio, noi abbiamo trovato che 1 cc. della nostra soluzione di CsCl , contenente tanto cesio da corrispondere a 0.0001147 Cs_2O , dopo addizione di 7.5 cc. di acqua lascia ancora vedere la linea $\lambda = 455.5 \text{ m}\mu$, che diviene molto pallida se l'acqua sale a 8 cc., e scompare con 8.5 cc. di acqua. Aggiungendo a 8.5 cc. di acqua cc. 0.75, 0.80, 0.85, 0.95 della soluzione di CsCl la riga dello spettro su indicata non ricompare ancora: con 1 cc. si vede soltanto dopo due immersioni nella fiamma dell'occhiello di platino, mentre con cc. 1.05 appare subito. Il limite di sensibilità risulta, perciò, di 0.0000101 Cs_2O .

Nè rubidio, nè litio influiscono sulla scomparsa o sull'apparizione della linea in questione dello spettro del cesio: così, per esempio, aggiungendo ad un cc. della solita soluzione di CsCl , cc. 0.5, 5, 6, 7, 8 di una soluzione di RbCl , con un tenore in Rb corrispondente a 0.0002849 Rb_2O per cc., la linea del cesio compare ancora, per non apparire più quando si è saliti a 8.5 cc. di addizione della soluzione di RbCl . Viceversa, se a 8.5 cc. di quest'ultima soluzione si aggiunge CsCl , soltanto con 1.05 cc. di CsCl appare la linea $\lambda = 455.5 \text{ m}\mu$.

Viceversa il potassio esercita una influenza notevolissima, sicchè, volendo dosare il cesio spettroscopicamente, bisogna operare sempre con soluzioni che contengono quantità di KCl approssimativamente uguali a quelle del campione di analisi. Se il potassio fosse, poi, in grandissima prevalenza sul cesio, occorre procedere preliminarmente ad un arricchimento di quest'ultimo, perchè potrebbero anche non apparire addirittura le righe del cesio. Tutto ciò risulta assai bene dalle esperienze seguenti, che riportiamo come esempi tra le molte eseguite.

Soluzione di CsCl	1 cc.	(0.0001147 Cs_2O)
»	» KCl 0.5 cc.	(0.00325 K_2O)
H_2O	3.5 cc.	La solita linea si vede appena.
H_2O	4 cc.	» » » è scomparsa.

(senza KCl si sarebbero dovuti aggiungere 8.5 cc. di acqua).

	H_2O	4 cc.
Soluzione di	KCl	0.5 cc.
»	CsCl	1.0 cc. La linea non si vede ancora.
»	CsCl	1.05 cc. » » riappare.

Soluzione di CsCl	1 cc.	(0.0001147 Cs_2O)
»	KCl	1 cc. (0.0065 K_2O)

La linea del cesio non si vede.

Nel caso della determinazione spettroscopica del cesio in presenza del potassio, noi abbiamo potuto constatare che, anche quando il cesio si trova in quantità abbastanza considerevoli, è ancora possibile giungere a delle determinazioni approssimative. In certi materiali vesuviani delle fumarole, che contengono 7.78 % Cs, col metodo spettroscopico si è trovato, invece, un valore un po' più elevato, ma sempre assai soddisfacente, e, cioè, 8.1 % Cs. Ci sembra, perciò, di poter sicuramente raccomandare il metodo spettroscopico per la determinazione anche di quantità di cesio (misto a potassio), che non eccedono il 10 %, con la certezza di pervenire a risultati non certo inferiori a quelli che possono ottenersi, con un impiego di tempo molto più considerevole, con i metodi gravimetrici finora in uso.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sopra le normali principali (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano.* Nota ⁽¹⁾ di G. ALIPRANDI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Sia $f = f(t, u_1, u_2)$ l'equazione di una superficie V_2 nello spazio hilbertiano. Se f_{rs} sono le derivate seconde covarianti di f rispetto ad u_r ed a u_s , i punti del cono geodetico sono dati, al variare di λ_r, λ_s , da ⁽²⁾

$$(1) \quad f + \sum_{r,s}^2 f_{rs} \lambda_r \lambda_s.$$

In una sua Memoria ⁽³⁾, il prof. Vitali dimostra che per una V_2 nello spazio hilbertiano il cui σ_2 ⁽⁴⁾ abbia 5 dimensioni, esiste in σ_2 (almeno) una terna di parametri normali X, Y, Z , ortogonali fra loro e perpendicolari a V_2 (che egli chiama *terna degli assi principali di V_2*), per la quale, se

$$(2) \quad x_{rs} = \int_g X f_{rs} dt \quad ; \quad y_{rs} = \int_g Y f_{rs} dt \quad ; \quad z_{rs} = \int_g Z f_{rs} dt \quad (r, s = 1, 2)$$

sono i derivati covarianti associati alla terna, si ha

$$(3) \quad (x, y) = (y, z) = (z, x) = 0$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1928.

(2) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*, «Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ad arti». Venezia, 1927-1928, t. LXXXVII, parte II, pp. 349-428; p. 426.

(3) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*, «Annales de la Société polonaise de mathématique», t. VII, année 1928, pp. 43-67, Kraków.

(4) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*, loc. cit., p. 395.

dove

$$(4) \quad (x, y) = x_{11} y_{22} - 2 x_{12} y_{12} + x_{22} y_{11}$$

e analoghe, e che le tre direzioni X, Y, Z formano un triedro trirettangolo autopolare rispetto al cono geodetico (che nel caso nostro è un cono quadrico in un S_3). Cosicché un triedro principale si può definire come un triedro autopolare del cono geodetico.

In questa Nota mi propongo di ritrovare alcuni dei risultati del Vitali, partendo da quest'ultima definizione.

2. Se con X, Y, Z , denotiamo una qualunque terna ortogonale situata nel σ_2 e perpendicolare a V_2 , si ha

$$(5) \quad f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y + \tilde{z}_{rs} Z$$

con il determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{22} \\ y_{11} & y_{12} & y_{22} \\ \tilde{z}_{11} & \tilde{z}_{12} & \tilde{z}_{22} \end{vmatrix}$$

diverso da zero, per essere, per ipotesi, il σ_2 a 5 dimensioni.

Sostituendo le (5) nella (1), denotando con x, y, \tilde{z} , le coordinate di un punto del cono (1) rispetto ad X, Y, Z , si ha

$$(6) \quad \begin{cases} x = x_{11} \lambda_1^2 + 2 x_{12} \lambda_1 \lambda_2 + x_{22} \lambda_2^2 \\ y = y_{11} \lambda_1^2 + 2 y_{12} \lambda_1 \lambda_2 + y_{22} \lambda_2^2 \\ \tilde{z} = \tilde{z}_{11} \lambda_1^2 + 2 \tilde{z}_{12} \lambda_1 \lambda_2 + \tilde{z}_{22} \lambda_2^2. \end{cases}$$

Denotiamo con X^{rs} il reciproco di x_{rs} in D , e con \bar{D} il determinante dei reciproci; è noto che $D \cdot \bar{D} = 1$; per un teorema sui determinanti complementari⁽¹⁾, si hanno le relazioni:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} X^{11} & X^{12} \\ Y^{11} & Y^{12} \end{vmatrix} = \tilde{z}_{22} : D \quad ; \quad \begin{vmatrix} X^{11} & X^{22} \\ Y^{11} & Y^{22} \end{vmatrix} = -\tilde{z}_{12} : D \quad ; \quad \begin{vmatrix} X^{12} & X^{22} \\ Y^{12} & Y^{22} \end{vmatrix} = \tilde{z}_{11} : D$$

e analoghe.

Moltiplichiamo ordinatamente le (6) per X^{ij}, Y^{ij}, Z^{ij} e sommiamo. Allora facendo percorrere alla coppia ij i valori 11, 12, 22, si ha

$$(8) \quad \begin{cases} xX^{11} + yY^{11} + \tilde{z}Z^{11} = \lambda_1^2 \\ xX^{12} + yY^{12} + \tilde{z}Z^{12} = 2\lambda_1 \lambda_2 \\ xX^{22} + yY^{22} + \tilde{z}Z^{22} = \lambda_2^2. \end{cases}$$

(1) E. PASCAL, *I determinanti*, 2ª edizione, Milano, Hoepli, 1923, p. 52.

Eliminando tra le (8) i parametri λ_1, λ_2 si ha:

$$(9) \quad 4 \{ xX^{11} + yY^{11} + zZ^{11} \} \cdot \{ xX^{22} + yY^{22} + zZ^{22} \} - \\ - \{ xX^{12} + yY^{12} + zZ^{12} \}^2 = 0.$$

Posto

$$(10) \quad [X, Y] = 2X^{11}Y^{22} - X^{12}Y^{12} + 2X^{22}Y^{11}$$

e, in particolare,

$$(11) \quad [X, X] = 2X^{11}X^{22} - X^{12}X^{12} + 2X^{22}X^{11} = 4X^{11}X^{22} - (X^{12})^2$$

e sviluppando la (9), tenendo presenti (10) e (11), si ha

$$(12) \quad x^2[X, X] + y^2[Y, Y] + z^2[Z, Z] + 2xy[X, Y] + \\ + 2xz[X, Z] + 2yz[Y, Z] = 0.$$

3. Supponiamo ora che la terna X, Y, Z , formi un triedro ortogonale autopolare; l'equazione del cono si deve ridurre ai soli termini contenenti i quadrati ⁽¹⁾, dovrà dunque essere

$$(13) \quad [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

In particolare

$$(14) \quad \begin{cases} 2X^{11}Y^{22} - X^{12}Y^{12} + 2X^{22}Y^{11} = 0 \\ 2X^{11}Z^{22} - X^{12}Z^{12} + 2X^{22}Z^{11} = 0, \end{cases}$$

cioè X^{11}, X^{12}, X^{22} sono proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} 2Y^{22} & -Y^{12} & 2Y^{11} \\ 2Z^{22} & -Z^{12} & 2Z^{11} \end{vmatrix}$$

ossia, per le (7), a $x_{22}, -2x_{12}, x_{11}$. Dalle quali e analoghe per y e per z , si deduce

$$(15) \quad [X, Y] = \zeta \cdot (x, y) \quad ; \quad [Y, Z] = \xi \cdot (y, z) \quad ; \quad [Z, X] = \eta \cdot (z, x)$$

dove ξ, η, ζ sono fattori diversi da zero, ed allora le (13) diventano le condizioni (3), imposte da Vitali perchè la terna X, Y, Z sia principale.

4. Sempre supponendo che la terna X, Y, Z , formi un triedro ortogonale autopolare del cono, la (11) e le (14) formano un sistema di equazioni lineari nelle X^{11}, X^{12}, X^{22} che, risoluto rispetto a queste incognite, danno

$$X^{11} = \frac{x_{22} \cdot [X, X]}{2} \quad ; \quad X^{12} = -x_{12} \cdot [X, X] \quad ; \quad X^{22} = \frac{x_{11} \cdot [X, X]}{2}$$

(1) L. BERZOLARI, *Geometria analitica. II. Curve e superficie del secondo ordine*, Milano, Hoepli, 1916, p. 325.

e quindi, per la (11) e per la (4)

$$[X, X] = \frac{[X, X]^2 \cdot (x, x)}{2}.$$

La $[X, X]$ non può essere zero. Non possono essere zero tutte le X^{rs} perchè risulterebbe $\bar{D} = 0$, ed allora il sistema della (11) e delle (14) sarebbe un sistema di equazioni lineari omogenee nelle X^{rs} con soluzioni diverse da zero, e quindi dovrebbe avere eguale a zero il determinante, cioè sarebbe di nuovo $\bar{D} = 0$, il che è manifestamente assurdo. Allora

$$(16) \quad [X, X] = \frac{2}{(x, x)},$$

e, sostituendo nella (12) la (16) e analoghe per $[Y, Y], [Z, Z]$, tenendo presente le (13), si ha

$$\frac{x^2}{(x, x)} + \frac{y^2}{(y, y)} + \frac{z^2}{(z, z)} = 0$$

che è l'equazione del cono riferita alla terna principale nella forma trovata dal Vitali.

Matematica. — *Sugli esponenziali delle matrici di secondo ordine e loro applicazione alla teoria dei gruppi.* Nota⁽¹⁾ di SILVIA MARTIS in BIDDAU, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

1. Prendo riferimento a una formola generale che il prof. L. Fantappiè ha dato⁽²⁾, in accordo con la teoria generale del prof. G. Giorgi sulle funzioni delle matrici⁽³⁾, per calcolare gli elementi di una funzione analitica $f(\Phi)$ di una matrice quadrata Φ di ordine n . Questa formola, come quelle di Sylvester e di Cartan implica la risoluzione dell'equazione fondamentale annessa alla matrice, e quindi esige l'intervento di irrazionalità algebriche, che possono complicare i calcoli grandemente.

D'altra parte il prof. Giorgi ha insistito sull'interesse che si avrebbe a ricavare formole di calcolo dirette, esenti da dette irrazionalità, e ciò, almeno nel caso in cui $f(\)$ sia un simbolo di funzione completamente uniforme, dovrebbe essere teoricamente possibile. Le difficoltà di calcolo per raggiungere questo desiderato si presentano gravissime.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1928.

(2) L. FANTAPPIÈ, *Le calcul des matrices*, « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences », t. 186, p. 619, séance du 5 mars 1928.

(3) G. GIORGI, *Sulle funzioni delle matrici*, questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a (febbraio 1928), pp. 178-184.

Mi propongo di considerare un caso che è relativamente semplice, e molto importante per le applicazioni: quello della funzione esponenziale $e^{t\Phi}$ di una Φ di secondo ordine. Posto

$$(1) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$$

e

$$(2) \quad \Psi = e^{t\Phi} = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix}$$

mostrerò come, con una trasformazione delle formole conosciute, si possa effettivamente arrivare ad esprimere le ψ_{rs} in funzione delle φ_{rs} con intervento di simbolo di funzioni intere solamente.

2. Indicando con 2θ e con δ gli invarianti di Φ , scrivo l'equazione fondamentale nella forma

$$(3) \quad D(\rho) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} - \rho & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - 2\theta\rho + \delta = 0.$$

Allora, posto

$$(4) \quad R = \text{discriminante della (3)} = \frac{(\varphi_{11} - \varphi_{22})^2 - 4\varphi_{12}\varphi_{21}}{4}$$

le due radici dell'equazione fondamentale si scrivono

$$(5) \quad \rho_1 = \theta + \sqrt{R} \quad \rho_2 = \theta - \sqrt{R}$$

e si ha

$$(6) \quad \rho_1 - \rho_2 = 2\sqrt{R}.$$

Nel caso che queste radici siano distinte vale allora la seguente formola⁽¹⁾

$$(7) \quad e^{t\Phi} = \begin{vmatrix} \frac{\rho_1 e^{t\rho_1} - \rho_2 e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} - \varphi_{22} \frac{e^{t\rho_1} - e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} & \varphi_{12} \frac{e^{t\rho_1} - e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} \\ \varphi_{21} \frac{e^{t\rho_1} - e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} & \frac{\rho_1 e^{t\rho_1} - \rho_2 e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} - \varphi_{11} \frac{e^{t\rho_1} - e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} \end{vmatrix}$$

e nel caso di radici coincidenti $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, la medesima si riduce alla formola limite

$$(8) \quad e^{t\Phi} = \begin{vmatrix} e^{t\rho} + (\rho - \varphi_{22}) te^{t\rho} & \varphi_{12} te^{t\rho} \\ \varphi_{21} te^{t\rho} & e^{t\rho} + (\rho - \varphi_{11}) te^{t\rho} \end{vmatrix}.$$

(1) Questa formola, che si deduce come caso particolare da quella del prof. FANTAPPIÈ, è stata già data, sotto forma alquanto diversa, da ED. WEYR (V. « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences », vol. 98, pp. 1320-1323, séance du 26 mai 1884). L'espressione data dalla dott. E. PORCU TORTRINI (V. questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6ª, I sem., fasc. 3, febbraio 1928) conduce allo stesso risultato.

In quest'ultimo caso il risultato si ottiene immediatamente, poichè, essendo allora $R = 0$, si ha

$$(9) \quad \rho = \theta = \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}$$

e quindi

$$(10) \quad \begin{cases} \psi_{11} = e^{t \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}} + \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2} t e^{t \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}} \\ \psi_{12} = \varphi_{12} t e^{t \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}} \\ \psi_{21} = \varphi_{21} t e^{t \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}} \\ \psi_{22} = e^{t \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}} - \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2} t e^{t \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}} \end{cases}$$

dove le ψ_{rs} vengono espresse per mezzo delle φ_{rs} , assoggettate semplicemente a funzioni esponenziali.

3. Veniamo al caso delle radici distinte. L'espressione che ha per coefficienti φ_{12} , φ_{21} nella (7) diventa

$$(11) \quad \frac{e^{t\rho_1} - e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} = e^{t\theta} \frac{e^{t\sqrt{R}} - e^{-t\sqrt{R}}}{2\sqrt{R}} = \frac{e^{t\theta}}{\sqrt{R}} \operatorname{Senh} t\sqrt{R}.$$

Qui la funzione multiforme \sqrt{R} entra solo formalmente. Basta infatti considerare la funzione

$$(12) \quad M(\chi) = \frac{\operatorname{Senh} \sqrt{\chi}}{\sqrt{\chi}} = 1 + \frac{\chi}{3!} + \frac{\chi^2}{5!} + \dots + \frac{\chi^n}{(2n+1)!} + \dots$$

la quale manifestamente è una trascendente intera, per scrivere:

$$(13) \quad \frac{e^{t\rho_1} - e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} = t e^{t\theta} M(t^2 R)$$

e così due degli elementi della matrice $e^{t\Phi}$ restano espressi mediante sole funzioni intere delle φ_{rs} .

Per trasformare similmente l'espressione degli altri elementi consideriamo quest'altro simbolo di trascendente intera

$$(14) \quad N(\chi) = \operatorname{Cosh} \sqrt{\chi} = 1 + \frac{\chi}{2!} + \frac{\chi^2}{4!} + \frac{\chi^3}{6!} + \dots$$

Osserviamo allora che, indicando con $E(t)$ l'espressione che compare a secondo membro nella (13), e tenendo conto delle (5) e (6), si ha

$$(15) \quad \frac{\rho_1 e^{t\rho_1} - \rho_2 e^{t\rho_2}}{\rho_1 - \rho_2} = E'(t) = t\theta M(t^2 R) + e^{t\theta} N(t^2 R)$$

e nel primo e quarto elemento di $e^{t\Phi}$ non intervengono altre espressioni che la (16) e questa ultima scritta.

Per cui, riassumendo, la matrice $e^{t\Phi}$ risulta così espressa

$$(16) \quad e^{t\Phi} = \begin{vmatrix} E'(t) + \varphi_{22} E(t) & \varphi_{12} E(t) \\ \varphi_{21} E(t) & E'(t) - \varphi_{11} E(t) \end{vmatrix}$$

col solo intervento di funzioni intere, e quindi uniformi, delle φ_{rs} , e senza dipendere dalle radici dell'equazione fondamentale, come appunto volevasi ottenere.

4. Ora mostrerò un'applicazione alla teoria dei gruppi di trasformazioni. Consideriamo le due matrici $e^{t\Phi}$, $e^{s\Phi}$, ottenute in corrispondenza a due particolari valori del parametro t . Poichè in generale, per effettuare i calcoli sulle matrici $f(\Phi)$ si può operare coi metodi dell'ordinaria analisi come se Φ fosse il simbolo di una quantità ordinaria, vale la formola

$$(17) \quad e^{t\Phi} e^{s\Phi} = e^{(t+s)\Phi}$$

cioè il prodotto di due qualunque trasformazioni del tipo $e^{t\Phi}$ dà ancora una trasformazione dello stesso tipo. L'insieme delle trasformazioni $e^{t\Phi}$ forma quindi un gruppo, e più precisamente un gruppo continuo a un parametro perchè le sue trasformazioni sono univocamente individuate dai valori del parametro t , che può variare con continuità comunque nel piano complesso. Anzi questo gruppo è dato *sotto forma canonica* perchè il prodotto di due trasformazioni corrispondenti ai valori t_1 e t_2 del parametro corrisponde al valore $t_1 + t_2$.

Osserviamo poi che il gruppo contiene sempre la trasformazione identica in corrispondenza al valore $t = 0$ del parametro; e inoltre che, essendo

$$(18) \quad \left(\frac{de^{t\Phi}}{dt} \right)_{t=0} = \Phi$$

questa trasformazione Φ , che caratterizza il gruppo a un parametro $e^{t\Phi}$, non è altro che la cosiddetta trasformazione infinitesima associata al gruppo.

Ma, ciò che più interessa, vale la proprietà inversa: *Ogni gruppo a un parametro di trasformazioni lineari, dato sotto forma canonica, può sempre immaginarsi ottenuto da un'espressione del tipo $e^{t\Phi}$.* Infatti, questo gruppo contiene sempre la trasformazione identica, corrispondente al valore $t = 0$ del parametro, e se è

$$(19) \quad \Psi(t) = \begin{vmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) \\ \psi_{21}(t) & \psi_{22}(t) \end{vmatrix}$$

la trasformazione generica del gruppo, la trasformazione infinitesima associata al gruppo stesso, che possiamo indicare ancora con Φ , sarà data da

$$(20) \quad \left(\frac{d}{dt} \Psi(t) \right)_{t=0} = \begin{vmatrix} \psi'_{11}(0) & \psi'_{12}(0) \\ \psi'_{21}(0) & \psi'_{22}(0) \end{vmatrix} = \Phi.$$

Ma se consideriamo ora il gruppo delle trasformazioni $e^{t\Phi}$, essendo Φ definito dalla formola precedente (20), avremo che anche questo gruppo ha la trasformazione infinitesima Φ , e quindi coinciderà col gruppo dato.

Dunque, l'espressione mediante l'esponenziale e le due trascendenti intere $M(\chi)$ e $N(\chi)$, trovata per le sostituzioni del tipo $e^{t\Phi}$, essendo Φ il simbolo di una trasformazione lineare fissata arbitrariamente, ci dà l'espressione più generale dei gruppi a un parametro di trasformazioni lineari su due variabili.

Teoria dei numeri. — *L'equazione cui soddisfa il coefficiente a della congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ con p primo, $p > 3$, perchè essa abbia tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p .* Nota II⁽¹⁾ di G. SANSONE, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

1. Se nelle due prime identità (IV) del n. 14 della nostra Memoria (M) si pone $b = \frac{p-1}{2}$ otteniamo:

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} & -D_{\frac{p-3}{2}}^2(a) + aD_{\frac{p-5}{2}}^2(a) - 2a(-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-5}{2}}(a) D_{\frac{p-7}{2}}(a) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{p-3}(a) \\ & -aD_{\frac{p-5}{2}}^2(a) - 2a(-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a) D_{\frac{p-5}{2}}(a) + 2aD_{\frac{p-3}{2}}(a) D_{\frac{p-7}{2}}(a) = \\ & = (-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{p-2}(a). \end{aligned} \right.$$

Queste ci dicono che se a è un valore incongruo o per il quale si ha:

$$(I) \quad D_{\frac{p-3}{2}}(a) \equiv 0, \quad D_{\frac{p-5}{2}}(a) \equiv 0 \pmod{p}$$

è anche $D_{p-2}(a) \equiv 0$, $D_{p-3}(a) \equiv 0 \pmod{p}$, cioè la congruenza

$$(2) \quad x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$$

ammette tre radici le quali hanno lo stesso carattere quadratico modulo p ⁽²⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1928.

(2) Cfr. numeri 8, 15 Memoria citata nella Nota I con (M).

Adunque condizione necessaria e sufficiente perchè la (2) abbia tre radici incongrue con lo stesso carattere quadratico modulo p , è che siano verificate le (1). Moltiplicando ora la prima delle (1) per $D_{\frac{p-3}{2}}(a)$ e la seconda per

$(-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-5}{2}}(a)$ e sommando otteniamo

$$\begin{aligned} & -D_{\frac{p-3}{2}}^3(a) - a D_{\frac{p-3}{2}}(a) D_{\frac{p-5}{2}}^2(a) - (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-5}{2}}^3(a) = \\ & = (-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{p-3}(a) D_{\frac{p-3}{2}}(a) + (-1)^p D_{p-2}(a) D_{\frac{p-5}{2}}(a), \end{aligned}$$

e tenuto conto che per la (32) del n. 8 della Memoria citata (M), per tutti i valori di a per i quali la (2) ammette tre radici incongrue si ha

$$D_{p-2}(a) \equiv 3 D_{p-3}(a)/2 \pmod{p},$$

dall'ultima identità scritta ne deduciamo per i considerati valori di a la congruenza:

$$\begin{aligned} (3) \quad & D_{\frac{p-3}{2}}^3(a) + a D_{\frac{p-3}{2}}(a) D_{\frac{p-5}{2}}^2(a) + (-1)^{\frac{p+1}{2}} a D_{\frac{p-5}{2}}^3(a) \equiv \\ & \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{p-3}(a) \left[D_{\frac{p-3}{2}}(a) + (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{3}{2} D_{\frac{p-5}{2}}(a) \right] \pmod{p}. \end{aligned}$$

Supponiamo che la (2) ammetta tre radici che abbiamo lo stesso carattere quadratico modulo p , il coefficiente a soddisfa le (1), esso è quindi una radice tripla del primo membro della (3), e perciò il secondo membro ha a come radice tripla, ma il fattore $D_{p-3}(a)$ ha tutte radici semplici⁽¹⁾, si ha perciò che il valore a considerato è una radice doppia (almeno) della congruenza

$$(4) \quad (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a) + \frac{3}{2} D_{\frac{p-5}{2}}(a) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ma abbiamo visto nella Nota precedente che la (2) ha tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p per $\left[\frac{b}{4} \right]$ valori incongrui di a se $p \equiv 1 \pmod{4}$ e per $\left[\frac{b+1}{4} \right]$ valori incongrui di a se $p \equiv 3 \pmod{4}$, essendo $p = 6h+5$, o $p = 6h+7$, ne segue che la congruenza (4) prescindendo dalle radici nulle, ha almeno $\left[\frac{b}{4} \right]$ radici distinte doppie, se $p \equiv 1$

(1) Cfr. n. 6 Memoria citata (M).

(mod. 4) ed almeno $\left\lfloor \frac{b+1}{4} \right\rfloor$ radici distinte doppie se $p \equiv 3 \pmod{4}$, e per questi valori a la congruenza (2) ammette tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p .

Il grado della (4) nelle radici a non nulle deve essere almeno $2 \left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor$ o $2 \left\lfloor \frac{b+1}{4} \right\rfloor$, noi dimostreremo che questo grado è effettivamente $2 \left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor$ oppure $2 \left\lfloor \frac{b+1}{4} \right\rfloor$ oppure supera questi numeri di una unità; in questo ultimo caso anzi è $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$ e la congruenza (4) ammette la radice semplice $a \equiv -27/4$ cui corrispondono le radici $-3/2, -3/2, 3$ che hanno ora lo stesso carattere quadratico modulo p . Sarà così dimostrato il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza*

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$$

abbia tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p , è che il numero non nullo a soddisfi la congruenza (4). Se $a \equiv -27/4$, a è una radice doppia della (4), se $a \equiv -27/4$ [e necessariamente $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$] a è una radice semplice della (4).

Determiniamo il grado della (4) rispetto ad a e distinguiamo i casi $p \equiv 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25 \pmod{24}$.

Ad es. per $p = 24k + 5 = 6(4k) + 5$, $b = 4k$, $\left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor = k$ troviamo tenuto conto degli sviluppi dei determinanti $D_b(a)$ indicati nella Nota precedente

$$(5) \quad (-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}} + \frac{3}{2} D_{\frac{p-5}{2}} = a^{4k} \left[\frac{3}{2} \binom{6k}{0} + \binom{6k}{1} \right] a^{2k} - \\ - \left\{ \frac{3}{2} \binom{6k-1}{2} + \binom{6k-1}{3} \right\} a^{2k-1} + \left\{ \frac{3}{2} \binom{6k-2}{4} + \binom{6k-2}{5} \right\} a^{2k-2} + \\ + \dots - \left\{ \frac{3}{2} \binom{4k+1}{4k-2} + \binom{4k+1}{4k-1} \right\} a + \frac{3}{2} \binom{4k}{4k}.$$

Eseguendo gli sviluppi anche negli altri casi troviamo che il grado del polinomio primo membro delle (4) nelle radici non nulle coincide rispettivamente con $2 \left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor$ o $2 \left\lfloor \frac{b+1}{4} \right\rfloor$, oppure supera questi numeri di una unità quando sia $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$. Ne risulta già che se è $p \equiv 5, 7 \pmod{8}$ le radici non nulle della (4) sono tutte doppie, ed esse sono tutti e soltanto i valori di a per i quali la congruenza (2) ammette tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p , e il teorema enunciato è dimostrato.

Per esaminare anche il caso $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$, per trovare cioè il significato della radice semplice non nulla della (4) indichiamo con $P(a)$ il polinomio per il quale la congruenza $P(a) \equiv 0 \pmod{p}$ abbia come radici, e tutte semplici, i valori di a per i quali la (2) ammette tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p . Il polinomio $P(a)$ ha il grado

$\left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor$ oppure $\left\lfloor \frac{b+1}{4} \right\rfloor$ ed avremo per le cose dette

$$(6) \quad D_{\frac{p-3}{2}}(a) = P(a) L(a) \quad D_{\frac{p-5}{2}}(a) = P(a) M(a)$$

ove $L(a)$ ed $M(a)$ non hanno modulo p divisori comuni della forma $a - \alpha$ con $\alpha \not\equiv 0$. La (3) diventa:

$$(7) \quad P^3(a) \left[L^3(a) + a L(a) M^2(a) + (-1)^{\frac{p+1}{2}} a M^3(a) \right] \\ \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a) \left[L(a) + (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{3}{2} M(a) \right] P(a), \quad (\text{mod. } p).$$

Siccome $D_{\frac{p-3}{2}}(a) \equiv 0$ ha le sue radici non nulle tutte semplici⁽¹⁾ il fattore in parentesi del secondo membro è divisibile modulo p per il polinomio $P(a)$ e per l'osservazione fatta varrà l'una o l'altra delle relazioni:

$$\left. \begin{aligned} (8)_1 \quad & (-1)^{\frac{p+1}{2}} L(a) + \frac{3}{2} M(a) \equiv c a^{\delta} P(a) \quad , \\ (8)_2 \quad & (-1)^{\frac{p+1}{2}} L(a) + \frac{3}{2} M(a) \equiv c a^{\delta} (a - \alpha) P(a) \end{aligned} \right\} \quad (\text{mod. } p)$$

con la costante c non nulla e $\alpha \equiv 0, \alpha \not\equiv 0$ secondochè sia rispettivamente $p \equiv 5, 7$ oppure $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$. In questo secondo caso α è radice semplice del primo membro della $(8)_2$.

Possiamo subito provare che *quando vale la $(8)_2$ è $\alpha \equiv -27/4$* . Infatti è $P^3(\alpha) \equiv 0$ [in caso opposto α sarebbe radice doppia del primo membro della $(8)_2$] e per questo valore di α si ha quindi

$$(9) \quad L^3(\alpha) + \alpha L(\alpha) M^2(\alpha) + (-1)^{\frac{p+1}{2}} \alpha M^3(\alpha) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

e poichè la $(8)_2$ dà $(-1)^{\frac{p+1}{2}} L(\alpha)/M(\alpha) \equiv -3/2 \pmod{p}$ dalla (9) deduciamo $\alpha \equiv -27/4$. Ora quando sia $a \equiv -27/4$ la congruenza

$$x^3 - \frac{27}{4} x - \frac{27}{4} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

ha le radici $x_1 = x_2 \equiv -3/2$, $x = 3$ e siccome è ora $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$

(1) Cfr. n. 6 Memoria citata (M).

si ha anche $\left(\frac{x_1}{p}\right) = \left(\frac{x_2}{p}\right) = \left(\frac{x_3}{p}\right)$. Abbiamo dunque che se la (4) ha una radice semplice non nulla a , è $a = -27/4$ e la congruenza corrispondente ha tre radici, di cui una doppia, tutte con lo stesso carattere quadratico modulo p . Resta con ciò dimostrato il teorema in ogni parte.

2. Vogliamo dare la forma esplicita della condizione (4).

Per semplicità ci riferiamo ai casi $p = 24k + 5$, $p = 24k + 11$, ed enuncieremo poi il risultato in generale.

Per $p = 24k + 5$, $h = 4k$ la condizione (4) si riduce per le (5) all'altra

$$\left[\frac{3}{2} \binom{6k}{0} + \binom{6k}{1}\right] a^{2k} - \left[\frac{3}{2} \binom{6k-1}{2} + \binom{6k-1}{3}\right] a^{2k-1} + \\ + \left[\frac{3}{2} \binom{6k-2}{4} + \binom{6k-2}{5}\right] a^{2k-2} - \dots + \frac{3}{2} \binom{4k}{4k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Avendosi $\frac{3}{2} \binom{6k-r}{2r} + \binom{6k-r}{2r+1} = \binom{6k-r}{2r} \left[\frac{3}{2} + \frac{6k-3r}{2r+1} \right] =$
 $= \frac{12k+3}{2} \frac{1}{2r+1} \binom{6k-r}{2r}$ e $\frac{3}{2} = \frac{12k+3}{2} \frac{1}{4k+1}$, la relazione precedente liberata dal fattore $\frac{12k+3}{2}$ diventa:

$$(5') \quad \frac{1}{1} \binom{6k}{0} a^{2k} - \frac{1}{3} \binom{6k-1}{2} a^{2k-1} + \frac{1}{5} \binom{6k-2}{4} a^{2k-2} - \dots - \\ - \frac{1}{4k-1} \binom{4k-1}{4k-2} a + \frac{1}{4k+1} \binom{4k}{4k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Così pure per $p = 24k + 11$ la condizione (4), tenuto conto che è

$$\frac{3}{2} \binom{6k+1-r}{2r+1} + \binom{6k+1-r}{2r+2} = (12k+6) \frac{1}{2(2r+2)} \binom{6k+1-r}{2r+1};$$

$$\frac{3}{2} = (12k+6) \frac{1}{2(4k+2)},$$

sopprimendo il fattore $12k+6$ diventa

$$a^{2k+1} - \frac{1}{2} \binom{6k+1}{1} a^{2k} + \frac{1}{4} \binom{6k}{3} a^{2k-1} - \dots + \\ + \frac{1}{4k} \binom{4k+2}{4k-1} a - \frac{1}{4k+2} \binom{4k+1}{4k+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ragionando nello stesso modo per $p \equiv 7, 13, 17, 19, 23, 25$ troviamo il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza

$$(2) \quad x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$$

abbia tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p , è che per $p \equiv 1 \pmod{4}$ posto $\lambda = \left[\frac{p-2}{12} \right]$, il coefficiente a soddisfi la congruenza

$$(II)_1 \quad \frac{1}{1} \left(\frac{p-5}{4} \right) a^\lambda - \frac{1}{3} \left(\frac{p-9}{4} \right) a^{\lambda-1} + \frac{1}{5} \left(\frac{p-13}{4} \right) a^{\lambda-2} - \dots \equiv 0 \pmod{p};$$

e se $p \equiv 3 \pmod{4}$, posto $\lambda = \left[\frac{p+2}{12} \right]$, il coefficiente a soddisfi la congruenza

$$(II)_2 \quad a^\lambda - \frac{1}{8 \cdot 1} \left(\frac{p-7}{4} \right) a^{\lambda-1} + \frac{1}{8 \cdot 2} \left(\frac{p-11}{4} \right) a^{\lambda-2} - \\ - \frac{1}{8 \cdot 3} \left(\frac{p-15}{4} \right) a^{\lambda-3} + \dots \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le $(II)_1$, $(II)_2$ ammettono ciascuna λ radici incongrue, e più precisamente se poniamo $p = 6h + 5$, $6h + 7$, quando il grado λ delle (II) è pari, esse hanno $\lambda/2$ radici tutte doppie cui corrispondono congruenze (2) con tre radici incongrue; quando il grado λ delle (II) è dispari, esse hanno una sola radice semplice $a = -27/4$ [cui corrisponde una congruenza (2) con le tre radici $-3/2$, $-3/2$, 3] e tutte le altre loro radici, in numero di $\left[\frac{h}{4} \right]$, $\left[\frac{h+1}{4} \right]$ rispettivamente, sono doppie, e vi corrispondono congruenze (2) con tre radici incongrue⁽¹⁾.

3. Osserviamo infine che per i risultati della Nota precedente tutti i valori a che soddisfano le (II) hanno la forma

$$a = -(3 + \alpha^2)^3/4(1 - \alpha^2)^2$$

ove α è un numero intero scelto nella successione $2, 4, 5, \dots, \frac{p-1}{2}$ con esclusione dell'eventuale valore di α per il quale si ha $\alpha^2 \equiv -3 \pmod{p}$ e in modo che si abbia anche $\left(\frac{1-\alpha}{p} \right) = \left(\frac{1+\alpha}{p} \right) = \left(\frac{-2}{p} \right)$.

Quando λ sia dispari a questi valori bisogna aggiungere l'altro $a = -27/4$.

(1) In questo caso è perciò $\lambda = 2 \left[\frac{h}{4} \right] + 1$, $\lambda = 2 \left[\frac{h+1}{4} \right] + 1$ secondochè è $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$.

Matematica. — *Sulla unicità della soluzione nel problema di Dirichlet.* Nota di G. ASCOLI, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui corpi algebrici di Galois.* Nota di A. M. BEDARIDA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les valeurs probables de fonctions.* Nota di V. GLIVENKO, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur la loi des grandes nombres dans les espaces fonctionnels.* Nota di V. GLIVENKO, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *A proposito di un'equazione differenziale.* Nota di G. SCORZA-DRAGORI, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Nuove definizioni del fascio canonico.* Nota di G. SANNIA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Una nuova trasformazione delle superficie isoterme.* Nota di R. CAPASSO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Intorno ad una trasformazione delle superficie R.* Nota di R. CAPASSO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra un notevole gruppo di operatori funzionali.* Nota di F. SBRANA, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Una nuova trasformazione delle superficie isoterme.* Nota ⁽¹⁾ di R. CALAPSO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

In una precedente Nota ⁽²⁾, valendomi della facile trasformazione delle superficie R di Tzitzéica in superficie isoterme di uno spazio a quattro dimensioni, ho stabilito che *la deformazione proiettiva di una superficie R è riducibile ad una trasformazione C_m .*

È noto altresì ⁽³⁾ che le trasformazioni di Jonas delle superficie R sono riducibili a trasformazioni di Darboux.

Occorre proseguire in tale studio, e cioè procedere al confronto delle altre trasformazioni delle superficie R con le trasformazioni delle superficie isoterme; ma nel procedere a questo confronto mi avvedo che la teoria delle superficie isoterme non è esaurita, in quanto sussistono trasformazioni di queste superficie non ancora osservate.

Lo scopo della presente Nota è di stabilire una nuova trasformazione delle superficie isoterme, di cui quella di Darboux è caso particolare.

§ I. — LE RETI ORTOGONALI ISOTERME DELL'IPERCONO ISOTROPO
IN UNO SPAZIO EUCLIDEO S_5 , A CINQUE DIMENSIONI.

1. Siano $X_1(uv), X_2(uv), \dots, X_5(uv)$ le coordinate di un punto (in uno spazio S_5) che descriva una rete ortogonale, e siano ξ_r, η_r rispettivamente i coseni direttori delle tangenti alle curve della rete, per il che si hanno relazioni della forma

$$(1) \quad \frac{\partial X_r}{\partial u} = h \xi_r \quad , \quad \frac{\partial X_r}{\partial v} = l \eta_r \quad (r = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Siano ancora x_{kr} ($k = 1, 2, 3$) i coseni direttori delle tre normali (indipendenti) alla rete; si sa ⁽⁴⁾ che gli elementi del determinante ortogonale

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1928.

(2) R. CALAPSO, *Riduzione della deformazione proiettiva di una superficie R alla trasformazione C_m delle superficie isoterme.* (Questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a, 1^o sem. fasc. 8, aprile (1928).

(3) Vedasi TZITZÉICA, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, Bucarest 1924, p. 272.

(4) Vedasi le formole di Guichard riportate per esempio nel libro di EISENHART, *Transformations of surfaces*, p. 160, n. 63 (Princeton 1923).

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \end{vmatrix}$$

soddisfano ad equazioni della forma

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_{kr}}{\partial u} = a_k \xi_r & \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} = b_k \eta_r \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial u} = - \sum_k a_k x_{kr} - p \eta_r & \frac{\partial \xi_r}{\partial v} = q \eta_r \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial u} = p \xi_r & \frac{\partial \eta_r}{\partial v} = - \sum_k b_k x_{kr} - q \xi_r \end{cases}$$

le cui condizioni d'integrabilità sono:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial a_k}{\partial v} = p b_k & , & \frac{\partial b_k}{\partial u} = q a_k \\ \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} + \sum a_k b_k = 0 . \end{cases}$$

2. Vogliamo caratterizzare le reti O dell'ipercono isotropo.

A tale scopo osserviamo che dalla relazione

$$(4) \quad \sum X_r^2 = 0$$

e dalle (1) si ricava

$$\sum X_r \xi_r = 0 \quad , \quad \sum X_r \eta_r = 0$$

e perciò le X_r sono combinazioni lineari isotrope di x_{1r}, x_{2r}, x_{3r} , cioè:

$$(5) \quad X_r = c_1 x_{1r} + c_2 x_{2r} + c_3 x_{3r} \quad (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0).$$

Esprimendo che sono soddisfatte le (1) segue:

$$\begin{aligned} h \xi_r &= (c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3) \xi_r + \frac{\partial c_1}{\partial u} x_{1r} + \frac{\partial c_2}{\partial u} x_{2r} + \frac{\partial c_3}{\partial u} x_{3r} \\ l \eta_r &= (c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3) \eta_r + \frac{\partial c_1}{\partial v} x_{1r} + \frac{\partial c_2}{\partial v} x_{2r} + \frac{\partial c_3}{\partial v} x_{3r} \end{aligned}$$

e quindi necessariamente

$$(6) \quad \begin{cases} h = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 & \frac{\partial c_r}{\partial u} = 0 \\ l = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 & \frac{\partial c_r}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

e cioè le c_r sono costanti.

3. Infine volendo la rete isoterma, fissiamo la combinazione lineare (5) prendendo per esempio

$$(7) \quad c_1 = 1, \quad c_2 = i, \quad c_3 = 0; \quad (i = \sqrt{-1})$$

allora si dovrà avere $b = l$, e si potrà porre:

$$(8) \quad \begin{cases} a_1 + i a_2 = b_1 + i b_2 = e^{\theta} \\ p = \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad q = \frac{\partial \theta}{\partial u} \end{cases}$$

e le equazioni caratteristiche saranno

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial a_k}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v} b_k, & \frac{\partial b_k}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u} a_k \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \sum a_k b_k = 0 \\ a_1 + i a_2 = e^{\theta} & b_1 + i b_2 = e^{\theta}. \end{cases}$$

§ 2. — LE RETI ISOTERME DELL'IPERCONO ISOTROPO CHE AMMETTONO UNA TRASFORMAZIONE DI CHRISTOFFEL.

4. Tutto quanto abbiamo detto fin qui si riferisce alle reti isoterme dell'ipercono isotropo in condizioni generali; vogliamo ora trattare il caso delle reti che ammettono una trasformazione di Christoffel.

Osservando le (6) troviamo subito che dovranno esistere delle costanti c_1, c_2, c_3 diverse dalle (7) in guisa da aversi

$$(10) \quad c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3$$

oppure

$$(11) \quad c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = -(c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3).$$

La (10) è da escludere.

Infatti, nel caso affermativo le (9) darebbero

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} \log (c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3) = \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial u} \log (c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3) = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \end{cases}$$

eppurò

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = c e^{\theta},$$

cioè

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = c(a_1 + i a_2).$$

Non potendo sussistere una relazione a coefficienti costanti fra le a_r , seguirebbe

$$c_1 = c \quad , \quad c_2 = ci \quad , \quad c_3 = 0 \quad ,$$

e le due reti sarebbero omotetiche.

Rimane allora la (11) e si potrà porre

$$(12) \quad \begin{cases} c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = c e^{-\theta} \\ c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = -c e^{-\theta} . \end{cases}$$

Si ha così il seguente teorema:

Se gli elementi del determinante Δ soddisfano le (2) in cui i coefficienti differenziali a_k , b_k , $p = \frac{\partial \theta}{\partial v}$, $q = \frac{\partial \theta}{\partial u}$ sono legati dalle relazioni (9) e (12), i punti

$$\begin{cases} X_r = x_{1r} + i x_{2r} \\ X'_r = c_1 x_{1r} + c_2 x_{2r} + c_3 x_{3r} \end{cases} \quad \begin{matrix} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0 \\ (r = 1, 2, 3, 4, 5) \end{matrix}$$

descrivono due reti ortogonali isoterme dell'ipercono isotropo, deducibili l'una dall'altra per trasformazione di Christoffel.

Il procedimento indicato dà tutte le coppie di reti isoterme nella relazione richiesta.

§ 3. — LE NUOVE TRASFORMAZIONI DELLE SUPERFICIE ISOTERME DELLO SPAZIO ORDINARIO.

5. La geometria dell'ipercono isotropo di uno spazio S_5 ci ha condotto ad una trasformazione delle reti isoterme del detto ipercono. Ma nelle considerazioni svolte nello spazio S_5 abbiamo avuto lo scopo principale di pervenire a nuove proprietà dello spazio ordinario S_3 .

Otteniamo lo scopo suddetto interpretando le quantità X_r , X'_r come coordinate pentasferiche di punto in uno stesso spazio S_3 . La trasformazione ora osservata si traduce in una nuova trasformazione delle superficie isoterme dello spazio ordinario.

In una Nota di prossima pubblicazione darò l'espressione analitica della nuova trasformazione in coordinate cartesiane, e risulterà:

1° Che la restrizione imposta alla rete X_r dell' S_5 (di ammettere una trasformazione di Christoffel) non porta restrizione alcuna sulla superficie isoterma

$$x = \frac{X_1}{X_4 + iX_5} \quad , \quad y = \frac{X_2}{X_4 + iX_5} \quad , \quad z = \frac{X_3}{X_4 + iX_5} \quad .$$

2° Che la nuova trasformazione comprende quella di Darboux come caso particolare.

Meccanica. — *Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche.* Nota III ⁽¹⁾ di G. COLONNETTI, presentata dal Corrisp. C. GUIDI.

Vogliamo in questa terza Nota far brevemente vedere come il teorema enunciato e dimostrato nelle due Note precedenti si presti alla risoluzione di alcuni problemi concreti di grande interesse nelle applicazioni tecniche.

Perciò introduciamo senz'altro quelle limitazioni e semplificazioni che sono abituali nella teoria delle travi e degli archi.

Il solido elastico sarà di quelli che si possono ritenere generati da un'area piana, di forma e dimensioni variabili con continuità, che si muova nello spazio mantenendosi sempre normale alla linea descritta dal suo baricentro.

A questa linea daremo al solito il nome di *asse geometrico* della trave: chiameremo *sezioni rette* di questa le successive posizioni assunte nel suo movimento dall'area generatrice; e supporremo che l'asse geometrico sia tutto contenuto in un piano (per rapporto al quale l'intero sistema sia e si mantenga simmetrico) e che il suo raggio di curvatura sia ovunque molto grande rispetto alle dimensioni della sezione.

In queste ipotesi il volume V si può considerare come l'insieme di infiniti tronchi elementari cilindrici a ciascuno dei quali (avente per base la sezione retta generica di area A , e per altezza l'elemento ds dell'asse geometrico) è lecito applicare la teoria di De Saint-Venant.

Assunti come assi di riferimento per tale tronco elementare generico i due assi principali centrali d'inerzia della sezione (assi x ed y) e la normale ad essi condotta pel baricentro (asse z), e tenuto conto che, al variare degli assi col variare della sezione che si considera, uno dei piani coordinati (piano yz) deve sempre mantenersi coincidente col piano di simmetria, la formola generale cui siamo giunti alla fine della Nota precedente viene a potersi scrivere sotto la forma

$$m' \mathcal{T} + n' \mathcal{M} + p' \mathcal{N} = \iint_{\Sigma} [\sigma'_z e_z + \tau'_{yz} g_{yz} + \tau'_{zx} g_{zx}] dA \cdot ds$$

nella quale con \mathcal{M} , \mathcal{N} e \mathcal{T} si sono indicati rispettivamente lo sforzo normale, il momento flettente, e lo sforzo tagliente che nella sezione Σ , supposta coincidente con una sezione retta della trave, sono determinati dallo stato di coazione che forma oggetto del nostro studio.

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1928.

Nel caso particolare in cui questo stato di coazione deriva da variazioni di temperatura — sicchè le deformazioni impresse si riducono tutte e soltanto a delle dilatazioni, e le g son tutte nulle — si ha ancor più semplicemente

$$m' \mathcal{E} + n' \mathcal{U} + p' \mathcal{N} = \iint_{s, A} \sigma'_x e_x dA \cdot ds.$$

Limitiamoci alla considerazione di un problema molto particolare. Proponiamoci, per esempio, la determinazione del momento flettente \mathcal{N} che in una data sezione Σ di un arco elastico, incastrato ad entrambi gli estremi, nasce per effetto di certe variazioni di temperatura impresse all'arco.

Gioverà evidentemente porre nelle formole precedenti

$$m' = n' = 0 \quad \text{e} \quad p' = 1$$

gioverà cioè assumere come distorsione ausiliaria quella che nell'arco elastico considerato si determina immaginando praticato il solito taglio in corrispondenza della sezione Σ ed impressa alle due facce del taglio una rotazione relativa unitaria attorno all'asse x (normale al piano del disegno condotta per il baricentro della sezione).

Ma un tale spostamento relativo si ottiene subito se alle due facce del taglio si immaginano applicate due forze eguali e contrarie R e $-R$ la cui linea d'azione comune sia l'antipolare del detto baricentro per rapporto all'ellisse di elasticità dell'arco, e la cui grandezza, pure comune, soddisfi alla condizione esprimente che l'ampiezza (unitaria) della rotazione relativa dev'essere eguale al prodotto del peso elastico totale dell'arco per il momento statico della forza R preso rispetto al centro O dell'ellisse.

Così stando le cose la determinazione delle tensioni σ'_x non presenta più alcuna difficoltà; e si può procedere senz'altro al calcolo del momento flettente

$$\mathcal{N} = \iint_{s, A} \sigma'_x e_x dA \cdot ds$$

ogniquale volta siano date le variazioni di temperatura e conseguentemente le dilatazioni e_x che determinano lo stato di coazione in esame.

Chè anzi non di rado, date che siano le e_x , ulteriori semplificazioni si rendono possibili.

Si supponga per esempio che la distribuzione delle temperature sia tale da determinare dilatazioni e_x comunque variabili da sezione a sezione, ma costanti su ciascuna sezione. Si potrà allora scrivere

$$\mathcal{N} = \int e_x \int_A \sigma'_x dA \cdot ds = \int e_x \mathcal{N}' ds$$

\mathfrak{U}' essendo lo sforzo normale che nella sezione generica vien prodotto dalla distorsione ausiliaria.

Tracciato il diagramma degli \mathfrak{U}' per rapporto alla variabile s - vale a dire: tracciato il diagramma che ha per asse di riferimento (asse delle

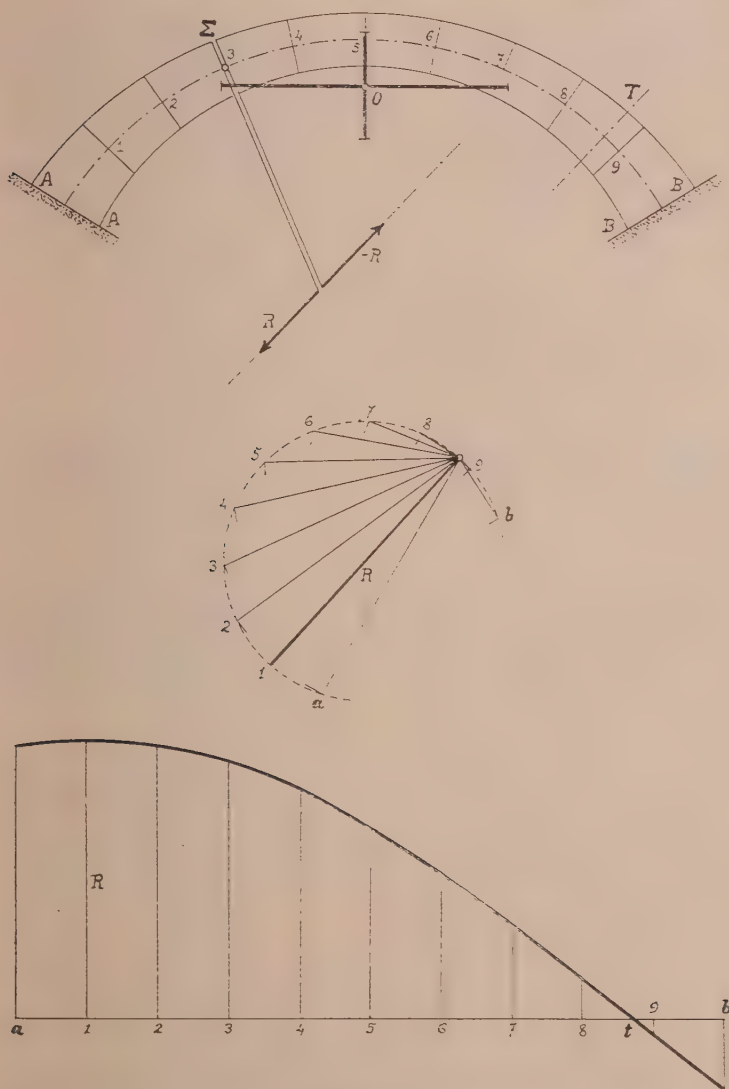


Fig. 1.

ascisse) lo sviluppo dell'asse geometrico dell'arco, e per ordinate i corrispondenti valori dello sforzo normale \mathfrak{U}' , e le cui aree elementari comprese fra due ordinate vicinissime misurano perciò i valori del prodotto $\mathfrak{U}' ds$ -

ci si potrà servire di esso nel modo istesso con cui nella scienza delle costruzioni ci si serve degli ordinari diagrammi di influenza; la grandezza della dilatazione e_x relativa a ciascuna sezione assolvendo qui ad una funzione perfettamente analoga a quella che di solito spetta alla intensità del carico ripartito.

In particolare quel diagramma, coi suoi eventuali punti t di passaggio (corrispondenti alle sezioni T nelle quali la distorsione ausiliaria dà luogo a sforzi normali identicamente nulli) e con le sue aree di segni contrarii, si presterà alla rapida ed intuitiva identificazione delle distribuzioni di temperature cui corrispondono, nella sezione Σ , rispettivamente il massimo ed il minimo momento flettente ⁽¹⁾.

Geometria. — *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces.*
Due Note di E. ČECH, presentate dal Corrisp. G. FUBINI.

Saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sugli invarianti adiabatici di un generico sistema differenziale.* Nota III ⁽²⁾ di H. GEPPERT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dopo aver trattato in due Note anteriori ⁽³⁾ i sistemi differenziali di due dimensioni passiamo ora al caso più generale del generico sistema (I) cioè di n dimensioni. Supporremo che conosciamo m e soltanto m integrali finitiformi di esso:

$$(35) \quad f_i(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_p) = c_i, \quad (i = 1 \dots m)$$

che determinano nello spazio R_n una ipersuperficie chiusa $\Phi(c_1, \dots, c_m)$ di $n - m$ dimensioni ricoperta quasiergodicamente dalle traiettorie della (I).

Gli invarianti adiabatici sono allora le soluzioni delle equazioni

$$(36) \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial I}{\partial c_i} \bar{f}_{i\lambda} + \frac{\partial I}{\partial a_\lambda} = 0, \quad (\lambda = 1 \dots p)$$

dove le $\bar{f}_{i\lambda}$ denotano le medie di $\frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}$ rispetto al tempo. Converrà porre

(1) Di questo e di altri diagrammi di influenza analoghi (ed analogamente deducibili dalle nostre formole) ha recentemente trattato l'ing. O. BELLUZZI in un suo studio su *Le linee d'influenza termiche*, pubblicato negli « Annali dei Lavori Pubblici » (1927-V), cui rinvio il lettore desideroso di maggiori dettagli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1928.

(3) Cfr. pp. 30 e 191.

queste medie sotto un'altra forma che implica lo spazio invece del tempo; a tal uopo basta osservare che secondo un teorema classico l'integrale

$$\int \mu dx_1 \dots dx_n$$

dove μ denota un moltiplicatore qualunque del sistema originario che supponiamo diverso da zero nel campo considerato, è un invariante integrale; prendiamo quindi le due ipersuperficie

$$\Phi(c_1, \dots, c_m) \quad \text{e} \quad \Phi(c_1 + dc_1 \dots c_m + dc_m)$$

e sia dC l'elemento dello strato contenuto fra di esse, $d\Phi$ l'elemento di Φ , avremo allora

$$dC = dc_1 \dots dc_m \cdot \frac{d\Phi}{\Gamma},$$

$$(37) \quad \Gamma^2 = \left\| \frac{\partial(f_1 \dots f_m)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \right\|^2 = \text{Det} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

e in base all'ipotesi quasiergodica potremo scrivere

$$(38) \quad \alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \alpha dt = \int_{\Phi} \alpha \mu dC : \int_{\Phi} \mu dC = \int_{\Phi} \alpha \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi : \int_{\Phi} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi,$$

dove gli integrali si intendono estesi su tutta la Φ . Nel caso estremo di $m = n - 1$ in cui la Φ si riduce a una varietà di una sola dimensione, cioè alla traiettoria stessa, si può arrivare alla medesima formola anche eliminando l'ipotesi quasiergodica ricavando dalle equazioni

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} X_k = 0, \quad (i = 1 \dots n - 1)$$

le relazioni

$$(39) \quad X_i = \frac{(-1)^i}{\mu} \cdot \frac{\partial(f_1 \dots f_{n-1})}{\partial(x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)} = \frac{(-1)^i}{\mu} \cdot D_i, \quad (i = 1 \dots n)$$

dove μ indica un fattore di proporzionalità che soddisfa all'equazione differenziale

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu X_i) = 0$$

ed è quindi un moltiplicatore del sistema originario. Si trova così

$$dt = (-1)^i \mu \frac{dx_i}{D_i} = \mu \frac{\sqrt{\sum dx_i^2}}{\sqrt{\sum D_i^2}} = \mu \frac{ds}{\Gamma},$$

dove $\Gamma = \sqrt{\sum_{i=1}^n D_i^2}$ è proprio l'espressione (37) in cui si pone $m = n - 1$.

Proponendoci ora di risolvere la (36) ci restringeremo anzitutto al caso di $m = 1$ per passare poi a base dei risultati ottenuti al caso generale. Per $m = 1$ la (36) si riduce alla seguente

$$(40) \quad \frac{\partial I}{\partial c_1} \cdot \int_{\Phi} \frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi + \frac{\partial I}{\partial a_\lambda} \cdot \int_{\Phi} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi = 0, \quad (\lambda = 1 \dots \rho)$$

dove si ha posto

$$\Gamma^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right)^2.$$

Si può dare una soluzione della (40) nel caso in cui è possibile trovare un moltiplicatore μ che è indipendente dai parametri $a_1 \dots a_\rho$; diciamo che si avrà allora

$$(41) \quad I = \int_{\Phi} \mu dx_1 \dots dx_n,$$

l'integrale intendendosi esteso all'interno dell'ipersuperficie Φ . Infatti si verificano agevolmente le relazioni

$$(42) \quad \frac{\partial I}{\partial c_1} = \int_{\Phi} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi, \quad \frac{\partial I}{\partial a_\lambda} = - \int_{\Phi} \frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi, \quad (\lambda = 1 \dots \rho).$$

I sistemi che ammettono una μ indipendente dai parametri chiameremo sistemi generalizzati di Liouville perchè per essi è sempre possibile passare mediante una trasformazione di coordinate che non dipende dai parametri ed il cui determinante funzionale è proprio questa μ ad un nuovo sistema originario di divergenza nulla. Nel caso indicato le equazioni (40) sono completamente integrabili, ciò vale a dire la

$$(43) \quad d\bar{c}_1 = \sum_{\lambda=1}^{\rho} \bar{f}_{1\lambda} da_\lambda$$

è un differenziale esatto. Le condizioni necessarie e sufficienti affinché le (40) formino un sistema illimitatamente integrabile sono le seguenti

$$(44) \quad \psi \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a_k} \right) - \psi_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial c_1} \right) + \psi_\lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} + \frac{\partial \psi_k}{\partial c_1} \right) = 0, \\ (k \neq \lambda = 1 \dots \rho)$$

ove abbiamo denotato con ψ e ψ_k gli integrali

$$\psi = \int_{\Phi} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi, \quad \psi_k = \int_{\Phi} \frac{\partial f_1}{\partial a_k} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi, \quad (k = 1 \dots \rho)$$

Osservando ora che se χ rappresenta una funzione qualunque del posto e dei parametri si ha analogamente alle (42)

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \int_{\Phi} \chi dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Phi} \chi \frac{d\Phi}{\Gamma},$$

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \int_{\Phi} \chi dx_1 \cdots dx_n = - \int_{\Phi} \frac{\partial f_1}{\partial a_k} \chi \frac{d\Phi}{\Gamma} + \int_{\Phi} \frac{\partial \chi}{\partial a_k} dx_1 \cdots dx_n,$$

vediamo subito che è

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a_k} = \int_{\Phi} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial a_k} \frac{\partial \mu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial a_k} \right\} \frac{d\Phi}{\Gamma},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_k} + \frac{\partial \psi_k}{\partial c_1} = \int_{\Phi} \frac{\partial \mu}{\partial a_k} \frac{d\Phi}{\Gamma},$$

di modo che le condizioni (44) assumono questa forma esplicita

$$(45) \quad \int_{\Phi} \left[\int_{\Phi} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial a_k} \frac{\partial \mu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial a_k} \right\} \frac{d\Phi}{\Gamma} - \frac{\partial f_1}{\partial a_k} \int_{\Phi} \frac{\partial \mu}{\partial a_\lambda} \frac{d\Phi}{\Gamma} + \frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda} \int_{\Phi} \frac{\partial \mu}{\partial a_k} \frac{d\Phi}{\Gamma} \right] \cdot \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi \equiv 0,$$

($k \neq \lambda = 1 \cdots p$)

da cui si ricava che in generale — a meno di casi triviali — per una μ dipendente dai parametri il sistema (40) non è completamente integrabile nel senso da noi inteso.

Siamo ora in grado di trattare il caso di una m qualunque. Prendiamo gli integrali $f_1, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_m$ e risolviamoli rispetto a $x_1 \cdots x_{m-1}$ troveremo allora $m-1$ equazioni della forma

$$(46) \quad x_i = \varphi_{ik}(x_m \cdots x_n | a_1 \cdots a_p | c_1 \cdots c_{k-1}, c_{k+1} \cdots c_m),$$

($i = 1 \cdots m-1$)

che soddisfano identicamente alle relazioni

$$(47) \quad f_\lambda(\varphi_{1k} \cdots \varphi_{m-1,k}, x_m, \dots, x_n | a_1 \cdots a_p) \equiv c_\lambda, \quad (\lambda \neq k = 1 \cdots m).$$

Il sistema differenziale originario (1) si divide allora in due gruppi differenti; le prime $m-1$ equazioni danno luogo alle identità

$$(48) \quad \frac{d\varphi_{ik}}{dt} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_\lambda} X_\lambda \equiv X_i(\varphi_{1k}, \dots, \varphi_{m-1,k}, x_m \cdots x_n | a_1 \cdots a_p),$$

($i = 1 \cdots m-1$)

dimodo che si trova

$$(52) \quad \Delta_k = \Delta_0 + \frac{1}{D_k} \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial D_k}{\partial x_\lambda} X_\lambda,$$

dove Δ_0, Δ_k designano le divergenze del sistema originario (1) e del sistema (49) ed abbiamo posto

$$D_k = \frac{\partial(f_1 \cdots f_{k-1}, f_{k+1} \cdots f_m)}{\partial(x_1 \cdots x_{m-1})}.$$

Se il sistema originario è del tipo di Liouville e D_k un suo integrale, allora la I_k (in cui si pone $\mu_k = 1$) sarà un invariante adiabatico.

Come esempio prendiamo il sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = a_2 x_2 - a_3 x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_3 x_3 - a_1 x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = a_1 x_1 - a_2 x_2,$$

i cui integrali sono

$$f_1 \equiv x_1 + x_2 + x_3 = c_1, \quad f_2 \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = c_2.$$

Evidentemente c_1 è il primo invariante adiabatico siccome f_1 non dipende dai parametri; il secondo ci viene fornito dal sistema differenziale

$$\frac{dx_1}{dt} = a_3 x_1 + (a_2 + a_3) x_2 - a_3 c_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = -(a_1 + a_3) x_1 - a_3 x_2 + a_3 c_1,$$

la cui divergenza è nulla dimodo che

$$I_2 = \iint dx_1 dx_2 = \\ = \pi \left\{ c_1^2 \frac{a_1 a_2 a_3}{(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)^{1/2}} - \frac{c_2}{(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)^{1/2}} \right\}$$

è il secondo invariante adiabatico che in quest'esempio avremmo potuto trovare anche col metodo diretto sviluppato nella nostra prima Nota.

Idrodinamica. — *Sopra una forma delle equazioni dinamiche di un sistema di vortici rettilinei.* Nota ⁽¹⁾ di A. MASOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Il moto piano di un sistema di vortici rettilinei, paralleli, isolati, liberi, in un liquido perfetto indefinito, è regolato dalle seguenti equazioni di Kirchhoff ⁽²⁾:

$$(1) \quad C_b \frac{dx_b}{dt} = - \frac{\partial W}{\partial y_b}, \quad C_b \frac{dy_b}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x_b} \quad (b = 1, \dots, n);$$

in esse x_b e y_b indicano coordinate cartesiane qualunque, in un generico piano normale agli n vortici, della traccia P_b del vortice b -esimo, la cui intensità è C_b , e la funzione W è così definita:

$$(2) \quad W = \frac{1}{2\pi} \sum C_b C_k \log p_{bk},$$

con $p_{bk} = \overline{P_b P_k}$, la somma essendo estesa a tutte le combinazioni di classe 2 (senza ripetizione) degli indici $1, \dots, n$.

2. Una nuova forma delle equazioni dinamiche, particolarmente significativa, può ottenersi come segue.

Si dia veste vettoriale alle (1); si ottengono subito le equazioni

$$(3) \quad \text{grad}_{P_b} W = C_b \left(\frac{dy_b}{dt} \mathbf{i} - \frac{dx_b}{dt} \mathbf{j} \right) \quad (b = 1, \dots, n),$$

dove \mathbf{i} e \mathbf{j} indicano i versori degli assi x e y rispettivamente.

Ora si osservi che se le caratteristiche cinetiche relative all'istante t appartenessero ad un moto stazionario, ed è lecito il supporlo, il vortice b -esimo subirebbe (per unità di lunghezza) un'azione dinamica \mathbf{A} interpretabile come risultante di un sistema di attrazioni newtoniane dovute a

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1928.

(2) V. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik* [Leipzig, Teubner, 1876], 20, Vorl., § 3. Vedi anche POINCARÉ, *Théorie des Tourbillons* [Paris, Gauthier-Villars, 1893], Ch. IV; APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, t. III [3^e éd.; Paris, Gauthier-Villars, 1921], § 792; LAMB, *Hydrodynamics* [V ed., Cambridge, University Press, 1924], § 157.

tutti gli altri vortici⁽¹⁾. Precisamente, l'attrazione esercitata dal vortice k -esimo sul vortice b -esimo sarebbe

$$(4) \quad \mathbf{A}_b = - \frac{C_b C_k}{2 \pi \rho_{\infty}} \mathbf{u}_{bk},$$

dove \mathbf{u}_{bk} è il versore di $\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_b$, e l'attrazione totale sul vortice b -esimo sarebbe

$$(5) \quad \mathbf{A}_b = - \sum_{k=1}^{n(b)} \frac{C_b C_k}{2 \pi \rho_{\infty}} \mathbf{u}_{bk},$$

dove il simbolo $\sum_k^{n(b)}$ indica la somma degli $n - 1$ termini ottenuti dando a k tutti i valori interi da 1 a n che sono diversi da b . Utilizzando la funzione W si può scrivere⁽²⁾

$$(6) \quad \mathbf{A}_b = \text{grad}_{\mathbf{P}_b} W.$$

Si noti ancora che il vettore

$$(7) \quad \mathbf{S}_b = C_b \left(- \frac{d\mathbf{y}_b}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{x}_b}{dt} \mathbf{j} \right)$$

può ottenersi moltiplicando la velocità di \mathbf{P}_b per $|C_b|$ e rotando il vettore ottenuto di un angolo retto nel senso della circolazione corrispondente al vortice considerato. Con chiara referenza al teorema di Kutta e Joukowski, questo vettore può denominarsi *forza di sostentamento* sul vortice b -esimo.

In virtù delle (6) e (7) le (3) divengono

$$(8) \quad \mathbf{A}_b + \mathbf{S}_b = 0 \quad (b = 1, \dots, n).$$

Sono queste le equazioni annunciate; esse esprimono che *durante il movimento libero di un vortice rettilineo si fanno equilibrio la forza di attrazione e la forza di sostentamento*.

Meccanica. — *Sulla forza elettromotrice di una pila monometallica a gas ionizzato*. Nota di G. PICCARDI, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) V. CISOTTI, *Effetti dinamici di un fluido che circola tra quantisivogliano cilindri sottili ad assi paralleli* (questi « Rendiconti », vol. III, ser. 6^a, 1^o sem. 1926, pp. 517-520); ciò che affermo è contenuto nelle formule (8).

(2) V. ad. es. MARCOLONGO, *Meccanica razionale*, vol. I (2^a ed.: Milano, Hoepli, 1917), p. 225, es. 2.

Meccanica. — *Ancora sul teorema di Kutta-Joukowski nel caso della lastra piana.* (Complemento alla Nota del luglio 1928. Fasc. 1-2). Nota di E. PISTOLESI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sulla misura interferometrica della lunghezza d'onda effettiva di stelle doppie e della sua variazione con la distanza zenitale.* Nota di M. MAGGINI, presentata dal Socio E. BIANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico.* Nota di G. ALIPRANDI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica mineraria. — *Rilievi gravimetrici ed isostasia.* Nota ⁽¹⁾ di A. BELLUGI, presentata dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

Le considerazioni che esporremo trovano la loro ragion d'essere e la loro pratica applicazione quando si devono eseguire misure col variometro di gravità in prossimità di catene montuose, o in vicinanza di litorali, come ad esempio, nella valle Padana, dove attualmente tre squadre gravimetriche italiane dell'A. G. I. P. (Azienda Generale Italiana Petroli), con pendoli e bilancie di torsione rilevano la distribuzione della gravità nella pianura marginale appenninica.

Esse permetteranno di giustificare il raggruppamento delle misure gravimetriche in due distinti gruppi:

1. Marginale appenninico e marginale alpino;
2. Zona centrale della pianura padana.

Le misure del 1° gruppo, che hanno portato finora alla scoperta, in pianura, di alcune anticlinali diapiriche di argille scagliose parallele all'andamento appenninico, non possono essere affette, se non in modo insignificante e praticamente nullo, da correzione isostatica, specie poi se le sezioni orizzontali dell'anticlinali sono ellissi molto schiacciate con l'asse minore normale all'andamento montano.

Le misure del 2° gruppo invece possono essere affette da una notevole correzione isostatica, sull'entità della quale non ci si può pronunciare fino a tanto che non si avranno sicuri dati di misurazioni geodetiche in corso.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1928.

Preciseremo il significato e la portata di un'eventuale influenza isostatica sulle misure col gradiometro e le conseguenze che ne possono derivare per l'interpretazione geologica dei risultati gravimetrici.

È noto come dai valori bruti di osservazione, ricavati con la bilancia di torsione, si passi ai valori di gradienti e curvature dovuti esclusivamente a masse sotterranee invisibili.

Si debbono fare le correzioni delle molteplici influenze che furono già chiaramente indicate, nelle sue classiche memorie sulla bilancia di torsione, dall'Eötvös.

Ma anche i cosiddetti valori sotterranei possono essere dovuti ad una somma di cause, alcune delle quali senza particolare interesse per la ricerca mineraria che ci si propone. Trattandosi però di cause sotterranee è difficile discriminare le une dalle altre, per quanto questo problema possa assumere un'importanza fondamentale. In questi casi si dovranno effettuare, le cosiddette « correzioni topografiche del sottosuolo » valendosi dei dati forniti dal geologo, desunti da piccole perforazioni geologiche appositamente compiute o da eventuali perforazioni esistenti nelle pianure.

Tra le correzioni topografiche del sottosuolo, è da annoverare anche quella che comporta le condizioni isostatiche della zona, sia questa isostaticamente compensata o no.

Nel 1° caso $\Delta g'_0 = g'_0 - \gamma_0 = 0$, dove g'_0 è il valore osservato di g a cui sono state applicate la riduzione topografica e quella di Faye, γ_0 è il valore normale della gravità di una Terra omogenea; nel 2° caso $\Delta g'_0 \neq 0$ e si avrà eccedenza o *deficit* di massa. In verità, il criterio $\Delta g'_0 = 0$ presenta alcune insufficienze rilevate e rimosse da H. Jung che introduce un criterio più esatto e rigoroso (« Zeit. Geoph. » 1928, H. 8) a cui bisogna attenersi per ben definire quantitativamente l'isostaticità di una zona.

Sugli elementi eötvössiani si pronuncia un'influenza isostatica quando ci si avvicina e si raggiunge quindi il limite della zona di compensazione isostatica, zona definibile mercè accurate ed opportune misurazioni geodetiche, non escluse quelle eötvössiane, per quanto queste ultime non siano mai state finora impiegate per tale scopo⁽¹⁾.

La compensazione isostatica, che avviene sempre internamente ad una regione che circonda la base della zona montuosa (in grado di provocare l'effetto isostatico) determina appunto quelle condizioni orizzontali di densità, presupposto necessario affinché sorgano gradienti di gravità, diretti dalla zona di compensazione alle zone limitrofe compensate o no, ma a densità maggiore.

(1) Un'idea della quantità minima di massa (giacimento sferico) posta a diversa profondità nel sottosuolo e a $\Delta \sigma = 0$, rintracciabile col gradiometro, è data in una nostra Nota: *Disturbi gravimetrici di corpi e giacimenti del sottosuolo ecc.* « L'industria Mineraria », III-IV, 1928.

Applicando a g'_0 la riduzione di Bouguer, la g'_0 si trasforma in g''_0 (eliminazione dello strato o degli strati condensati) e si ha allora la sola influenza delle masse della crosta.

È il $\Delta g''_0 = g''_0 - \gamma$ ciò che caratterizza il *deficit* (nel caso di montagne) dovuto all'isostasia, delle masse crostali, *deficit* definibile dopo la riduzione di Bouguer. Questo *deficit*, che si estende in profondità e larghezza, crea le condizioni di applicabilità della Bilancia di torsione. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di $\Delta g''_0$ basta tener presente che, secondo Helmert, uno strato di 10 a m. condensato su una superficie NN, di densità media 2.4 corrisponde ad un valore di $\Delta g''_0 = 0.00$ a cm. sec^{-2} ; nel caso di isostasia completa 10 a è circa uguale ad h , dove h è l'altezza del luogo d'osservazione.

L'influenza isostatica si pronuncerà in direzione normale all'andamento della catena montana, a partire da una certa distanza minima dallo zoccolo del massiccio montuoso; essa raggiungerà il suo massimo nella zona delimitante i prismi compensati, zona limite o di confine che potrebbe essere ben studiata anche col gradiometro nelle regioni pianeggianti ad anomalia isostatica nulla.

Se l'andamento generale delle catene di montagne è piuttosto regolare, si dovrà tener conto principalmente di quella componente azimutale della influenza isostatica, definibile come si è detto sopra, e che è senza dubbio preponderante su tutte le altre.

Supponiamo ora che si riesca ad individuare, ad una certa distanza di una catena montana, distanza limite della compensazione orizzontale, (catena che per semplicità immaginiamo chiusa) una distribuzione convergente di gradienti di gravità, una formazione ad aspetto di anticlinale gravimetrica. In tal caso l'apparente anticlinale gravimetrica può esser data dalla mancata correzione isostatica. A correzione isostatica effettuata avremo un disturbo sotterraneo nullo. Effettivamente esiste un disturbo sotterraneo dovuto all'isostasia, un'apparente anticlinale isostatica, e non è poi detto che il disturbo isostatico non possa avere infine un valore geologico minerario, per quanto sia difficile ben definirlo.

In ogni caso si tratti di anticlinale tectonica, di disturbo isostatico, di fenomeno locale o di fenomeno regionale, l'importante è poter discriminare bene tutto ciò, e non interpretare i disturbi gravimetrici sotterranei senza una accurata analisi delle cause, talvolta complesse.

Se la catena montana è aperta, decorrente nella direzione nord-sud, e se si constatano gli stessi effetti gravimetrici accennati prima, l'apparente anticlinale tectonica potrà deformarsi per effetto della correzione isostatica: svanire la gamba ovest od est, ma non quelle sud e nord, ragione per cui la formazione tectonica gravimetricamente individuata, manterrà sempre un certo interesse.

Si potrebbero dedurre subito una serie di regole pratiche per potersi orientare, dato un andamento montano, sui possibili effetti isostatici nei

rilievi eötvössiani nelle zone pedemontane, ma questo ci porterebbe lontano dal nostro assunto.

Le questioni si complicano invece quando si debbono interpretare rilievi gravimetrici eseguiti in una pianura tra due sistemi più o meno regolari e paralleli, caso questo poi che, a grandi linee, potrebbe ricondursi a quello di rilievi in una pianura circoscritta da una formazione chiusa di sistema montano.

Tutto ciò vale quando si effettuano rilievi gravimetrici alquanto discosti dalla linea marginale del sistema montano: immediatamente a ridosso a tale linea si opera in una zona di compensazione, ad uniforme densità di materia del prisma compensato, e non in una zona di trapasso da una di compensazione ad altra di compensazione. Come pure se le zone di compensazione limitrofe sono molto estese, gli effetti isostatici potrebbero esser nulli anche ad una certa distanza dalle linee di delimitazione di tali zone, di modo che si potrebbe parlare, in alcuni casi, d'influenza isostatica nulla, anche se in zone isostatiche ad eccesso di massa.

Queste osservazioni, se pure leggermente modificate, mantengono sempre la loro ragion d'essere anche se non si accetta l'ipotesi isostatica, ipotesi che, d'altra parte oggi il Bowie chiama senz'altro « Principio Isostatico »: occorre, in ogni caso, porre attenzione ai fenomeni gravimetrici a carattere generale, fenomeni necessariamente collegati a grandi manifestazioni geologiche, catene montane, oceani, e che, potendo essere concomitanti ad altri di carattere locale, possono mascherare, alterare questi ultimi, che hanno infine un maggior interesse minerario.

Il raggruppamento esposto in principio delle misure gravimetriche nella pianura padana trova così, la sua piena giustificazione, e le considerazioni svolte permettono inoltre un subito orientamento su l'interpretazione di rilievi eötvössiani anche se essi appartengono al secondo gruppo. Una grande anticlinale gravimetrica profonda decorrente ad esempio lungo la mezzaria della bassa pianura padana nel senso est-ovest, anticlinale aperta verso est (Adriatico), data la configurazione geografica dei sistemi appenninico ed alpino a nord, ad ovest ed a sud della pianura padana, potrebbe denotare, con molta probabilità, un fenomeno prevalentemente isostatico.

Fisica. — *L'influenza dei raggi X sulle condizioni di struttura del bismuto e del tellurio.* Nota di E. ADINOLFI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla teoria della fluorescenza sensibilizzata.* Nota di A. CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide.* - IV. *Analisi termica dei sistemi* MgCl_2 — FeCl_2 *e* CdCl_2 — FeCl_2 *anidri* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. FERRARI e di M. CARUGATI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Nella Nota III del presente studio ⁽³⁾ è stato detto come in base alle analogie dei reticoli cristallini fosse prevedibile una completa miscibilità allo stato solido per i sistemi formati dalle quindici coppie che si possono ottenere coi cloruri anidri di magnesio, cobalto, nichelio, ferro e manganese bivalenti. A conferma di questa supposizione è stato ricordato come tre di questi sistemi (MgCl_2 — MnCl_2 , MnCl_2 — CdCl_2 e MgCl_2 — CdCl_2) studiati precedentemente da altri autori, danno miscibilità completa.

Lo stesso comportamento si dimostrò essere presentato dalle coppie MnCl_2 — CoCl_2 , CdCl_2 — CoCl_2 e MgCl_2 — CoCl_2 che non erano state fino allora studiate. Estendiamo nella presente Nota l'indagine a due altre coppie delle quindici sopra ricordate e precisamente a quelle MgCl_2 — FeCl_2 e CdCl_2 — FeCl_2 .

Lo studio di questi sistemi è stato fatto usando il solito dispositivo rappresentato dalla fig. 1 della prima Nota del presente studio ⁽⁴⁾.

Per impedire l'ossidazione del cloruro ferroso venne fatta la fusione in corrente di acido cloridrico addizionato di poco idrogeno (circa 10 %).

Non si può immergere direttamente la coppia termoelettrica nelle miscele con cloruro ferroso perchè si nota un attacco della stessa, forse dovuto al separarsi di ferro elementare che si allega al platino.

Si evita questo attacco introducendo nella massa fusa la coppia protetta da una guaina di porcellana.

Nel presente lavoro furono impiegati del cloruro di magnesio e di cadmio anidri ottenuti per disidratazione in corrente di acido cloridrico dei corrispondenti cloruri idrati della ditta C. Erba, e del cloruro ferroso pure anidro ottenuto disidratando in corrente di acido cloridrico ed in presenza di lamine di ferro puro del cloruro ferroso, per analisi, della ditta Merk.

La purezza di questi prodotti venne confermata dalla determinazione dei punti di fusione che si trovarono concordanti con quelli di precedenti determinazioni.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica-fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1928.

(3) Questi « Rendiconti », (6°), VIII (1928), 238-243.

(4) Questi « Rendiconti », (6°), VII (1928), 850.

Come si prevedeva le due coppie in esame danno una miscibilità completa allo stato solido con temperature degli inizi di solidificazione intermedie a quelle di fusione dei componenti puri.

Il colore delle miscele dei due sistemi si differenzia. In quelle col cloruro di magnesio, questo pare agire da semplice diluente perchè la colorazione verde-bruna del cloruro ferroso fuso, va attenuandosi gradatamente

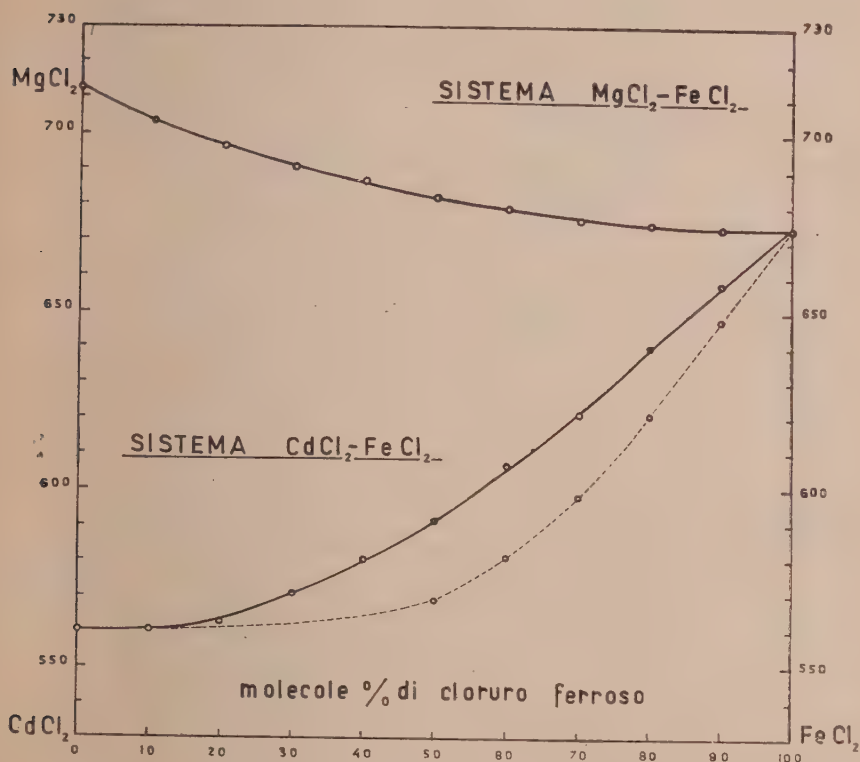


Fig. 1.

coll'aumentare del contenuto in cloruro di magnesio senza cambiare di tono. All'opposto nelle miscele col cloruro di cadmio l'aumentare di questo porta oltre che all'indebolimento della colorazione del cloruro ferroso ad uno spostamento della stessa verso l'azzurro.

A conferma della miscibilità completa che abbiamo detto si riscontra in questi sistemi riportiamo nelle tabelle I e II i dati sperimentali sul comportamento alla fusione delle diverse miscele.

Questi dati sono rappresentati graficamente dalle curve della fig. 1.

TABELLA I.
Sistema $\text{MgCl}_2 - \text{FeCl}_2$.

Molecole % di FeCl_2	Inizio della cristallizzazione	Molecole % di FeCl_2	Inizio della cristallizzazione
0	712°	60	679°
10	703	70	676
20	696	80	675
30	691	90	674
40	687	100	674
50	682	—	—

Gli intervalli di cristallizzazione sono così piccoli che non si possono praticamente apprezzare: abbiamo quindi segnato solo gli inizi della cristallizzazione.

TABELLA II.
Sistema $\text{CdCl}_2 - \text{FeCl}_2$.

Molecole % di FeCl_2	Inizio della cristal- lizzazione	Fine della cristal- lizzazione	Molecole % di FeCl_2	Inizio della cristal- lizzazione	Fine della cristal- lizzazione
0	560°	—	60	607°	581°
10	560	—	70	621	598
20	562	—	80	641	621
30	571	—	90	658	648
40	580	—	100	674	—
50	591	568°	—	—	—

Per le prime quattro miscele non si può individuare con precisione la fine della cristallizzazione, nelle miscele più ricche di cobalto la fine della solidificazione è però nettamente rilevabile.

Riassumendo:

Si dimostra che i due sistemi $\text{MgCl}_2 - \text{FeCl}_2$ e $\text{CdCl}_2 - \text{FeCl}_2$ presentano una miscibilità completa allo stato solido, come era stato previsto in relazione alla struttura cristallina simile dei componenti.

Chimica-fisica. — *I livelli di Röntgen delle terre rare e le deviazioni della legge di Moseley.* Nota di G. PICCARDI, presentata dal Socio L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Pinaconi e pinacoline*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di E. PACE, presentata dal Socio R. NASINI.

In una precedente Nota⁽³⁾ ho studiato l'azione dei composti organo-magnesiaci sui γ -dichetoni ottenendo dei glicoli biterziari i quali potevano trasformarsi con molta facilità in derivati eterociclici del tetraidrofurfurano, tetraidropirrollo e tetraidrotiofene.

Continuando lo studio, ho voluto applicare tale reazione agli α ed ai β dichetoni.

Il diacetile, primo e più importante, termine degli α -dichetoni, preparato secondo Pechmann⁽⁴⁾ per sdoppiamento del nitroso metilettilchetone sotto l'azione dell'acido solforico diluito, presenta tutte le proprietà di un vero e proprio dichetone in quanto può dar luogo a mono e diossime, a monofenilidrazoni ed a osazoni, reagisce, come vedremo, con due molecole di alogeno magnesio alchile generando alcoli α -biterziari (pinaconi).

L'acetilacetone, termine più importante dei β -dichetoni, si differenzia invece alquanto dagli α e dai γ dichetoni per le sue proprietà fisiche e chimiche.

È stato ottenuto per decomposizione con acido solforico diluito e freddo dell'acetilacetone di rame, ottenuto a sua volta per azione del sodio metallico sull'acetone sciolto in etere acetico e successivo trattamento con acetato di rame⁽⁵⁾.

L'acetilacetone è un liquido incolore di odore gradevole p. e. 137°, ha un carattere acido alquanto pronunziato, decompone facilmente i carbonati ed alcuni sali di acidi deboli ed ha la proprietà di colorarsi in rosso sangue, in soluzione alcoolica, con una goccia di cloruro ferrico. Questa reazione è da mettersi in rapporto al fatto che l'acetilacetone esiste sotto forma enolica come lo dimostra pure la determinazione della rifrazione molecolare (Perkin, Brühl).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Farmacologia Sperimentale e Tossicologia della R. Università di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1928.

(3) « Rend. Acc. Lincei », (6), 7, 757 (1928).

(4) « Ber. », 40, 4337.

(5) « Bull. Soc. Chim. », (3), I, 496.

Si può ¹⁰ dimostrare che l'acetaldeide esiste sempre sotto forma anidrica ed è capace a reagire per addizione con alcune sostanze inorganiche ed altre, come è stato già detto. Questo si può dimostrare analiticamente in parte. L'acetaldeide si ossida facilmente all'acido acetico, che può essere isolato per distillazione frazionata. L'acetaldeide si ossida anche all'acido formico, che può essere isolato per distillazione frazionata.

Tra tutti i prodotti dell'acetaldeide quella di reagire con il cianuro di sodio è quella che ha dato le migliori notizie.

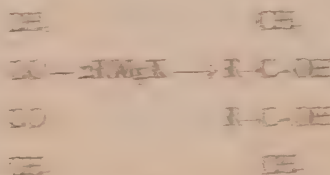
Se una parte di acetaldeide contenente un poco di acqua si ossida con il cianuro di sodio, si ottiene un liquido viscoso che si solidifica a -10°C. e si fonde a -15°C. Questo liquido si ossida facilmente all'acido acetico, che può essere isolato per distillazione frazionata. L'acetaldeide si ossida anche all'acido formico, che può essere isolato per distillazione frazionata.

Il prodotto che si ottiene quando l'acetaldeide si ossida con il cianuro di sodio è quello che ha dato le migliori notizie.

Forme isomeriche

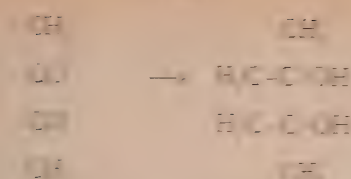
Quando si ossida l'acetaldeide con il cianuro di sodio, si ottiene un liquido viscoso che si solidifica a -10°C. e si fonde a -15°C. Questo liquido si ossida facilmente all'acido acetico, che può essere isolato per distillazione frazionata. L'acetaldeide si ossida anche all'acido formico, che può essere isolato per distillazione frazionata.

L'acetaldeide si ossida facilmente all'acido acetico, che può essere isolato per distillazione frazionata. L'acetaldeide si ossida anche all'acido formico, che può essere isolato per distillazione frazionata. Il prodotto che si ottiene quando l'acetaldeide si ossida con il cianuro di sodio è quello che ha dato le migliori notizie.



Quando si ossida l'acetaldeide con il cianuro di sodio, si ottiene un liquido viscoso che si solidifica a -10°C. e si fonde a -15°C. Questo liquido si ossida facilmente all'acido acetico, che può essere isolato per distillazione frazionata.

Il prodotto che si ottiene quando l'acetaldeide si ossida con il cianuro di sodio è quello che ha dato le migliori notizie.



Presenta un alto punto di fusione per azione percolare, cristallizza in forme solite in cristalli fusi a 147° il cui punto di solidificazione è di 171° . Il puro cristallizza dall'acqua ed i cristalli contengono tracce di molecole di acqua di cristallizzazione e sono fusi a 147° .

Diventa con miceli cremosi al tempo ed insieme. Per azione del bromo e del iodio in soluzione acquosa da saponamento saponificante e indifferente.

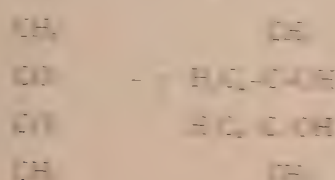
Analisi elementare ha dato (per ossido acido):

	Trovato %:	C 60.4	H 11.22
per $\text{C}_8\text{H}_{10}\text{O}_4 = 154$	Calcolato %:	C 60.1	H 11.18

(per ossido con H_2O)

	Trovato %:	C 54.82	H 11.8
per $\text{C}_8\text{H}_{12}\text{O}_4 = 156$	Calcolato %:	C 54.86	H 11.9

Metamorfismo-2-4 dimetilmetano-1,3 — Si ottiene per azione del bromo ed iodio. Il reagente colora l'acido bromico. Saponificazione del prodotto con acqua:

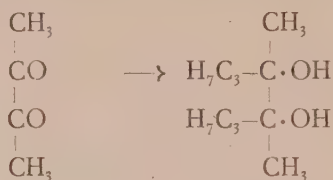


Cristalli fusi a 147° o a 200° sono soliti a dissolversi per azione. Dure cristalline. Non saponifica acqua di cristallizzazione. Ha gli stessi caratteri del composto ottenuto da Lanthanum-2-4 per azione del sodio ed del metano di metilmetano.

Analisi elementare ha dato:

	Trovato %:	C 54.21	H 12.7
per $\text{C}_8\text{H}_{12}\text{O}_4 = 156$	Calcolato %:	C 54.17	H 12.9

METILPROPILPINAONE-2.3 DIPROPILBUTANDIOLO (2.3). — Dal diacetile sul bromuro di magnesio propile e decomposizione del prodotto con acqua:



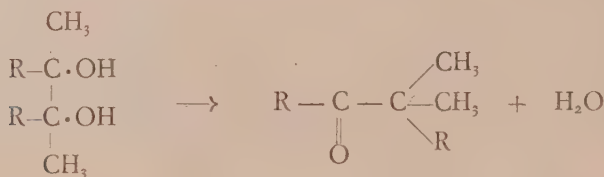
Cristalli fusibili a 62°, p. e. 228°-230°. Odore caratteristico canforaceo. Friedel⁽¹⁾ ottenne un composto analogo riducendo il metilpropilchetone con sodio metallico in presenza di acqua.

L'analisi elementare ha dato:

	Trovato %	C 68.48	H 12.11
per C ₁₀ H ₂₂ O ₂ = 174	Calcolato %	C 68.95	H 12.46

PINACOLINE. — Sono state ottenute per disidratazione dei pinaconi con acido solforico diluito 1 a 4 e successiva distillazione in corrente di vapore.

I pinaconi essendo solubili in acido solforico diluito danno un liquido limpido ed incolore che per riscaldamento s'intorbidisce e prima di entrare in ebollizione separa un olio giallastro che per distillazione in corrente di vapore passa incolore. Quest'olio che rappresenta la pinacolina impura per pinacone, non trasformato e trascinato dal vapor d'acqua, viene separato dall'acqua, essiccato su cloruro di calcio, rettificato e purificato:

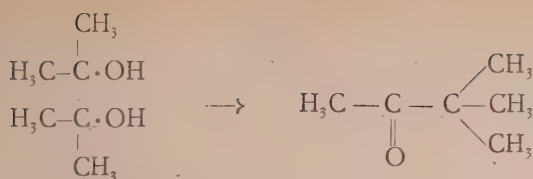


Per la purificazione ho seguito il metodo proposto da Delange⁽²⁾. L'olio ripreso col reattivo di Denigès viene portato a 100°-105° in tubo chiuso; dopo lavaggio dell'olio con acqua ed essiccamento su cloruro di calcio è nuovamente frazionato. Il rendimento è del 50-60 % del pinacone adoperato.

METIL-TERZIARIO-BUTILCHETONE-2.2 DIMETIL-BUTANONE (3). — Per disidratazione del pinacone mediante acido solforico:

(1) « Jahresbericht », 1869, 513.

(2) « Bull. », (4), 3, 913.

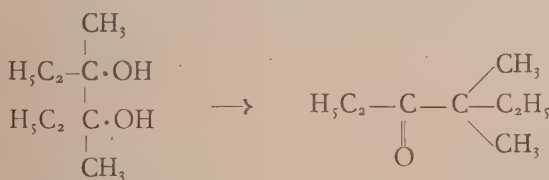


È la comune pinacolina, liquido di odore mentaceo caratteristico, p. e. 105°. Solubile in acetone, alcool ed etere, meno in acqua. Non precipita con acido bromidrico, nè col reattivo di Denigès. Dà la reazione di Legal. Aggiunge bisolfito e dà un'ossima fusibile a 75°. Non dà la reazione dell'iodoformio. Ossidata con acido cromico dà acido trimetilacetico.

L'analisi elementare ha dato:

	Trovato %	C 71.84	H 11.7
per C ₆ H ₁₂ O = 100	Calcolato %	C 72.—	H 12.—

ETIL-TERZIARIO-AMILCHETONE-3.3 DIMETIL-ESANONE (4). — Si ottiene per eliminazione di una molecola di acqua dal metiletilpinacone:



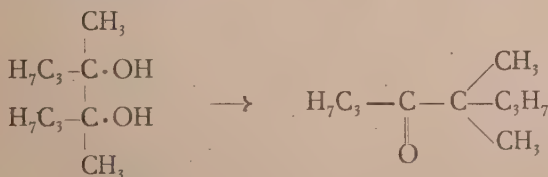
Liquido leggermente giallastro di odore canforaceo, p. e. 151°. Solubile in acetone, alcool ed etere. Dà la reazione di Legal e precipita l'iodoformio trattato con soluzione iodo iodurata. Aggiunge facilmente bisolfito e dà un'ossima fusibile a 112°. Per ossidazione cromica dà acido dimetiletilacetico.

Wischnegradski⁽¹⁾ ottenne lo stesso chetone per azione dello zinco etile sul cloruro dell'acido dimetiletilacetico.

L'analisi elementare ha dato:

	Trovato %	C 74.26	H 13.1
per C ₈ H ₁₆ O = 128	Calcolato %	C 75.—	H 12.5

PROPIL-TERZIARIO-ESILCHETONE-4.4 DIMETIL-OTTANONE (5). — Per disidratazione del metilpropilpinacone mediante acido solforico:



(1) « Ann. », 178, 107.

Liquido leggermente colorato in giallo, odore canforaceo; p. e. 185°-187°. È solubile in etere, acetone ed alcool. Dà la reazione dell'iodoformio e quella di Legal. Aggiunge difficilmente il bisolfito. L'ossima fonde a 152°. L'analisi elementare ha dato:

	Trovato %	C 76.5	H 12.8
per $C_{10}H_{20}O = 156$	Calcolato %	C 76.92	H 12.82

Da quanto ho precedentemente accennato e da quello che ho riferito nella nota già citata si può concludere che gli α ed i γ -dichetoni reagendo con i derivati organo magnesiaci originano dei glicoli biterziari, mentre i β -dichetoni trovandosi sotto forme desmotrope restano completamente inattivi alla reazione.

Chimica Fisiologica. — *Sulla composizione chimica di alcune paste alimentari e sulle modificazioni da esse subite per opera della cottura in acqua.* Nota ⁽¹⁾ di L. SETTIMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

La composizione delle paste alimentari, delle diverse qualità e forme, ottenute dai semolini di frumento, è ben nota ⁽²⁾, come pure i limiti entro i quali oscillano le percentuali delle differenti qualità di paste alimentari.

Scopo del presente lavoro è di integrare i dati analitici, di un tipo di paste alimentari, maccheroni, con altri dati importanti per giudicare delle proprietà fisiologiche ed in special modo per avere la base per il calcolo del rispettivo valore nutritivo.

I tipi di maccheroni, delle diverse forme, che si trovano oggidì sul mercato sono due:

1° qualità extrafina;

2° qualità fina (1°).

Dei due tipi di maccheroni ho analizzato alcune forme (spaghetti, vermicelli, bucatini, ziti medi, penne) prelevati in negozi e luoghi differenti.

La media dei risultati ottenuti per i due detti tipi sia pure di forme diverse ⁽³⁾, sono riassunti nella Tabella I. In essa ho esposto anche i dati analitici di una pasta di frumento di 3ª qualità evidentemente avariata.

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1928.

(2) G. SILVESTRI e G. SAVINI, « Annali Laborat. Chimic. Centrale Gabelle », t. VIII, p. 111; G. ISSOGLIO, *La chimica degli alimenti*, vol. II, p. 409.

(3) Giacchè la forma non ha influenza sulla composizione.

TABELLA I.

Tipi della pasta	Umidità %	Residuo secco %	Sostanza azotata totale %	Sostanze azotate solubili %	Costituzione delle sostanze azotate solubili %	Sostanza grassa e lipidi %	Ceneri %	Amido e zuccheri %	Cellulosa %	Acidità in acido lattico %	Calorie per 100 grammi
Tipi extra-fini . . .	9.85	90.15	12.07	7.90	Albumose peptoni assenza aminoacidi	0.55	0.59	76.51	0.21	0.12	368
Tipi 1 ^a qualità . . .	10.45	89.55	12.08	8.80	id.	0.71	0.74	74.85	0.35	0.16	360
Pasta 3 ^a qualità avariata	9.67	90.33	13.56	9.60	presenza di amino acidi	1.35	0.86	73.77	0.31	0.51	—

Dal confronto dei dati esposti nella Tabella I, risulta che la sostanza azotata solubile dei due tipi di paste alimentari, in confronto alla sostanza azotata totale, è quasi nella stessa proporzione, mentre nella pasta avariata è notevolmente superiore, ed inoltre, mentre nelle buone paste alimentari la sostanza azotata solubile è costituita da albumose e peptoni con assenza assoluta di aminoacidi, nella pasta avariata si riscontra la presenza di una quantità sensibile di aminoacidi, e questo analogamente a quanto si era già fatto notare in un precedente lavoro ⁽¹⁾.

Altre indagini ho fatto per la ricerca quantitativa dell'acqua assorbita dalla pasta durante il periodo della cottura e la perdita che subisce la pasta nella cottura.

TABELLA II.

Tipo di pasta	Acqua assorbita dalla pasta a completa cottura	Perdita subita dalla pasta nella cottura con	
		acqua Marcia	acqua comune con il 0.50 % di sale
Pasta 1 ^a qualità	185 %	9-10 %	7-8 %
Pasta qualità extra	195 %	6-7 %	4-5 %

(1) L. SETTIMI, *Sulla composizione chimica di alcuni generi alimentari*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », 1927, vol. VI, ser. 6^a, 2° sem., fasc. 9.

TABELLA III.

Tipo di pasta		Composizione reale della parte di pasta che rimane nell'acqua di cottura	Composizione calco- lata ritenendo la fra- zione della pasta sciolta nell'acqua di cottura come una frazione di pasta intiera
1 ^a Qualità	Sostanze azotate	0.63	0.94
	Zuccheri, destrina, amido. .	5.90	5.49
Qualità extra	Sostanze azotate	0.40	0.59
	Zuccheri, destrina, amido. .	4.00	5.38

Dalla comparazione dei dati esposti nelle Tabelle II e III risulta che la cottura della pasta con acqua salata evita una perdita della pasta nell'acqua di cottura.

La composizione della parte di pasta, che rimane nell'acqua di cottura, non è costituita in parti proporzionali dei componenti la pasta originale, ma bensì la maggior parte di quella che rimane nell'acqua di cottura è la sostanza amidacea, mentre della sostanza azotata si perde, in proporzione, una minore quantità.

Da quanto sopra si è esposto si deduce che per calcolare il valore nutritivo della pasta alimentare speciale, tipo maccheroni, bisogna tenere conto anche della perdita, che detta pasta fa nell'acqua di cottura, che, nelle paste comuni può raggiungere anche il 10 %.

Interessante è anche stabilire quali trasformazioni subisce la pasta nella cottura.

Innanzitutto ho osservato al microscopio le paste prima della cottura e dopo la cottura.

Nelle paste, prima della cottura, i granuli di amido non presentano come nella farina un contorno preciso e netto, ma per la maggior parte si presentano un po' contorti, alcuni con profonde spaccature; l'ilo centrale è sempre rappresentato come da un punto.

Dopo la cottura invece i granuli assumono una maggiore grandezza, la massa è spezzettata e frammentata, i pochi granuli di amido rimasti ancora interi presentano i contorni ondulati; nell'interno si notano delle stratificazioni come nei granuli di fecola, e l'ilo centrale non è più un semplice punto ma è rappresentato da un vacuolo.

Tali trasformazioni fisiche sono dovute alla imbibizione dell'acqua durante la cottura.

Nelle paste cotte non si riscontra più la composizione chimica molecolare delle stesse paste prima della cottura.

Nelle paste cotte si riscontra una notevole quantità, circa il 20 % riferito alla pasta originale, di amido solubile (salda) e circa il 6 % di zuccheri riducenti calcolati come glicosio.

La sostanza azotata solubile della pasta, dopo la completa cottura, diminuisce sensibilmente in confronto a quella che si riscontra nella pasta originale, scendendo a circa 1.50–1.60 % riferita alla pasta impiegata.

Tale importante fatto molto probabilmente è dovuto in parte alla idratazione del glutine ed in parte all'azione del cloruro di sodio, che nella pasta cotta si riscontra nella proporzione di circa 0.20–0.25 %.

La sostanza grassa della pasta non subisce alcuna modificazione.

Chimica. — *Influenza del magnesio metallico sulla formazione di aldeide formica e di zuccheri per azione dei raggi ultravioletti sulle soluzioni di bicarbonato di calcio.* Nota di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Corrisp. M. G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica Agraria. — *Nuovo metodo per il dosamento volumetrico del cobalto.* Nota di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio R. NASINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Dimostrazione istochimica del glutatione e sua distribuzione in alcuni organi*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di P. DI MATTEI e di F. DULZETTO, presentata dal Corrisp. A. RUSSO.

La possibilità di riconoscere non solo la presenza del glutatione ma in particolar modo la sua distribuzione nei singoli elementi cellulari appare pel biologo una condizione indispensabile all'ulteriore sviluppo delle conoscenze che finoggi si sono acquisite sul dipeptide di Hopkins mediante l'estrazione di questa sostanza dagli organi in *toto*. Particolarmente interessante si dimostra tale possibilità quando si tratti di organi, la cui struttura non consenta di isolare i tessuti di cui essi risultano costituiti. In questi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e anatomia comparata della R. Università di Catania.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1928.

casi la ricerca istochimica appare come l'unica via che consenta di precisare non solo la reale distribuzione del glutatione, ma di rilevare entro certi limiti le differenze della reazione cromatica offerta dagli elementi cellulari, e di dedurne un criterio quantitativo relativo.

Mancano tuttavia delle norme di tecnica microscopica. La bibliografia registra, sì, qualche applicazione della nota reazione al nitroprussiato su sezioni di tessuti animali (Binet e Giroud)⁽¹⁾ e Joyet-Lavergne⁽²⁾ e di tessuti vegetali (Joyet-Lavergne)⁽³⁾ e Binet e Giroud accennano altresì all'impiego di sezioni per congelazione, ma conviene rilevare che in questi lavori le osservazioni microscopiche hanno nella esposizione la prevalenza sulle modalità di tecnica adoperate.

Per una maggiore estensione di tali ricerche le modalità di tecnica rappresentano tuttavia una condizione indispensabile. Fermare la nostra attenzione su questo punto ci è sembrato in questo momento non privo di interesse.

Pezzi di organi isolati dell'animale, immersi in una soluzione di acido trichloracetico o sezionati per congelazione danno chiaramente la nota reazione al nitroprussiato ammoniacale. Questa reazione si manifesta assai più uniformemente e con maggior evidenza se le sezioni dopo trattamento con nitroprussiato di sodio vengano esposte rapidamente ai vapori di idrato di ammonio concentrato. L'esposizione deve essere limitata al tempo strettamente necessario perchè si abbia la reazione.

L'immersione in acido trichloracetico tanto dei pezzi che delle sezioni può essere prolungata per parecchi giorni senza danno, e col vantaggio di eseguire con comodo le ricerche. D'altro canto il pezzo indurendosi consente di ottenere al microtomo per congelazione delle sezioni più sottili che nei pezzi freschi.

La concentrazione della soluzione acetica può variare dal 15 al 20% a seconda dei tessuti.

L'immediata coagulazione delle sostanze proteiche per opera dell'acido trichloracetico, specie se di concentrazione rilevante, impedisce il passaggio del glutatione nel liquido, che tuttavia conviene mantenere in quantità appena sufficiente per l'immersione del pezzo. Questa immersione, anche se prolungata per parecchi giorni, non nuoce nè alla struttura del tessuto, nè all'intensità della reazione, che è quanto dire al criterio valutativo della quantità di dipeptite distribuito nelle diverse cellule; come opportuni controlli eseguiti su materiale fresco ci hanno dimostrato.

(1) BINET L. et GIROUD A., *Glandes surrenales et glutation*. «Comptes-Rendus Soc. Biol.», t. 98, 1928.

(2) JOYET-LAVERGNE, *Sur les rapports entre le glutation et le chondriome*. «C. R. Académie des Sciences», t. CLXXXIV.

(3) ID., *Sur les rapports entre le glutation et le potentiel d'oxidation intracellulaire*. «C. R. Soc. Biol.», T. 97, 1927.

L'osservazione microscopica consente inoltre di escludere eventuale diffusione di glutatione sul preparato. Parti a reazione perfettamente negativa sono visibili accanto a parti intensamente colorate, in perfetta corrispondenza con quanto si rileva su sezioni di tessuto fresco trattate con nitroprussiato ed ammoniacca.

I pezzi freschi possono altresì essere immersi in alcool assoluto dove per parecchi giorni conservano perfettamente la capacità di dare la reazione.

I liquidi conservativi a base di bicloruro di mercurio sono del tutto inadatti.

I pezzi in congelazione conservano la nitidezza della reazione.

Nella reazione del glutatione nelle sezioni ottenute per congelazione è fugace come quella dei liquidi estrattivi. Il freddo la prolunga, la congelazione per tutta la sua durata la accentua e la rende permanente; alla temperatura di 5°-6° C. la reazione si mantiene netta per la durata di oltre 5 minuti, consentendo una esauriente osservazione al microscopio.

Tale temperatura si ottiene facilmente applicando al microscopio un comune tavolino riscaldabile di vetro, in cui si faccia circolare acqua fredda ad una temperatura conveniente.

Per l'esame di numerose sezioni, necessario quando si vogliono fare delle accurate osservazioni, è di grande vantaggio immergere le sezioni (man mano che si tolgono dal rasoio del microtomo per congelazione e preferibilmente prima che avvenga il disgelo) in una soluzione al 20 % di acido tricloracetico, in cui posson rimanere per una settimana e più senza che si alterino.

Questa norma è molto conveniente nel caso in cui si debbano eseguire delle sezioni di tessuti parenchimatosi molto molli e che si spappolano facilmente appena disgelati, in quanto si ha contemporaneamente l'indurimento ed una buona distensione.

In complesso la tecnica che ci risulta consigliabile è la seguente:

1. Immersione degli organi ridotti in piccoli frammenti appena isolati dell'animale in acido tricloracetico al 20 % per almeno mezz'ora.

2. Sezioni di 4-5 μ per congelazione.

3. Trasporto delle sezioni sul vetrino portaoggetti, ove vengono trattate con una soluzione di nitroprussiato sodico al 5 %, preparata estemporaneamente, per la durata di 3-4 minuti.

4. Eliminare l'eccesso di nitroprussiato con carta bibula ed esporre le sezioni ai vapori di idrato di ammonio concentrato capovolgendo rapidamente il vetrino su una bottiglia contenente ammoniacca. Immediatamente si manifesta una bella tinta rosso-amaranto, caratteristica delle zone di localizzazione del glutatione.

5. Raffreddamento rapido del vetrino portaoggetti su cui si trovano le sezioni. Serve bene il ghiaccio e meglio ancora il getto di anidride carbonica del microtomo a congelazione. Trasporto sul tavolino del microscopio, raffreddato a 5° C.

Con questa tecnica abbiamo cercato di apprezzare eventuali differenze di distribuzione del glutatione in sezioni di organi a struttura complessa.

Prendendo le mosse delle osservazioni di Binet e Giroud ⁽¹⁾ che hanno studiato la distribuzione del glutatione nella cortico-surrenale e nella midollo-surrenale della cavia e del cane, abbiamo preso in esame la *capsula surrenale* del ratto albino e del pollo giovane. Per il ratto albino si osservò, conformemente ai risultati ottenuti dagli autori francesi, reazione più intensa nella corticale che nella midollare. Nel pollo in cui sostanza corticale e midollare si trovano disordinatamente frammiste, come del resto in tutti gli uccelli, non si palesa una netta differenza nella reazione tra cellule cromaffini e cellule a contenuto lipoide. Nel giudizio occorre tenere presente la leggera differenza di tinta che nell'organo fresco presentano i due tipi di cellule.

Nel *pancreas* del pollo nessuna differenza si nota nel contenuto in glutatione degli elementi di cui risulta costituito. La sezione si presenta uniformemente ed intensamente colorata in rosso-amaranto.

Nell'*ovario* del ratto l'esame istologico ci rivela un diverso contenuto in glutatione fra i suoi costituenti. La reazione è intensa in corrispondenza degli oociti anche giovani e dei corpi lutei, scarsissima nello stroma ovarico.

Nell'*ovario* del pollo le ova allo stadio di oocite primordiale e di oocite giovane presentano un contenuto in glutatione inferiore a quello degli oociti del ratto, come si rileva dalla minore intensità della reazione cromatica. Tutto il follicolo si presenta uniformemente colorato in rosa, compresa la vescicola germinativa. La reazione manca solamente in corrispondenza della « couche » granulo lipoide ⁽²⁾. Questo reperto pare collimi con i risultati delle ricerche di Joyet-Lavergne sulla distribuzione del glutatione nelle Gregarine ⁽³⁾ ed in alcuni organi animali e vegetali ⁽⁴⁾, in rapporto con quella del condrioma. L'A. infatti perviene alla conclusione che il condrioma è il supporto del glutatione.

Nelle *arterie* (aorta del ratto) la reazione del glutatione è intensa in corrispondenza della *media*, e va degradando sia verso l'interno che verso l'esterno del vaso, finchè manca in corrispondenza dell'intima e della *avventizi*a.

(1) Loc. cit.

(2) F. DULZETTO, *Sulla distribuzione e sulla fisiologia dei lipoidi nell'oocite in accrescimento degli uccelli. Ricerche di Morfologia*, vol. 2^o, 1922.

(3) JOYET-LAVERGNE PH., *Sur les rapports entre le glutation et le chondriome*. « C. R. Académie des Sciences », t. 184, 1927.

(4) ID., *Sur le rôle du chondriome dans le métabolisme cellulaire*. « C. R. Soc. Biol. », t. 97, 1927.

Zoologia. — La fase « *miconiscus* » di « *Ione thoracica* » (MONTAGU), ottenuta per allevamento sui Copepodi⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di E. CAROLI, presentata dal Corrisp. U. PIERANTONI.

Fritz Müller descrisse col nome di *Miconiscus fuscus* (1869, p. 65, tav. 4, fig. 20) un piccolo Isopode Epicarideo, trovato nel 1864 a Desterro (Brasile), su di un Copepode non specificato. Il Müller non escluse però che potesse trattarsi di una forma giovane, la quale eventualmente dovesse ancora subire notevoli modificazioni, prima di pervenire allo stato adulto.

Un'altra specie fu in seguito trovata da G. O. Sars su *Calanus finmarchicus* GUNNER, e chiamata *M. calani* (1882, p. 69, tav. 2, fig. 6). Sin da allora il Sars notò la grande rassomiglianza dei *Miconiscus* con le larve già conosciute degli altri Epicaridei, ed emise anch'egli l'idea che essi potessero essere forme non ancora adulte, e che, per conseguenza, i Copepodi non fossero i loro ospiti definitivi.

Invece il Giard ed il Bonnier (1887, p. 221), proprio in base alla rassomiglianza con le larve degli altri Epicaridei, li considerarono come forme primitive e meno degradate, ma adulte e localizzate sui Copepodi; e crearono per accoglierli la famiglia dei *Miconiscidae*.

Ma il Sars non tardò ad apportare nuovi e più validi argomenti a sostegno della supposizione precedentemente espressa (1899, p. 218). In alcuni *Miconiscus* trovati su *Pseudocalanus elegantus* BOECK, molto simili, se pure non identici, col *M. calani*, egli poté riconoscere una serie di stadi (1899, tav. 92, fig. 1-1 d), dei quali il meno avanzato aveva tutta l'apparenza della larva degli altri Epicaridei al momento della schiusa (larve épicaridiennes di Bonnier, *epicaridium* di Gilson); mentre gli altri, già coi caratteri di *Miconiscus*, rappresentavano, specialmente pel progressivo sviluppo del 7° paio di piedi, un graduale passaggio all'altra larva degli Epicaridei, a quella cioè che si fissa sull'ospite definitivo (larve cryptoniscienne di Bonnier, *cryptoniscium* di Gilson). Di più, in un'altra forma di *Miconiscus*, trovata su *Melridia longa* LUBBOCK, in procinto di cambiare spoglia, egli poté scorgere, attraverso la cuticola, la nuova larva che aveva già tutti i caratteri di un *cryptoniscium*. Il nome *Miconiscus* pertanto non doveva più designare un genere, ma una fase di sviluppo comune a tutti gli Epicaridei, interposta fra le due forme larvali fino allora conosciute: *epicaridium* e *cryptoniscium*.

(1) Dalla Stazione Zoologica di Napoli,

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1928.

Ad onta di ciò il Bonnier (1900, pp. 93, 178, 228) continuò a considerare i *Microniscus* come formanti una famiglia speciale, adattata al parassitismo sui Copepodi. Egli non nega fede alle osservazioni del Sars, ma ritiene che esse riguardino soltanto i *Microniscidae*: solo in questi ha luogo la fissazione sull'ospite nello stadio di *epicaridium* ed esiste una forma intermedia, perchè si tratta di forme primitive e più vicine all'origine comune di tutti gli Epicaridei. Quanto allo stato adulto, questo potrebbe coincidere con la fase intermedia o con la successiva di *cryptoniscium*, o differirne di poco. Negli altri Epicaridei, invece, l'*epicaridium* mena vita libera e si trasforma direttamente in *cryptoniscium*; una forma intermedia ed un ospite temporaneo non arrecherebbero nessun vantaggio, anzi ritarderebbero inutilmente il raggiungimento dell'ospite definitivo.

Spetta al Caullery (1907) il merito di aver confermato, con una prova sperimentale, l'opinione del Sars. Avendo messo dei Copepodi Calanoidei insieme con le larve ricavate da un *Portunion kossmanni* GIARD & BONNIER, parassita di *Portumnus latipes* (PENNANT), trovò che, già dopo un'ora, queste si erano attaccate a due specie di *Acartia* (*A. clausi* GIESBRECHT e *A. discandata* GIESBRECHT), lasciando immuni i Copepodi di altri generi. Per la difficoltà di mantenere i Copepodi in vita — come egli stesso chiaramente dice — il Caullery non poté osservare la trasformazione delle larve in *microniscus*; restava però dimostrato che Epicaridei non appartenenti all'ipotetica famiglia dei *Microniscidae*, e viventi da adulti su tutt'altro ospite, si attaccano, nello stadio di *epicaridium*, sui Copepodi.

Una seconda prova — non mi consta che dopo quella del Caullery ne siano state tentate altre — ho avuto agio di eseguire io con le larve di *Ione thoracica* (MONTAGU), parassita su *Callianassa stebbingi* BORRADAILE (1). Il procedimento è stato quasi lo stesso; ma, più fortunato dell'insigne biologo francese, ho potuto ottenere — o per più rapida evoluzione delle larve, o per maggiore resistenza dei Copepodi, o per qualsiasi altra condizione più favorevole — la trasformazione di alcune larve in *microniscus* e perfino di uno di questi in *cryptoniscium*.

Dalla fine del maggio di quest'anno, mantenevo in vita una *Callianassa* infestata da una *Ione*, la cui tasca incubatrice, come chiaramente si scorreva attraverso lo scudo dell'ospite, era piena di embrioni prossimi a schiudere. Il 5 giugno, infatti, trovai le larve già emesse, e raccolte in gran parte contro la parte superiore del lato del recipiente rivolto alla luce. Solo il giorno seguente mi fu possibile avere dei Copepodi di superficie, che risultarono in maggioranza rappresentati da *Acartia clausi* GIESBRECHT,

(1) In un recente lavoro, il DE MAN (1928) ritiene che, sotto il nome di *C. stebbingi* BORRADAILE siano state confuse finora due diverse specie: *C. laticauda* OTTO e *C. pestae* n. sp. Non potendo pel momento stabilire — nel caso che l'affermazione del de Man sia esatta — quale delle due specie o se entrambe siano ospiti della *Ione thoracica*, conservo provvisoriamente il nome di *C. stebbingi*.

mentre il resto comprendeva un paio di specie di *Centropages* e pochi altri Calanoidei non determinati. Un centinaio di questi Copepodi, accuratamente esaminati perchè non portassero già altre larve, e scelti in modo che ogni specie fosse rappresentata da un numero proporzionale a quello da cui era rappresentata nella raccolta, furono messi insieme con le larve di *Ione*, fra le ore 11 e 13 del 6 giugno. Alle ore 18 dello stesso giorno, quando cioè mi fu possibile fare la prima osservazione, le larve si erano già attaccate alle *Acartia*, lasciando liberi tutti gli altri Copepodi, con la sola eccezione — certo! accidentale — di una femmina di *Centropages typicus* KRÖYER. Del pari immuni erano quasi tutti i maschi di *Acartia*, i quali, come ho potuto constatare dopo, se in un primo tempo sono aggrediti, vengono in seguito abbandonati. Invece tutte le femmine, osservate allora o nei giorni successivi, portavano da 4 a 6, più di rado solo 2 o 3 larve; il che, come giustamente nota il Caullery, si spiega col numero delle larve infinitamente superiore a quello dei Copepodi, e con la ristrettezza dell'ambiente, che facilita alle larve la ricerca dei Copepodi ed impedisce a questi di sfuggire ai loro attacchi. Le due prime larve si attaccano sempre ai due lati del tronco dell'ospite, nella posizione raffigurata dal Sars (1899, tav. 92, fig. 1); la terza sul dorso, fra le due prime; le altre dove e come possono: così ne ho vista qualcuna aggrappata alla coda e perfino ad un'antennula.

Il 9 giugno, a tre giorni di distanza dalla fissazione delle larve, trovai i primi *microniscus* su qualcuna delle *Acartia* superstiti. È da notare intanto che il passaggio dallo stadio di *epicaridium* a quello di *microniscus* non è diretto, non avviene cioè mediante una sola muta. All'uscita dalla cavità incubatrice, la larva di *Ione* presenta una lieve tinta verdognola, col capo, sul quale spiccano gli occhi neri, di color bruno rossiccio, e con una macchia dello stesso colore, che, da circa la metà del dorso giunge fin quasi all'estremità posteriore; dopo la fissazione sul Copepode, il pigmento del capo e del dorso si fraziona, o meglio, si condensa in piccole macchie puntiformi più scure. Non mi consta, nè credo, che con questo cambiamento di colore coincida una muta, giacchè la forma e le dimensioni del corpo restano invariate. Una notevole modificazione, certamente accompagnata da muta, ha luogo invece circa 24 ore dopo che la larva si è attaccata: il corpo perde la sua caratteristica forma globosa, si allunga di circa un terzo e si appiattisce, assumendo così quasi l'aspetto di un *microniscus*, mentre le appendici conservano la struttura ed il numero tipici dell'*epicaridium*. La larva attraversa dunque due stadi di *epicaridium*, il secondo dei quali potrebbe anche essere designato col nome di *praemicroniscus*. Dei *microniscus* osservati, due si erano solo in parte liberati della spoglia dello stadio precedente, ed il loro corpo non aveva ancora acquistato i suoi contorni precisi; altri tre o quattro, invece, erano completamente formati, con le appendici ben distinte e col 7° paio di piedi rappresentato da due piccoli tubercoli. Uno solo, osservato il giorno 11, aveva raggiunto uno stadio più avanzato,

riconoscibile, oltre che per le maggiori dimensioni, per le antenne più lunghe e pel maggiore sviluppo dei piedi del 7° paio. Il 12 giugno fu trovata morta l'ultima *Acartia*.

Il passaggio attraverso i vari stadi — per lo meno nelle condizioni artificiali di allevamento — non è contemporaneo in tutte le larve, come è il caso, p. es., delle larve dei Decapodi; difatti, mentre solo poche larve si erano trasformate in *microniscus*, e di questi solo uno aveva raggiunto uno stadio più avanzato, tutte le altre restavano ancora nel 1° o 2° stadio di *epicaridium*. Non pare però che ciò sia da attribuirsi al fatto che più larve fissate sullo stesso ospite si ostacolino scambievolmente, e che perciò solo una di esse possa svilupparsi più oltre; poichè sullo stesso Copepode ho trovato due — e, in un'altra prova di cui parlerò subito, anche tre — larve trasformate in *microniscus*. Quando l'ospite muore, le larve che si trovano ancora nello stadio di *epicaridium*, come è stato già notato dal Caullery, lo abbandonano; i *microniscus*, invece, per la mancanza di appendici atte al nuoto, restano attaccati all'ospite morto, al quale sopravvivono per qualche tempo.

Il 12 luglio ottenni le larve da un'altra *Ione*. Anche questa volta non mi fu possibile avere dei Copepodi che il giorno seguente, ma in scarso numero, venti appena, e quasi tutti *Acartia verrucosa* THOMPSON, che misi insieme con un numero di larve poco più che doppio. Il 14 luglio tutte le *Acartia* ancora viventi, compresi due maschi, portavano da 1 a 3 larve; i maschi furono in seguito trovati ancora vivi ma liberi. Il 16 luglio vivevano ancora 6 *Acartia*, portanti complessivamente 12 larve, delle quali 9 si erano già trasformate, o si trasformarono nei giorni seguenti, in *microniscus*; 3 di questi, come ho detto più sopra, erano portati dallo stesso ospite. Ho potuto stabilire nella fase di *microniscus* 4 stadi, distinti, oltre che per le dimensioni progressivamente maggiori del corpo e delle appendici, specialmente delle antenne, pel graduale sviluppo dei piedi del 7° paio, i quali, visibili appena in forma di due piccole sporgenze nel 1° stadio, più allungati nel 2°, uguagliano già nel 3° quelli delle paia precedenti. I *microniscus* non sono mai perfettamente acheti; sin dal 1° stadio i pleopodi e gli uropodi sono terminati da brevi e sottili setoline. Nel 4° stadio la forma del corpo, più lunga e più sottile, preannunzia già la larva *cryptoniscium*; specialmente notevole è la rassomiglianza dell'addome, coi pleopodi e gli uropodi più sviluppati e provvisti di setole più lunghe.

Il 18 luglio sopravviveva una sola *Acartia*, alla quale era attaccato un solo *microniscus*; mi fu possibile prolungarne la vita fino al 23, ponendola in un piccolo cristallizzatore, mantenuto in una corrente di acqua fresca. Il 19 il *microniscus* aveva già raggiunto il 4° stadio; il 21, cioè nove giorni dopo l'uscita dalla cavità incubatrice materna, è 8 dopo la fissazione sull'ospite temporaneo, esso si era trasformato in *cryptoniscium*. Il 23 luglio l'*Acartia* era morta, ed il *cryptoniscium*, staccatosene, nuotava liberamente.

Così la *Ione thoracica* è il primo Epicarideo di cui finora sia stato seguito lo sviluppo della larva, dall'uscita dalla tasca incubatrice fino al momento in cui è atta a fissarsi sull'ospite definitivo.

Degno di rilievo è intanto il fatto che, le larve di *Portunion* e quelle di *Ione* possono fissarsi, per passare la fase di *microniscus*, su Copepodì dello stesso genere, e persino della stessa specie (*Acartia clausi*). Se il parassitismo degli Epicaridei non è così rigorosamente specifico, come ritenevano il Giard ed il Bonnier, è però certo che ogni specie ha come ospiti una o poche specie di uno stesso genere, o, al massimo, di generi molto affini. Riesce perciò alquanto difficile ammettere che due Epicaridei non appartenenti alla stessa famiglia, così differenti per forma e per modo di parassitismo, e viventi allo stato adulto su Decapodi di due gruppi diversi, abbiano, durante la fase di *microniscus*, un metabolismo identico, che permetta loro di nutrirsi a spese dello stesso ospite. Ritengo pertanto che gli Epicaridei, nella fase di *microniscus*, non siano veri parassiti dei Copepodì Calanoidei, ma si servano di questi semplicemente come mezzo di dispersione. Certo non tutti i Calanoidei presentano le condizioni richieste da questo ufficio; o, per lo meno, non tutti possono compierlo indistintamente per qualsiasi Epicarideo, qual'è il caso dei *Centropages* che, come abbiamo visto, non sono ricercati dalle larve di *Portunion* e di *Ione*. Ma, come lo stesso Calanoideo - valga l'esempio di *Acartia* - può servire di veicolo a diversi Epicaridei, così è anche possibile che le larve dello stesso Epicarideo possano avvalersi di Calanoidei differenti; specialmente se si pensa che, date le grandi variazioni qualitative e quantitative, cui la presenza dei Copepodì è sottoposta, non in tutti i luoghi e non in ogni tempo le larve possono avere a loro disposizione una determinata specie.

Qui viene a proposito un'ultima considerazione. Il Bonnier riteneva che uno stadio intermedio fra l'*epicaridium* ed il *cryptoniscium*, in altri Epicaridei che non fossero i *Microniscidae*, sarebbe stato di svantaggio nella lotta per l'esistenza, perchè avrebbe ritardata inutilmente la fissazione sull'ospite definitivo; ed aggiungeva che, se uno stadio intermedio fosse esistito, la selezione naturale lo avrebbe eliminato. Il compianto zoologo francese oggi forse si sarebbe guardato bene dall'esprimersi negli stessi termini; intanto io, proprio nell'esistenza di uno stadio intermedio su di un ospite provvisorio, credo di ravvisare una disposizione mirabilmente atta a favorire non solo la diffusione, ma anche la conservazione della specie. I Bopiridi - dei quali sono in grado di parlare con maggiore cognizione - si fissano sui loro ospiti definitivi quando questi si trovano ancora nei primi stadi post-larvali, talvolta persino negli ultimi stadi larvali. Ora, mentre i Bopiridi si riproducono per lo più durante tutto l'anno, il periodo riproduttivo dei Decapodi, breve o lungo che sia, è quasi sempre più limitato; perciò, se le larve dei Bopiridi passassero direttamente dallo stadio di *epicaridium* a quello di *cryptoniscium*, tutte quelle emesse nel tempo quando mancano i piccoli

delle specie ospiti, sarebbero inesorabilmente condannate a perire, poichè alle infinite cause che, anche in epoca propizia, ne annientano la maggior parte, si aggiungerebbe l'impossibilità di procacciarsi nutrimento allo stato libero. La fase di *microniscus* rappresenta invece un periodo di riposo, durante il quale, dato il minimo dispendio di energia, anche senza bisogno di sottrazione di nutrimento dall'ospite, il vitello avanzato dall'uovo può bastare al mantenimento della vita ed alle successive mutazioni. Dunque questa fase larvale di quiete, interposta tra le due attive, preserva dalla morte le poche larve che riescono a fissarsi sui Copepodi; e — poichè è presumibile che nella stagione fredda detta fase abbia una durata maggiore di quella osservata p. es. nella *Ione* nel pieno dell'estate — può permettere a qualcuna di esse di arrivare fino al tempo della comparsa dei piccoli Decapodi della specie ospite.

LAVORI CITATI

- 1900, BONNIER J., *Contribution à l'étude des Épicarides. Les Bopyridae*. « Trav. Stat. Zool. Wimereux », t. 8, 396 pp., 41 tav., 62 figg. nel testo.
- 1907, CAULLERY M., *Sur les phases du développement des Épicarides; vérification expérimentale de la nature des Microniscidae*. « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 145, p. 596.
- 1887, GIARD A. et BONNIER J., *Contribution à l'étude des Bopyriens*. « Trav. Stat. Zool. Wimereux », t. 5, 252 pp., 10 tav.
- 1928, MAN J. G. (DE), *A contribution to the knowledge of twenty-two species and three varieties of the genus Callinassa Leach*. « Capita Zool. », 2 D., 6 Aft., 56 pp., 12 tav.
- 1869, MÜLLER F., *Bruchstücke zur Naturgeschichte der Bopyriden*. « Jen. Zeitschr. », 6 Bd. (1871), p. 53, tav. 3-4.
- 1882, SARS G. O., *Oversigt af Norges Crustaceer med foreløbige Bemærkninger over de nye eller mindre bekjendte Arter. I. (Podophthalmata, Cumacea, Isopoda, Amphipoda)* « Vid-Selsk. Forh. Christiania », 1882, n. 18, 124 pp., 6 tav.
- 1899, ID., *An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 2. Isopoda*. Bergen, 270 pp., 104 tav.

Zoologia. — *Ricerche ponderali ed istofisiologiche su cavia e conigli sottoposti a miscele Lipoides*. Nota di A. BARCHIESI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Ricerche istofisiologiche sull'influenza delle variazioni di temperatura in alcuni organi di eterotermi*. Nota di A. BARCHIESI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Rapporti tra processi organo-genetici ed istogenetici.* Nota di S. RANZI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Rigenerazione e superrigenerazione di tessuti di organo nelle code di urodeli adulti.* Nota di T. TERNI, presentata dal Socio G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Studi sulla fisiologia degli insetti (sistema nervoso).* Nota di M. TIRELLI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 novembre 1928 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MÉMOIRES E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sul moto di un corpo di massa variabile.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Nella meccanica classica la massa m di un generico corpo, intendiamo per semplicità punto materiale, si assume come una caratteristica intrinseca del corpo, invariante di fronte al movimento del corpo stesso, e si ha, con evidente significato dei simboli, la legge newtoniana

$$(1) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

La massa m non è invece considerata quale una costante specifica del mobile nella concezione einsteiniana: più precisamente, secondo la relatività ristretta, essa dipende dalla velocità in modo ben determinato.

Tuttavia, anche assai prima del sorgere della relatività, si era presentato in Astronomia l'esempio di corpi la cui massa, nell'intervallo di tempo entro il quale interessa seguire l'andamento del moto, non rimane invariata, ma va subendo piccoli incrementi dovuti alla caduta di meteoriti.

Tenendo conto di ciò, fu ripetutamente oggetto di studio il problema dei due corpi (Sole-Pianeta) nell'ipotesi di masse variabili, e in particolare crescenti, con t ⁽²⁾. Il punto di partenza di tali ricerche fu sempre la for-

(1) Presentata nella seduta dell'11 novembre 1928.

(2) Cfr. in proposito la bella Memoria del prof. ARMELLINI, *Sul problema dei due corpi di masse variabili*, «Mem. della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», t. XIX, 1916, pp. 75-96, dove si trovano anche richiamate le precedenti ricerche.

mula newtoniana (1) in cui soltanto si riguarda m non più come costante, ma come funzione assegnata di t .

Una tale impostazione è *a priori* perfettamente ragionevole, e suffragata *a posteriori* dal fatto che nel problema dei due (o più) corpi si può (per semplice sottrazione delle corrispondenti equazioni (1), divise pel rispettivo m , come nel caso delle masse costanti) fare intervenire esclusivamente il loro moto *relativo*.

Ciò non ostante io credo — e mi propongo di indicarne il perchè nella presente comunicazione — che l'applicazione conseguente dei principi della meccanica classica dia luogo, con ovvio passaggio al limite, non alla (1), bensì all'equazione

$$(2) \quad \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F},$$

che esprime il teorema della quantità di moto, e, notoriamente, resta valida sotto la stessa forma anche nella relatività ristretta.

2. Per giustificare la (2) prendiamo specificamente in considerazione il caso di un corpo P la cui massa varia per apporti successivi, dovuti a urti anelastici (cioè senza rimbalzo) con uno sciame di corpuscoli Q⁽¹⁾.

Sia \mathbf{v} la velocità *assoluta* (cioè riferita ad assi *fissi*, nell'ordinaria accezione della meccanica classica) di P, e m la sua massa, immediatamente anteriori all'urto con un generico Q. Siano d'altra parte \mathbf{w} e μ gli analoghi elementi spettanti a questo Q.

Valuteremo (sempre secondo le norme consuete della meccanica classica) la variazione di velocità derivante da tali urti, e poi passeremo al limite, introducendo due ipotesi che avremo cura di sottolineare (di isotropia statistica e di indipendenza di effetti) quanto mai spontanee e perfettamente nello spirito dei postulati di Galileo e di Newton.

Il baricentro di una coppia P, Q possiede, immediatamente prima dell'urto, la velocità

$$\frac{m\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}}{m + \mu},$$

la quale, per il principio di reazione, non è alterata dall'urto medesimo⁽²⁾, e rappresenta quindi la velocità posteriore del corpo risultante dalla collisione anelastica dei due. Tale corpo chiameremo ancora P, attesa la mi-

(1) Anche la spettroscopia stellare, in base specialmente al materiale raccolto e interpretato da H. SHAPLEY (dell'Osservatorio di Harvard), tende a confermare l'effettiva esistenza di un pulviscolo cosmico. Cfr. il recente articolo dello stesso SHAPLEY, *The centre of the Galaxy*, in «Nature», vol. 122, n. 3074, 29 settembre 1928, pp. 272-274.

(2) Cfr., per es., LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, t. (II)₂, p. 580, ovvero *Compendio...*, parte seconda, p. 170.

nore importanza dell'altro che vi è rimasto congelato. Comunque l'incremento Δv che subisce la velocità di P per la caduta di Q vale

$$\Delta v = \frac{m v + \mu w}{m + \mu} - v = \frac{\mu(w - v)}{m + \mu},$$

o, più semplicemente, trascurando μ di fronte ad m (sotto l'aspetto formale, si può anche dire, trattando μ come infinitesimo di primo ordine)

$$\Delta v = \frac{\mu}{m} (w - v).$$

Ciò premesso, fissiamo un generico istante t , e, a partire da esso, un intervallo di tempo dt , abbastanza breve, di fronte alla durata del moto di P, che interessa di caratterizzare, da potersi trattare come infinitesimo, ma d'altra parte abbastanza lungo per includere moltissimi urti con corpuscoli Q. Diremo $d''v$ la variazione complessiva che subisce la velocità di P nell'intervallo dt per effetto esclusivo degli urti anelastici coi vari Q. Essa sarà naturalmente la somma dei Δv testè calcolati, in ognuno dei quali, a meno di termini d'ordine superiore rispetto a μ , è anche lecito risguardare m e v come massa e velocità di P, anteriori a *tutti* gli urti dell'intervallo dt , cioè corrispondenti entrambe all'istante t .

Avremo in conformità

$$d''v = \sum \Delta v = \frac{1}{m} \sum \mu w - \frac{1}{m} v \sum \mu,$$

le sommatorie intendendosi estese a tutti gli urti dell'intervallo dt .

$\sum \mu$ è, per definizione, l'incremento dm che subisce la massa di P per assorbimento dei Q con cui collide nell'intervallo.

Ammettiamo poi — ecco il primo postulato — che lo sciame dei corpuscoli Q (pulviscolo cosmico) non abbia moto d'insieme *rispetto agli assi fissi*, cioè che sia nulla la sua velocità baricentrale, *assoluta* ⁽¹⁾, il che si esprime mediante l'equazione

$$(3) \quad \sum \mu w = 0 \text{ }^{(2)}.$$

(1) Una tale ipotesi si può anche intendere come una proprietà degli assi fissi rispetto all'insieme dei corpuscoli Q, cioè il pulviscolo cosmico; il postulato consistendo, sotto questo punto di vista, nel fatto che assi di direzione invariabile, solidali col baricentro dei punti Q, sono inerziali o galileiani, cioè tali che rispetto ad essi, per corpi di massa invariabile, vale la solita (1). Una tale definizione di assi inerziali toglie loro la caratteristica indeterminazione di una traslazione uniforme (relatività galileiana). Nè ciò deve meravigliare, perchè si fa intervenire un elemento nuovo, la materia meteorica, dal cui moto d'insieme scaturisce la maggiore specificazione.

(2) In linea storica va rilevato che la considerazione esplicita di urti anelastici soddisfacenti alla (3) del testo [o, più precisamente, ad una condizione che, per il sistema

Rimane pertanto

$$(4) \quad d'' \mathbf{v} = - \frac{dm}{m} \mathbf{v}.$$

3. Valutiamo oramai la variazione *totale* di velocità che il nostro corpo P, sottoposto all'azione di quante si vogliono forze, subisce nel tempuscolo dt . Sia \mathbf{F} il risultante di tutte queste forze.

Possiamo ammettere — ecco il secondo postulato — che valga anche per l'eventuale variabilità della massa, come per tutte le altre azioni fisiche, compendiabili ciascuna in una forza, il principio galileiano di indipendenza, che cioè la variazione totale $d\mathbf{v}$ di velocità, che si determina in un tempuscolo elementare dt , sia la somma delle due $d' \mathbf{v}$ e $d'' \mathbf{v}$ che si avrebbero rispettivamente, qualora:

- 1) agissero le forze di risultante \mathbf{F} senza variazione di massa;
- 2) la massa variasse di dm , essendo P libero da forze.

Siccome, per il principio fondamentale della meccanica ordinaria [formula (1)],

$$(5) \quad d' \mathbf{v} = \frac{1}{m} \mathbf{F} dt,$$

basta sommare con la (4) per avere la cercata estensione della legge del moto al caso di masse variabili:

$$d\mathbf{v} = \frac{1}{m} \mathbf{F} dt - \frac{dm}{m} \mathbf{v}.$$

Ne viene, moltiplicando per m e isolando $\mathbf{F} dt$,

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} dt,$$

che è appunto la formula (2), c. d. d.

Le conseguenze che ne discendono per il problema astronomico dei due corpi di masse variabili sono oggetto di una Nota del prof. G. VRANCEANU, inserita in questo stesso fascicolo.

4. Osservazione.

Per ritrovare la formula (1), applicata finora anche nell'ipotesi di masse variabili, bisognerebbe ammettere che si annullasse *non* la velocità

planetario, è sensibilmente identica alla (3)], si trova già in una Nota dell'OPPOLZER, inserita nel n. 2375 (vol. 108, 1884) delle « Astr. Nachr. ».

Pare tuttavia (per quanto si può giudicare dagli accenni sommari della Nota suddetta) che l'A. faccia poi il calcolo delle perturbazioni movendo dalla (1), mentre, come si mostra nel presente scritto, esso dovrebbe invece essere impostato sulla (2).

baricentrale *assoluta* dei corpuscoli Q , ma quella *relativa* a P , cioè, in luogo della (3), la condizione

$$(3') \quad \sum \mu (w - v) = 0,$$

che sembra arbitraria perchè la velocità (assoluta) di P non ha *a priori* alcuna relazione col moto (pure assoluto) del baricentro dei corpuscoli Q .

Importa per altro rilevare che, se si trattasse invece di un dm negativo, proveniente, non da assorbimento, ma da eiezione di corpuscoli Q da parte di P (modello meccanico di fenomeni di irraggiamento), allora sarebbe invece giustificata la (3'), e non più la (3), aparendo plausibile l'ipotesi (balistico-statistica) che i corpuscoli Q , *emessi da* P , abbiano moto d'insieme nullo, *rispetto allo stesso* P .

Geometria. — *Ancora sulle trasformazioni di Laplace, Lévy e Moutard per le ipersuperficie.* Nota ⁽¹⁾ del CORRISP. G. FUBINI.

Riprendo le notazioni della precedente Nota (questi « Rendiconti ») per discutere il sistema di equazioni (6) da cui dipende la ricerca delle ipersuperficie per cui si può dare una delle trasformazioni, accennate nel titolo di queste Note. Osservo che due direzioni du , δu della V sono *coniugate* se $\sum a_{rs} du_r \delta u_s = 0$. Diremo invece che sono *coniugate* rispetto alla forma $\pi = \sum \pi_{rs} du_r du_s$ se $\sum \pi_{rs} du_r \delta u_s = 0$. Chiameremo *principali* n direzioni uscenti da un punto di V_n a due a due non solo coniugate, ma anche coniugate rispetto alla forma π .

La loro ricerca dipende dalla risoluzione dell'equazione ottenuta uguagliando a zero il determinante $|\pi_{rs} - t a_{rs}|$. Supponiamo, come sarà in generale, che esista in ogni punto una *n^{upla}* di direzioni principali; la *hesima* di tali direzioni sia definita dalle

$$(9) \quad \frac{du_1}{\lambda_{(h)}^1} = \frac{du_2}{\lambda_{(h)}^2} = \dots = \frac{du_n}{\lambda_{(h)}^n} \quad (h = 1, 2, \dots, u)$$

ove, col Ricci, supporremo le λ normate in modo che $\sum a_{rs} \lambda_{(h)}^r \lambda_{(h)}^s = 1$. Varrà la

$$\sum l_{ij} \lambda_{(h)}^{ij} = \varrho_{(h)} \lambda_{h/i} = \sum (\pi_{ij} + \Omega a_{ij}) \lambda_{(h)}^{ij} \quad (2).$$

Si noti che, come avviene nei lavori del Ricci, l'indice h è un indice, non un simbolo di calcolo assoluto; ciononostante per semplicità noi sop-

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1928.

(2) È (cfr. loc. cit.) $l_{rs} = \pi_{rs} + \Omega a_{rs}$, ove $\Omega = SX\Xi$.

primeremo le relative parentesi. Non vi è pericolo di confondere con le λ_r del mio libro, perchè queste ultime non si usano nel presente lavoro. Le $\rho_r - \Omega$ sono invarianti delle forme π e $\sum a_{rs} du_r du_s$. Le (9) definiscono (per $h = 1, 2, \dots, n$) n congruenze di linee; indicando con ds_h i valori dei rapporti (9), si riscontra che s_r si può considerare come il parametro individuante i punti di una linea della h -esima congruenza. Sarà $\frac{\partial}{\partial s_h} = \sum \lambda_h^i \frac{\partial}{\partial u_i}$, cosicchè le (6) diventano:

$$(6 \text{ bis}) \quad \frac{\partial \tau}{\partial s_h} = G_h R + \rho_h \frac{\partial R}{\partial s_h} \quad (G_h = \sum_i g_i \lambda_h^i).$$

Le formole di *commutazione* del Ricci relative a $\frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial}{\partial s_k} - \frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial}{\partial s_h}$ danno, indicando con ϵ le rotazioni che il Ricci indica con γ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_k} \left(G_h R + \rho_h \frac{\partial R}{\partial s_h} \right) - \frac{\partial}{\partial s_h} \left(G_k R + \rho_k \frac{\partial R}{\partial s_k} \right) = \\ = - \sum (\epsilon_{ihk} - \epsilon_{lkh}) \left(G_l R + \rho_l \frac{\partial R}{\partial s_l} \right). \end{aligned}$$

Ricordando l'identità analoga per $\frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial R}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial R}{\partial s_k}$, poi potremo dedurre, se tutte le ρ_h sono distinte, i valori delle $\frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial R}{\partial s_k} (h \neq k)$ come combinazioni lineari delle R e loro derivate prime. Le condizioni di integrabilità si trovano con una nuova applicazione delle citate formole del Ricci relative alla $\frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial^2 R}{\partial s_h \partial s_k} - \frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial^2 R}{\partial s_i \partial s_k}$ (per valori distinti degli indici i, h, k): nelle formole che così otterremo, potremo eliminare le derivate seconde della R rispetto a due delle s_r con indici r distinti; e otterremo così un sistema di equazioni del tipo seguente:

$$\frac{(\epsilon_{ihk} - \epsilon_{ikh})}{\rho_k - \rho_h} \frac{\partial^2 R}{\partial s_i^2} + \frac{(\epsilon_{hik} - \epsilon_{hki})}{\rho_k - \rho_i} \frac{\partial^2 R}{\partial s_h^2} + \frac{(\epsilon_{khi} - \epsilon_{kih})}{\rho_i - \rho_h} \frac{\partial^2 R}{\partial s_k^2} = \dots$$

Dunque tutte le derivate seconde della R si potranno esprimere mediante la R , le sue derivate prime e due delle $\frac{\partial^2 R}{\partial s_h^2}$; cosicchè la R dipende al più da $n + 3$ costanti arbitrarie. Ma le combinazioni lineari omogenee a coefficienti costanti delle x soddisfano pure a tali equazioni, perchè esse sono dedotte dalle (6), affatto simili alle (1). E, poichè queste combinazioni lineari dipendono da $n + 2$ costanti arbitrarie, la R o sarà una combinazione lineare delle x , o al massimo conterrà una sola costante arbitraria essenzialmente nuova. Quest'ultimo caso (la cui possibilità mi sembra affatto

eccezionale) appare in ogni modo di assai scarso interesse; l'altro caso, come abbiamo visto, è il caso banale da trascurare. Affinchè la R abbia una arbitrarietà maggiore, e il problema geometrico sia veramente notevole, bisogna che i precedenti ragionamenti siano in difetto.

E, almeno a primo aspetto, il caso più notevole in cui ciò avviene è quello in cui le precedenti equazioni sono identità, ossia le $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jik}$ (con $i \neq j \neq k \neq i$) sono tutte nulle. In tal caso segue da un teorema del Ricci che si possono scegliere le coordinate u , in guisa che le linee principali uscenti da un punto generico coincidano con le linee coordinate uscenti da esso, cioè in guisa che $a_{ik} = \pi_{ik} = 0$ per $i \neq k$. Altri casi eccezionali, che io qui non studio, sono quelli in cui le ρ non sono tutte distinte, oppure solo alcune delle $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jik}$ siano nulle, oppure quello che non esistano in un punto generico n direzioni principali indipendenti. Tutti questi casi sono lasciati ad ulteriori ricerche. Ritornando al caso precedente in cui $a_{ik} = \pi_{ik} = 0$ (per $i \neq k$) e le ρ sono tutte distinte, cioè sono distinte le $\frac{l_{rr}}{a_{rr}}$ (ossia le $\frac{\pi_{rr}}{a_{rr}}$) le equazioni della teoria delle ipersuperficie (cfr. l'ultima delle (6) a p. 626 di loc. cit.) provano che i coefficienti a_{rst} della forma cubica fondamentale sono, se $r \neq s \neq t \neq r$, tutti nulli; e che quindi le coordinate ξ di iperpiano tangente soddisfano ad equazioni del tipo:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_r \partial u_s} = \beta_{rs} \frac{\partial \xi}{\partial u_r} + \beta_{sr} \frac{\partial \xi}{\partial u_s} \quad (r \neq s) \quad (r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Ma si noti che sarebbe bene escludere il caso che una delle ξ (o una loro combinazione lineare a coefficienti costanti) sia costante (cioè che le altre ξ possano adottarsi come coordinate non omogenee). In tal caso la retta intersezione dei piani ξ_i passa per un punto fisso O , e la congruenza K si riduce alla stella di rette di centro O .

Le (10) sono le stesse equazioni che il Darboux studia per il caso dei sistemi da lui chiamati coniugati. Per lui però vi sono sole n variabili ξ (per noi $n + 2$) che egli considera come coordinate non omogenee di punto. Il metodo di Darboux serve benissimo per lo studio di (10). Anzi un assistente della nostra Università si propone di estendere alle (10) le teorie di Darboux e Nicoletti svolte da questo per il caso di una sola equazione di 2° ordine.

Pe le congruenze qui definite si noti che $\chi^{(i)} = X - \left(\frac{\pi_{ii}}{a_{ii}} + \Omega \right) x$ è lo *iesimo* fuoco e che ξ_i è l'iperpiano tangente alla *iesima* falda focale. Il coefficiente di $2 du_r du_s$ nella forma quadratica relativa a questa falda è pertanto $-S \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \partial u_r} \frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial u_s} = -S \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \partial u_s} \frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial u_r}$, che si prova in virtù di (10) essere nullo se $r \neq s$ (perchè $\chi^{(i)}$ risulta una combinazione lineare delle x, x_0). Dunque sulle falde focali le sviluppabili della nostra congruenza intercettano

un sistema coniugato contrariamente a quanto abbiamo visto avvenire in generale.

Un cenno infine sulla generalizzazione della trasformazione di Moutard. Essendo nelle attuali coordinate $\sum \frac{\pi_{ii}}{a_{ii}} = 0$ (cfr. loc. cit.), il punto coniugato di x rispetto agli n fuochi è il punto $z = X - \Omega x$. Se anche sulla V'' luogo di questo punto le sviluppabili di K determinano sistemi coniugati, varranno le (7) con $\tau = \Omega R$. Cioè, essendo $\Omega_i = g_i + \gamma_i$, varrà (comunque siano scelte le linee coordinate) la $\sum \gamma_i du_i = \frac{1}{R} \sum R_r a^{rs} \pi_{is} du_i$, equivalente alle:

$$\gamma_i = \sum_{r,s} \frac{R_r}{R} a^{rs} \pi_{is} \quad (1).$$

Cioè si potrà applicare alla nostra ipersuperficie la trasformazione generalizzata di Moutard, se queste equazioni nella R sono compatibili. Così p. es., nel caso delle superficie, adottando coordinate asintotiche esse diventano:

$$R_u : R = \frac{\pi_{11} v}{\pi_{11}} - \beta \frac{\pi_{22}}{\pi_{11}} \quad ; \quad \frac{R_v}{R} = \frac{\pi_{22} u}{\pi_{22}} - \gamma \frac{\pi_{11}}{\pi_{22}}$$

$$\left[\text{dove } \tilde{\gamma}_u = e^{-\beta} \pi_{11} R \left(\frac{x}{R} \right)_v \quad ; \quad \tilde{\gamma}_v = e^{-\gamma} \pi_{22} R \left(\frac{x}{R} \right)_u \right].$$

La condizione di integrabilità di queste equazioni ci dice appunto (loc. cit., p. 105) che le sviluppabili $\pi_{11} du^2 - \pi_{22} dv^2 = 0$ della congruenza determinano sulla V un sistema coniugato ad invarianti uguali. E in ciò appunto consiste il teorema di Moutard.

Matematica. — *Le ricerche geometriche di Leonardo da Vinci.* Memoria del Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Considerazioni sulla guida degli aeroplani nella nebbia.* Nota del Corrisp. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Se le u sono le linee principali, questa equazione diventa:

$$\frac{R_r}{R} = \gamma_r \frac{a_{rr}}{\pi_{rr}} \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Fisica-matematica. — *Sulla propagazione delle radiazioni nei mezzi con assorbimento selettivo.* Nota del Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Anomalie della gravità e deviazioni della verticale determinate dalla Spedizione De Filippi nell'Asia Centrale (1913-14).* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ABETTI.

In una precedente Nota in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ ho dato le coordinate astronomiche delle stazioni eseguite dalla Spedizione De Filippi nell'Asia Centrale; in seguito l'Ammiraglio A. Alessio pubblicava i valori preliminari delle anomalie della gravità per le stesse stazioni nonchè le coordinate geodetiche e le deviazioni della verticale di buona parte di esse ⁽³⁾.

Poichè ora è stato finalmente possibile, per parte di Alessio e mia, di completare tutti i calcoli in duplicato e concludere i valori definitivi, credo opportuno di comunicarli in questa Nota, in sostituzione di tutti quelli, che da noi o da altri, sono stati in precedenza pubblicati ⁽⁴⁾. Per quanto riguarda le determinazioni delle coordinate astronomiche e geodetiche, i dettagli delle osservazioni e i risultati ottenuti si trovano raccolti nel vol. I, ser. I delle *Relazioni Scientifiche della Spedizione De Filippi* ⁽⁵⁾, quelli per le determinazioni della gravità relativa sono in corso di stampa nel vol. II della stessa serie.

Per intanto basti qui dire che la Spedizione disponeva di un apparato gravimetrico dell'Istituto Idrografico della R. Marina con i suoi 4 pendoli, e altri 4 gentilmente prestati dall'Istituto Geodetico di Potsdam, vennero fatti oscillare sullo stesso supporto. Stazione di base fu quella di Genova ben collegata, come è noto, al sistema di Potsdam ed ivi vennero fatti oscillare gli 8 pendoli prima e dopo la Spedizione e venne pure eseguita una determinazione dei coefficienti di densità dell'aria.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1928.

(2) Vol. XXX, p. 305, 1921.

(3) « Rivista Marittima ». Supplemento al fascicolo di marzo, 1922.

(4) Oltre ai due luoghi citati cfr.: SOLER, *Rapport sur les mesures...* in tome II dei « Travaux de la Section de Géodésie » etc., p. 74. Paris, 1925; DE GRAAFF HUNTER, « Profess. Paper », n. 16, Survey of India, p. 165, Dehra Dun 1918; Survey of India, « Geodetic Report », vol. I, p. 185, Dehra Dun, 1928.

(5) Zanichelli, Bologna 1925.

L'apparato gravimetrico del tipo bipendolare fu posato direttamente sul suolo o, quando questo non era abbastanza consistente, su di un grosso macigno, che veniva in quello affondato, e con ciò si ottennero piccole e quasi costanti flessioni del supporto in tutte le stazioni. In due di queste venne usata un' ampia tenda, fatta appositamente costruire con tre pareti dal dott. De Filippi, nelle altre fu fatto uso di locali in muratura, generalmente ben protetti da rapide variazioni di temperatura. Il cronometro, che faceva azionare il *relais* per l'osservazione delle coincidenze, veniva sempre rinchiuso in parecchie casse o addirittura affondato nel suolo. È motivo di soddisfazione notare, che i risultati corrispondono alle cure e precauzioni avute nell'eseguire le osservazioni e che il *Survey of India* ha, in questi ultimi anni, estesi i suoi lavori gravimetrici nelle regioni dell'Himàlaia impiegando le modalità da noi adottate nel 1913-14⁽¹⁾.

Il problema più difficile durante questa campagna era quello di poter mantenere l'invariabilità dei pendoli, dato l'inevitabile tormento dei lunghi e faticosi trasporti. Nel fatto, il confronto fra le durate di oscillazione a Genova, prima e dopo il viaggio, rivelò delle variazioni nella lunghezza dei singoli pendoli, ma fortunatamente la durata di oscillazione media del sistema degli 8 pendoli, prima e dopo, è risultata eguale, entro una cifra della settima decimale, e quindi si può ritenere con buon fondamento che la lunghezza del sistema degli 8 pendoli è rimasta invariata. Ciò dimostra anche, quanto sia stato utile poter disporre di un numero notevole di pendoli in queste speciali condizioni.

Nelle seguenti due tabelle sono raccolti per le varie stazioni: nella prima, i valori osservati della accelerazione della gravità g nel sistema di Potsdam, attraverso Genova e Padova, con i loro errori medi ϵ_g , l'osservatore (Al = Alessio; Ab = Abetti) e l'anno in cui fu fatta la determinazione. Seguono i valori $g_0 = g + \Delta h$ essendo $\Delta h = 3086 \cdot H \cdot 10^{-7}$, la correzione per l'altezza (in aria libera) ed H = l'altezza della stazione espressa in metri (vedi tabella II); γ_0 la gravità teorica, calcolata con la formula di Helmert del 1901, ed infine le anomalie $g_0 - \gamma_0$.

Nella seconda Tabella sono date le coordinate geodetiche da noi determinate con collegamenti alla rete trigonometrica indiana, le altezze, dedotte quando fu possibile dalla stessa rete trigonometrica, o altrimenti da osservazioni barometriche eseguite simultaneamente, da noi nelle stazioni di campagna con sei barometri, e dagli Osservatori meteorologici dell'India più prossimi a quelle. Seguono le coordinate astronomiche e le deviazioni della verticale in latitudine e longitudine. I valori fra parentesi quadre sono quelli fondamentali, rispettivamente del *Survey of India* e del Servizio Geodetico russo.

(1) Cfr. *Survey of India*, «Professional Paper», n. 15, p. 2, Dehra Dun, 1915; ed anche «Geodetic Report», vol. I, pp. 3 e 179, Dehra Dun, 1928.

TABELLA I.

Stazioni	Gravità osservata g cm. sec ⁻²	ϵ_g cm. sec ⁻²	Osser- vazioni	Anno	g_0 cm. sec ⁻²	γ_0 cm. sec ⁻²	$g_0 - \gamma_0$ cm. sec ⁻²
Dera Dun . . .	979.079	± 0.001	Ab, Al	1913	979.291	979.347	- 0.056
Srinagar . . .	979.090	3	Ab, Al	»	979.581	979.652	- 0.071
Dras	978.778	5	Ab, Al	»	979.725	979.682	+ 0.043
Toiti	978.853	6	Ab, Al	»	979.600	979.733	- 0.133
Uazul Hadür . .	978.536	6	Ab, Al	»	979.845	979.747	+ 0.098
Seardu	978.925	5	Ab, Al	»	979.614	979.755	- 0.141
Carghil	978.845	2	Ab, Al	1914	979.682	979.693	- 0.011
Lamaiuru	978.574	3	Ab, Al	»	979.642	979.669	- 0.027
Lè	978.529	3	Ab, Al	»	979.615	979.660	- 0.045
Dèpsang	978.165	5	Ab, Al	»	979.819	979.755	+ 0.064
Sughèt Caròl . .	978.741	5	Ab	»	979.877	979.845	+ 0.032
Jàreand	979.529	3	Ab	»	979.905	980.025	- 0.120
Càshgar	979.543	2	Ab	»	979.957	980.119	- 0.162
Tashchènt . . .	980.078	4	Ab	»	980.226	980.284	- 0.058

I risultati raccolti nelle due tabelle sono interessanti sotto parecchi punti di vista. Il valore da noi ottenuto per la Stazione fondamentale del *Survey of India* a Dera Dun non è in buon accordo col valore dal *Survey* stesso adottato, che è pure riferito al sistema di Potsdam attraverso la ex-stazione fondamentale inglese di Kew:

Dera Dun $g = 979.063$ dine (da Kew, Lenox-Conyngham, 1903-04),

poichè ne differisce di 0.016 dine, che è molto più di quanto comporti il nostro errore medio. Se si nota che altri due valori di collegamento di Dera Dun con la rete fondamentale, determinati dagli ufficiali del *Survey* (nel 1924 e nel 1927) differiscono fra loro di 0.018 dine e che quello del 1927:

Dera Dun $g = 979.072$ dine (da Cambridge; cap. Glennie, 1927),

riferito a Cambridge, che è la nuova stazione fondamentale inglese per la gravità, riduce la differenza col nostro valore a 0.007 dine, si deve concludere che probabilmente non si conosce ancora con sicurezza il collegamento di Dera Dun col sistema di Potsdam. Per Tashchènt, che è la

TABELLA II.

Stazioni	Coordinate geodetiche		H metri	Coordinate astronomiche		Deviazioni della verticale		Osservazioni
	φ_G +	λ_G		φ_A +	λ_A	$\varphi_A - \varphi_G$	$\lambda_A - \lambda_G$	
Dera Dun	[30° 19' 25." 13]	[78° 3' 21." 10]	685.5	—	—	—	—	
Srinagar	34 4 18	74 49 45	1590	—	—	[−17." 19]	—	Ab, Al
Dras	34 25 46.02	75 45 26.45	3068.4	—	—	—	—	»
Tolti	—	—	2420.2	35° 2' 0." 1	76° 6' 3." 0	—	—	»
Uazul Hadur	35 11 56. 1	75 32 18. 9	4243	35 12 21. 8	—	+25. 7	—	»
Scardu	35 17 49. 71	75 38 32. 42	2233	35 18 18. 01	75 38 21. 57	+28. 30	−10." 85	»
Carghil	34 33 39. 3	76 7 29. 6	2713	34 33 38. 4	76 7 39. 5	−0. 9	+9. 9	»
Lamaïuru	34 16 59. 4	76 46 24. 1	3461	34 17 5. 7	76 46 33. 3	+6. 3	+9. 2	»
Lè	34 10 7. 8	77 35 3. 4	3519.1	34 9 53. 3	77 34 52. 9	−14. 5	−10. 5	»
Dépsang	35 17 24. 0	77 58 24. 2	5361.2	35 17 21. 2	77 58 18. 2	−2. 8	−6. 0	»
Sughèt Caröl	—	—	3681	36 20 54. 91	78 1 36. 09	—	—	Ab
Järcand	—	—	1216	38 24 22. 22	77 15 46. 02	—	—	»
Cashgar	—	—	1343	39 28 19. 74	75 59 5. 64	—	—	»
Tashchènt	—	—	479	[41 19 31. 3]	[69 17 40. 8]	—	—	
Fronte Rimu (Caracortum) . .	35 20 58. 16	77 38 57. 68	4912	35 20 48. 39	—	−9.77	—	Ab, Al

stazione fondamentale del Servizio Geodetico russo nel Turchestàn, si ha un completo accordo, avendosi dalla compensazione del Borrass⁽¹⁾, come media delle determinazioni russe del 1902, 1910, 1911:

$$\text{Tashchènt } g = 980.079 \pm 0.004 \text{ dine}$$

con una differenza di una sola unità della terza decimale con la nostra determinazione.

Nel 1925 sono state eseguite, dai Capitani Glennie e Osmaston del *Survey of India*, una serie di determinazioni gravimetriche e di latitudine nel Kashmir e sulle pendici sud dell'Himàlaia²⁾. Di stazioni comuni con la nostra non vi è che Srinàgar, dove gli ufficiali inglesi occuparono una località che trovasi circa 460 metri al nord, 555 all'ovest e 6 metri più bassa di quella occupata dalla Spedizione De Filippi. Tenuto conto della differenza di altezza, il valore del *Survey* concorda bene col nostro, entro 3 unità della terza decimale. Per le altre stazioni, eseguite dal *Survey* nel Kashmir, non lungi dalle nostre, si nota un andamento generale delle anomalie $g_0 - \gamma_0$ concordante, specialmente se si confrontano le tre stazioni eseguite dal *Survey* sull'altipiano Deosai, con la nostra stazione di Uazul Hadir subito sotto l'orlo dell'altipiano. La stazione sull'altipiano Dèpsang è la più alta che sia mai stata eseguita sulla crosta terrestre.

In quasi tutte le nostre stazioni abbiamo determinato gli elementi topografici nelle immediate vicinanze, per potere eventualmente tenere conto, almeno in via approssimativa, delle riduzioni topografiche ed isostatiche. È però cosa nota che le misure eseguite in India e nel massiccio Himàlaiano danno delle anomalie, quando si sia tenuto conto delle accennate riduzioni, che dimostrano una insufficienza della uniforme compensazione isostatica secondo la teoria di Hayford. Rimandando a quanto sull'argomento è stato scritto da Alessio⁽³⁾ e la discussione che ne è seguita⁽⁴⁾, è bene ricordare i geniali lavori di Somigliana⁽⁵⁾, che probabilmente aprono la via a una discussione del tutto nuova e fruttifera, sull'interessante problema.

In conclusione, le determinazioni eseguite dalla Spedizione De Filippi confermano i risultati ottenuti dal *Survey of India* al sud della catena dell'Himàlaia, li estendono attraverso a questa, a quella del Caracorum, a quella del Cuen Lun, e li collegano con i risultati del Servizio Geodetico russo nel Turchestàn e nel Pamir. Tutte queste misure si completano a vicenda nel dimostrare, che la gravità su quelle catene montagnose è generalmente

(1) «Comptes Rendus», XVII Conf. Gen. Ass. Geodes. Intern., p. 295. Berlin, 1924.

(2) *Survey of India*, «Geodetic Report», vol. I, p. 167. Dehra Dun, 1928.

(3) «Rivista Marittima». Suppl. al fascicolo di marzo, 1922 e vol. II, serie I, Relazioni Scientifiche della Spedizione De Filippi, in corso di stampa.

(4) «The Geographical Journal», vol. LXIII, p. 26 e segg. Januarv, 1924.

(5) Sulla gravità normale e le formule di Helmert, «Rendiconti Acc. dei Lincei», vol. VII, p. 531, 1928 e le Note precedenti sullo stesso argomento.

in eccesso, ed è invece in difetto tanto al sud ⁽¹⁾, quanto al nord di queste, indicando probabilmente uguali condizioni di compensazione, o non compensazione, tanto nel piano indogangetico, quanto nei piani del Turchestàn.

Fra le maggiori anomalie si devono notare quelle trovate a Uazùl-Hadùr, a Scardu ed a Tolti nella vallata dell'Indo, fra l'Himàlaia e il Caracorùm, ed a Jàrcand e Càshgar al limite occidentale del Turchestàn, che è interessante paragonare con le forti e simili anomalie ad Osh e Andigian, al di là della catena dei monti Alai e Transalai.

Con queste anomalie vanno insieme anche le eccezionali deviazioni della verticale, da noi determinate per Scardu e Uazùl-Hadùr, che trovano una conferma nella deviazione in latitudine ottenuta dagli operatori del *Survey* sull'altipiano Deosài ⁽²⁾.

Geofisica. — *Rilievi sperimentali su alcuni metodi geoelettrici.*
Nota ⁽³⁾ del Corrisp. F. VERCELLI.

Lo scorso anno ero stato incaricato dall'Azienda Generale Italiana Petroli (A G I P) di partecipare a ricerche petrolifere, compiute in Italia, da squadre tedesche, con metodi geofisici. In seguito fui incaricato di costituire squadre nazionali di ricerca, con libertà di scelta fra i procedimenti da adottare e gli apparecchi da progettare.

Una prima squadra, operante con metodi geoelettrici, fu allestita nella primavera di quest'anno, presso l'Istituto di fisica della R. Università di Torino, ove il direttore, prof. Pochettino, fu largo di consiglio e di aiuti, e consentì che uno degli assistenti, il dr. Fulcheris, assumesse le funzioni di capo della squadra.

Si seguì il criterio di dotar la squadra di apparecchi idonei all'impiego di metodi svariati, salvo poi a scegliere, sulla base delle nostre esperienze, i procedimenti che risultassero più convenienti e adatti ai nostri terreni. Il ricorso ad esperienze proprie, per trovare orientamenti sicuri in questo campo di indagini, appariva tanto più necessario quanto più si esaminava la letteratura in argomento; le pubblicazioni sono volutamente incomplete, per mascherare gli aspetti più notevoli dei metodi sfruttati dalle singole società; i risultati sono tenuti segreti, e di essi è pubblicato solo quello che può giovare alla concorrenza fra le ditte: nei pochi lavori di carattere esclusivamente scientifico si nota poi la mancanza di sicure direttive nei riguardi

(1) BOWIE, *Isostasy*, in «Travaux de la Sect. de Géod. d'Union Geod. Intern.», tome 4, p. 17, Paris, 1927.

(2) «Geodetic Report», vol. I, p. 193. Dehra Dun, 1928.

(3) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1928.

delle stesse questioni fondamentali, che pure potrebbero venire chiarite con esperimenti semplici.

Nei pochi mesi di ricerche compiute dalla nostra squadra abbiamo potuto già raggiungere estesi risultati, che gettano molta luce su diverse questioni dibattute e controverse. Con il consenso della A G I P, che opera in queste ricerche, come è noto, per mandato del Governo nazionale, posso presentare notizie in argomento.

In questa prima fase di lavoro si è sperimentato col procedimento delle correnti alternate, aventi frequenza acustica, fra due punti del suolo distanti fra loro qualche centinaio di metri. La corrente è portata alle prese di terra (elettrodi) mediante cavo isolato.

Il *campo elettrico* alla superficie del suolo viene esplorato con sonde mobili, amplificatore e telefono (ovvero galvanometro, previa rettificazione). Si rilevano sul terreno le linee equipotenziali e di corrente; linee che possono essere teoricamente tracciate, nel caso di un suolo elettricamente isotropo e omogeneo, mediante noti procedimenti del Maxwell.

Il *campo elettromagnetico* indotto nell'aria viene esplorato nei pressi del suolo mediante telaio induttore, amplificatori e telefono (ovvero galvanometro). Di questo campo non si è riusciti ancora a fare un calcolo teorico soddisfacente. Per avere figurazioni normali degli elementi che si considerano, allo scopo di avere una base di riferimento nello studio dei dati osservati, si è costretti perciò a ricorrere a modelli, o meglio alla determinazione di valori medi dei dati rilevati in terreni diversi. Si sogliono considerare preferibilmente i caratteri geometrici del campo; molto in uso sono specialmente le figurazioni delle proiezioni orizzontali delle linee di forza, o di un sistema di *linee ortogonali* alle proiezioni stesse (linee impropriamente dette Induktionstromlinien, o Integralstromlinien dai collaboratori del gruppo Elbof, della Ditta Piepmeyr); sono pure usate le linee congiungenti punti nei quali i vettori magnetici hanno azimut uguali (linee che la nostra squadra chiama *isoazimutali*), ovvero punti in cui gli stessi vettori hanno eguali inclinazioni (*isocline*). Può convenire di considerare talora anche le caratteristiche fisiche dei vettori: differenze di fase nei valori istantanei dei potenziali, intensità relative dei vettori magnetici, ecc.

Coi dispositivi sinora di uso generale il campo sperimentalmente rilevato constava della somma di due campi: quello del conduttore fra il gruppo generatore e gli elettrodi, e quello delle correnti nel terreno. Quest'ultimo solo ha interesse nelle ricerche; il primo è un elemento perturbatore, che complica tutti i fenomeni, introduce una componente verticale assai grande nel campo risultante, accentua le differenze di fase nelle distribuzioni dei potenziali, determina influenze mutevoli colla postazione e colla inclinazione dei cavi sull'orizzonte. Uno dei compiti più delicati è perciò quello di calcolare, punto per punto, le influenze dovute al campo del conduttore, per correggere i dati osservati ed isolare il campo dovuto ai soli filetti di cor-

rente del suolo. In una recente monografia di W. Heine ⁽¹⁾ sono ampiamente discusse le influenze del conduttore, tanto sul campo elettrico del suolo, quanto su quello elettromagnetico dell'aria, e sono date ampie indicazioni per il calcolo delle correzioni.

Invece di seguire tale via, laboriosa e malcerta, ho ritenuto essere cosa ben più semplice e agevole sopprimere addirittura il campo del conduttore, schermandolo il cavo con rivestimento metallico. L'influenza esercitata dallo schermo può essere stimata, come ordine di grandezza, sulla base di una teoria del Levi-Civita ⁽²⁾; il dr. Rostagni, assistente nella Università di Torino, aveva calcolato così che il campo magnetico, per azione dello schermo, sarebbe stato ridotto, per correnti del tipo da noi adottato, a meno di un centesimo; previsione pienamente conforme alle esperienze che poi vennero fatte. Il cavo da noi scelto è rivestito di fitta treccia di ottone; venne fornito dalla Ditta Tedeschi, di Torino.

L'adozione di un cavo schermato avrebbe anche dovuto semplificare fortemente, secondo il mio punto di vista, il fenomeno della polarizzazione ellittica dei campi elettrico e magnetico. Su questo fenomeno esistono ampie trattazioni ⁽³⁾; esso è dovuto, come è noto, alle differenze di fase nelle distribuzioni dei potenziali per azioni capacitive e induttive in un suolo eterogeneo.

Taluni ricercatori (gruppo Elbof) avevano sistematicamente operato come se i campi esplorati fossero semplicemente alternati; altri (Ambronn, Sundberg) sostennero invece la necessità di tenere conto della polarizzazione; secondo Ambronn la struttura ellittica dei campi elettrico e magnetico è tale da togliere ogni significato, anche approssimato, alle frasi « linee di forza », « linee equipotenziali »; non esisterebbero cioè nè postazioni del telaio, nè posizioni delle sonde mobili, per le quali si ottenga silenzio al telefono, ma solo si avrebbero settori, più o meno ampi, nei quali il suono si riduce a un minimo, e per conseguenza le ricerche dovrebbero essere condotte colla direttiva di precisare i caratteri delle ellissi dei singoli vettori e di misurare le relative differenze di fase.

La soppressione del campo del conduttore, portando a rilevare in modo più corretto di quanto prima fosse possibile il campo delle correnti del suolo, sembrava dovesse anche consentire una maggiore chiarezza nei rilievi sul terreno; in particolare pareva potesse rendere agevole il controllo sulla controversa questione se riescano sensibili all'esterno i soli giacimenti più conduttivi del suolo circostante, come afferma Ambronn, ovvero se anche i materiali più isolanti possano venire direttamente avvertiti, come sostengono Gella e i collaboratori della Elbof. L'indagine interessa soprattutto le ri-

(1) W. HEINE, *Elektrische Bodenuntersuchungen*, Berlin, Bornträger, 1928,

(2) T. LEVI-CIVITA, *Influenza di uno schermo conduttore, ecc.* «Rend. Lincei», XI, 1902, pp. 163, 191 e 228.

(3) AMBRONN, *Methoden der angewandte Geophysik*, Leipzig, Steinkopf, 1926.

cerche petrolifere; si tratta di decidere se gli idrocarburi riescano direttamente percettibili come masse isolanti, ovvero se essi possano semplicemente venire presunti in quanto si avverta la presenza di acque salate conduttive, colle quali formano frequentemente un sistema associato.

Presento ora, sulle varie questioni accennate, le conclusioni derivate dalle esperienze da noi compiute.

1. Usando conduttore schermato, fra il gruppo generatore e gli elettrodi, i vettori del campo elettromagnetico sono prossimamente orizzontali.

Inclinazioni superiori a 2° – 3° sono anomale e da riferire a eterogeneità del sottosuolo, a meno che non provengano da influenze di masse conduttive esterne. Ad esempio, in presenza di rotaie tramviarie con andamento prossimamente parallelo a linee di corrente del campo elettrico, abbiamo osservato che attorno alle rotaie si aveva un campo magnetico con vettori fortemente inclinati; le inclinazioni decrescevano rapidamente colla distanza e si faceva poi passaggio alla condizione normale, con vettori orizzontali.

Con conduttore non schermato è noto che i vettori hanno inclinazioni assai elevate, distribuite secondo una configurazione tipica, della quale si danno anche schemi normali.

In presenza di strati conduttivi interni, o di fronte a distribuzioni eterogenee nei materiali del suolo, i vettori magnetici presentano inclinazioni apprezzabili, che vanno misurate con grande esattezza; le carte *isocline* che si ottengono hanno importanza notevole nel localizzare le aree di possibili giacimenti minerali.

2. La polarizzazione ellittica del campo elettromagnetico, sopprimendo il campo del conduttore, viene ridotta in modo che il campo può essere praticamente considerato come semplicemente alternato. Si raggiunge infatti effettivo silenzio al telefono, o almeno un minimo bene marcato, entro settori non più ampi di 2° – 3° , pure usando potenza di circa 2 kva, molto superiore a quella usata dalle squadre estere.

Non si ha silenzio, e il settore di minimo si amplifica, e quindi si ha una polarizzazione non più trascurabile, nelle sole zone in cui anche le inclinazioni assumono valori anomali. I due fenomeni sono chiaramente indizio di eterogeneità elettriche nel sottosuolo e possono servire per delimitare le aree corrispondenti. Segnalo un caso, osservato nei pressi di Parma, in cui si aveva addirittura polarizzazione circolare; comunque si orientasse il telaio, il suono al telefono non veniva modificato; in quella zona il suono era molto più debole che nelle aree circostanti e tutte le caratteristiche del campo erano estremamente anormali.

Nelle sole aree in cui la polarizzazione è bene sentita potrebbe convenire lo studio delle caratteristiche delle ellissi, se in tal modo fosse possibile avere elementi utili per interpretare le caratteristiche geologiche delle aree anomale; ma su ciò la nostra squadra non ha ancora esperienze proprie.

3. Gli schemi delle linee ortogonali alle linee di forza e delle isoazimutali, determinati coi nostri dispositivi, differiscono alquanto da quelli usati da altre squadre in analoghe condizioni.

Mutando le distanze fra gli elettrodi, gli stessi schemi subiscono modificazioni apprezzabili; indizio questo che l'uso di modelli per la deduzione di carte normali non è corretto.

4. I tentativi, fatti da alcuni autori, di elaborare formole approssimate per stabilire una corrispondenza diretta fra le anomalie osservate e le condizioni dei giacimenti del sottosuolo, non possono considerarsi ancora adeguati allo scopo. La teoria, presentata nella citata monografia di W. Heine, sostituisce al semispazio indefinito uno spazio limitato, il che porta a conclusioni contrastanti coll'osservazione, per esempio, alla condizione assurda che le inclinazioni dei vettori debbano crescere verso il contorno; essa inoltre ammette validi nel suolo, senza opportune limitazioni, i principi del Kirchhoff, e così si giunge a risultati arbitrari, dei quali nessun uso pratico è possibile fare.

In mancanza di teorie adeguate conviene attenersi alle determinazioni empiriche, mediante modelli in laboratorio, o prove su terreni noti; le deduzioni possono avere notevole importanza, almeno dal punto di vista qualitativo.

5. Anche per il campo elettrico superficiale si può fare l'ammissione che esso sia semplicemente alternato. L'affermazione che, neppure a distanza di pochi metri, sia possibile, con sonde mobili, avere silenzio al telefono, e quindi non abbia senso parlare di linee equipotenziali, non corrisponde alle nostre osservazioni. Anche a distanze di qualche decina di metri fra le sonde, i punti di una stessa linea equipotenziale riescono nettamente determinati, con approssimazione di circa un decimetro, e al telefono si ha silenzio praticamente completo. Solo in aree anomale per il campo elettro-magnetico si rende sensibile anche la polarizzazione del campo elettrico.

6. In pieno accordo con quanto fu già da altri affermato, ritengo che il rilievo del campo elettromagnetico sia più significativo di quello del campo elettrico, a scopo di ricerche minerarie; quest'ultimo invero risente solo indirettamente le azioni delle eterogeneità interne; il primo le rivela in modo diretto.

Mentre però alcuni ritengono sia preferibile operare con distanze non grandi fra gli elettrodi, noi abbiamo constatato che, passando da distanze di 200 m. a 400 m., le anomalie venivano esaltate, probabilmente per maggiore influenza dei giacimenti profondi.

7. In una vasta zona emiliana, ove il suolo è formato di argille con conduttività relativamente elevata, tutte le anomalie riscontrate risultano corrispondenti alla presenza di oasi di materiali più isolanti del suolo, probabilmente idrocarburi. Ciò dimostra che i giacimenti isolanti possono ve-

nire direttamente avvertiti e chiarisce quindi in modo non dubbio la lunga controversia a cui dianzi si è accennato.

Mi è grato esprimere viva riconoscenza alla A G I P per l'incarico affidatomi e per lo sviluppo da essa dato in generale alle squadre nazionali di ricerca, mettendo così gli studiosi nostri in condizione di poter efficacemente contribuire al rapido progresso dei nuovi metodi della geofisica applicata.

E yive grazie esprimo al prof. Pochettino, al personale dell'Istituto fisico di Torino e ai collaboratori della squadra geoelettrica.

Fisica. — *A proposito di celle fotoelettriche al Tallio.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. ROLLA e di L. MAZZA.

Nel fascicolo di luglio di questi « Rendiconti » ⁽²⁾ è comparsa una Nota di Q. Majorana e G. Todesco in cui si descrivono dei procedimenti per la preparazione delle celle fotoelettriche al Tallio.

È doveroso osservare, in omaggio alla verità, che uno di noi (Rolla), in una conferenza tenuta, sullo stesso argomento, a Padova nel giugno 1927 ⁽³⁾, aveva reso pubblici i risultati di una ricerca assolutamente simile, annunciando anche l'esistenza di due brevetti rilasciatici nei primi mesi del 1927:

1° *Cella a fotoresistenza elettrica fotoselettiva per radiazioni infrarosse.* (Reg. 350, n. 1323).

2° *Disposizioni costruttive per celle fotoelettriche.* (Reg. 350, n. 1322).

In base a questi brevetti, si costruiscono da tempo le celle « Roma » sperimentate con successo dall'Autorità militare.

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1928.

(2) P. 9.

(3) Prima manifestazione nazionale ottica. « Atti », p. 187.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla unicità della soluzione nel problema di Dirichlet.* Nota ⁽¹⁾ di G. ASCOLI, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Il teorema di unicità per la soluzione del problema di Dirichlet relativo a un dominio D dell' S_n viene dimostrato nella trattazione classica nell'ipotesi che in D le funzioni armoniche che si considerano siano continue senza eccezione. È in certi casi utile (per es., nelle ricerche intorno ai casi di impossibilità del problema di Dirichlet) poter affermare la validità del teorema anche quando la continuità manchi o possa mancare in un certo insieme I di punti del dominio, interni o di contorno; ammettendosi però in tal caso che le funzioni siano limitate. Ciò potrà evidentemente accadere solo se l'insieme I sarà sufficientemente ristretto; e sarebbe certo molto interessante caratterizzare mediante proprietà geometriche gli insiemi I che permettono tale deduzione indipendentemente da ogni conoscenza sul comportamento delle funzioni nei punti di essi, e possibilmente per i domini più generali.

Per il caso di punti interni al dominio, il problema si riduce facilmente all'altro: a quali condizioni deve soddisfare l'insieme I , interno a D , affinché una funzione armonica regolare in $D - I$ e ivi limitata, sia regolare anche nei punti di I (cfr. il n. 4 di questa Nota).

A ciò si riferisce un'osservazione di Picard ⁽²⁾, più volte citata, in cui si considera il caso di un punto isolato, estesa in vario senso da Lebesgue ⁽³⁾; e un enunciato generalissimo di Bouligand ⁽⁴⁾, dove interviene il concetto così complesso di *capacità*, e del quale non ho potuto rintracciare la dimostrazione.

Meno studiato sembra essere il caso di un insieme I al contorno; non conosco infatti in proposito che una osservazione di Zaremba ⁽⁵⁾, relativa al caso di un unico punto.

Scopo principale di questa Nota è di dare una condizione sufficiente per la validità del teorema di unicità la quale, se non ha ancora il ca-

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1928.

(2) *Sur les singularités des fonctions harmoniques* («C. R. Ac. Sc.», 1923, t. 176, p. 933). Cfr. anche «Bull. Soc. Math. Fr.», 1924, pp. 162-166.

(3) *Sur les singularités des fonctions harmoniques* («C. R. Ac. Sc.», 1923, t. 176, p. 1097 e 1270).

(4) *Fonctions harmoniques* (Fasc. XI del «Mémorial des Sc. Math.»), p. 38, ultime righe.

(5) *Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet* («Bull. Crac.», 1909, pagine 561-564).

rattere puramente geometrico di cui si è discusso, è almeno di facile applicazione (se ne ricavano subito infatti i teoremi di Picard, Lebesgue e Zarembo); e non escluderei che essa, nella sua forma più generale, potesse riconoscersi anche come una condizione necessaria.

La dimostrazione, semplicissima, si applica senz'altro a tutte le soluzioni di equazioni lineari a derivate parziali di tipo ellittico, nei domini in cui vale per esse il teorema di unicità nella sua forma ordinaria. E ad esse, col semplice scambio delle soluzioni elementari, si applicano anche le dimostrazioni relative ai casi particolari qui considerati.

1. Lemma. — *Se in un insieme aperto ⁽¹⁾ A sono definite due funzioni continue U(P), V(P), la seconda delle quali ha segno costante, tali che per valori arbitrari di λ e μ la funzione $\lambda U(P) + \mu V(P)$ non ha in A punti di massimo o di minimo, la stessa proprietà avrà in A il rapporto $U(P)/V(P)$.*

Dim. Esista in A un punto P_0 nel quale la $U(P)/V(P)$ abbia, per esempio, un massimo; per i punti di un certo intorno di P_0 in A si avrà:

$$\frac{U(P)}{V(P)} \leq \frac{U(P_0)}{V(P_0)}$$

da cui, essendo $V(P) U(P_0)$ positivo:

$$V(P_0) V(P) - U(P_0) V(P) \leq 0.$$

Ora, detto $f(P)$ il primo membro, è $f(P_0) = 0$, sicchè nel considerato intorno di P_0 si avrà:

$$f(P) \leq f(P_0)$$

e $f(P)$ avrà un massimo nel punto P_0 . Ma ciò è assurdo, perchè $f(P)$ ha la forma $\lambda U(P) + \mu V(P)$.

Le condizioni del lemma sono in particolare soddisfatte se $U(P)$, $V(P)$ sono funzioni armoniche in A e $V(P)$ non vi si annulla mai.

2. Dato un dominio D di S_n , limitato, diremo che un insieme I di punti di D (interni o di contorno) ha, rispetto a D, la proprietà Z quando si può definire in $D - I$ una funzione $G(P)$ che è quivi continua e positiva, che è armonica nei punti di $D - I$ interni a D e che nei punti di I diviene infinita (positiva), sicchè $g(P) = 1/G(P)$ possa ritenersi definita in tutto D, continua, nulla nei punti di I, positiva altrove. Segue subito:

a) *Un insieme che ha la proprietà Z rispetto a D è chiuso*, essendo formato dai punti di D dove una funzione $g(P)$ continua in D assume il valore 0;

(1) Cioè formato di soli punti interni. Per la nomenclatura, e in particolare per l'uso della parola « dominio » seguiamo il trattato di PICONE (*Analisi infinitesimale*, Catania, 1923). È da notare che molti autori recenti (per es., la scuola americana) considerano sempre il problema di Dirichlet per gli insiemi aperti, anzichè per i domini; il passaggio è facile, quando si abbia riguardo ai punti di contorno che divengono interni quando all'insieme aperto si aggiunge il suo derivato.

b) Se più insiemi I_1, I_2, \dots, I_n hanno la proprietà Z rispetto a D , anche la loro riunione I avrà la proprietà Z , bastando far corrispondere ad I la somma delle funzioni armoniche $G_1(P), G_2(P), \dots, G_n(P)$ corrispondenti a I_1, I_2, \dots, I_n ;

c) Se il dominio D contiene il dominio D' , e l'insieme I ha la proprietà Z rispetto a D , l'insieme ID' , se non è vuoto, ha la proprietà Z rispetto a D' , bastando limitare a D' il campo di definizione della $G(P)$ corrispondente ad I in D .

Sono esempi semplici di insiemi aventi la proprietà Z rispetto ad ogni dominio che li contenga:

α) Un punto O ; si ponga $G(P) = \log [c(OP)]$ con c maggiore del diametro di D , per $n = 2$; $G(P) = 1/(OP)^{n-2}$ per $n > 2$.

β) Un insieme numerabile $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots$, purchè chiuso; formata la $G_i(P)$ secondo α) per il punto generico O_i , si ponga:

$$G(P) = \sum \epsilon_i G_i(P)$$

dove le ϵ_i sono quantità positive tali che la serie $\sum \epsilon_i$ converga. La dimostrazione non offre difficoltà.

γ) Per $n > 2$, una linea rettificabile l ; il potenziale di una distribuzione di densità lineare unitaria in l , cioè

$$G(P) = \int_{\gamma}^L \frac{ds}{r^{n-2}} \quad (L \text{ lunghezza della linea})$$

soddisfa infatti alle condizioni volute.

In condizioni assai larghe, questo risultato è estendibile a varietà a k dimensioni di un S_n , per $n > k + 1$. Su queste affermazioni tornerò in una Nota successiva.

δ) Hanno naturalmente la proprietà Z gli insiemi ottenuti dai precedenti con l'applicazione dei teoremi b) c) di questo numero.

3. Se D è un dominio limitato di S_n , e I un insieme che ha rispetto a D la proprietà Z ; se in $D - I$ è definita una funzione $U(P)$ limitata e continua, che è armonica nei punti interni di tale insieme, allora il valore di $U(P)$ in un punto di $D - I$ è compreso tra il limite inferiore λ e il limite superiore Λ dei valori che $U(P)$ assume nei punti del contorno di D ove essa è definita.

Basterà provare che se è $U(P) \equiv 0$ nei detti punti di contorno è $U(P) \equiv 0$ in tutto $D - I$; l'applicazione del risultato a $U(P) - \lambda$ e $\Lambda - U(P)$ darà la tesi.

Sia $G(P)$ la funzione armonica corrispondente a I secondo il n. 2. L'interno A dell'insieme $D - I$ è un insieme aperto, perciò, per il n. 1, la funzione $V(P) = U(P) / G(P)$ non ha in A massimi o minimi. Ora al tendere di P a un punto di I , $U(P)$ essendo limitata, $G(P)$ infinita, $V(P)$ tende a zero. Quindi $V(P)$ può considerarsi definita e continua in

tutto D . Essa ha perciò un minimo, o sul contorno di D o in un punto di I . Ma sul contorno di D è $V(P) \geq 0$, su I è $V(P) = 0$, quindi il minimo è nullo, $V(P) \geq 0$ in tutto D , $U(P) \geq 0$ in tutto $D - I$ c. v. d.

Per $\lambda = \Lambda = 0$, si deduce che se $U(P)$ è nulla nei punti del contorno ove è definita, è nulla in tutto $D - I$; di qui il teorema di unicità, in modo ben noto. Si osservi inoltre:

a) Il ragionamento non richiede che $U(P)$ sia limitata; basta che nell'intorno dei punti di I essa sia tale che $U(P)/G(P)$ sia infinitesima.

b) Si può sostituire ad I una sua parte qualunque I' che può non possedere più la proprietà Z (per es. se non è chiusa); le proprietà valide in $D - I'$ sono *a fortiori* valide in $D - I$. Per es., per $n > 2$, l'insieme eccezionale potrà essere un insieme arbitrario contenuto in una o più linee rettificabili.

4. Se nel teorema precedente I si suppone interno a D si può ottenere un risultato più preciso, che estende la citata osservazione di Picard. È facile infatti costruire un dominio D' interno a D e avente I nel suo interno, per il quale il problema di Dirichlet sia risolubile. Sia $U_1(P)$ la funzione armonica in D' che assume al contorno i valori stessi assunti da $U(P)$; come la $U(P)$ essa è armonica e limitata in $D' - I$, e poichè alle due funzioni è applicabile il teorema di unicità, si ha $U_1(P) = U(P)$. La $U(P)$ si può dunque estendere a tutto D' , in modo da esservi ovunque regolare. Brevemente:

Una funzione armonica limitata nell'intorno di un insieme I dotato della proprietà Z rispetto a questo intorno, è regolare anche nei punti di I .

Matematica. — *Sopra un notevole gruppo di operatori funzionali.* Nota ⁽¹⁾ di F. SBRANA, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Espongo qui, come comunicazione preliminare, alcuni risultati essenziali di mie recenti ricerche sul calcolo degli operatori funzionali $f(\Delta)$, con

$\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$, e t variabile reale; il quale metodo di calcolo, col nome anche di *calcolo operativo* o *calcolo simbolico*, viene di giorno in giorno sempre più usato con successo per la risoluzione di numerosi problemi di Fisica Matematica, tanto tecnici, quanto inerenti alla novissima fisica dell'atomo ⁽²⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1928.

(2) Cfr., per questa teoria, il corso litografato delle Lezioni di Fisica Matematica dettate dal prof. G. GIORGI all'Università di Cagliari, nel 1926-1927. Si troveranno in esso numerose indicazioni bibliografiche sull'argomento.

Quanto allo sviluppo più completo di queste ricerche di cui ora faccio conoscere i risultati, esso apparirà in una Memoria negli « Annali di Matematica », e in una Nota negli « Atti del Congresso Internazionale dei Matematici a Bologna ».

I. — CONSIDERAZIONI GENERALI.

È noto che se l'operando è una generica funzione reale $V(t)$, riesce opportuno (in questo calcolo simbolico), valersi della rappresentazione formale

$$(1) \quad V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) Fu(t-\tau) d\tau,$$

in cui $Fu(t)$ è simbolo di funzione impulsiva.

Quando $V(t)$ è definita in un determinato intervallo, integrabile in esso, e coincide con la derivata del proprio integrale, per ogni t compreso in quell'intervallo, si può sostituire alla (1) la rappresentazione effettiva

$$(2) \quad V(t) = \Delta \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) I(t-\tau) d\tau,$$

dove $I(t)$ è la nota funzione che si riduce a zero per $t < 0$, a uno per $t > 0$.

Se $f(\Delta)$ è un operatore lineare e normale, diffusivo, la funzione generatrice $G(t)$, che fornisce la valutazione fondamentale di $f(\Delta)V(t)$, è data notoriamente da

$$(3) \quad G(t) = \Delta f(\Delta) I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int f(\omega) e^{\omega t} d\omega, \quad (i^2 = -1),$$

in cui ω indica variabile complessa, ed s è una linea del piano ω , che va da $-i\infty$ a $+i\infty$, lasciando a sinistra i punti singolari al finito di $f(\omega)$.

Si può dimostrare che se $f'(\omega), f''(\omega), \dots, f^{(n-1)}(\omega)$ sono diffusivi come $f(\omega)$, vale la seguente identità

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} + t \right)^n \Delta f(\Delta) I(t) = 0;$$

più in generale, se $\Phi(\omega)$ è nulla nell'origine, e olomorfa in un suo intorno, sotto condizioni facili a stabilirsi per le derivate successive di $f(\omega)$, si ha

$$(5) \quad \Phi \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} - t \right) \Delta f(\Delta) I(t) = \Phi \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} - t \right) f(\Delta) Fu(t) = 0.$$

Se invece $V(t)$ è una funzione non impulsiva, si trova

$$(6) \quad \Phi \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} + t \right) f(\Delta) V(t) = f(\Delta) [\Phi(t) V(t)],$$

e quest'ultima uguaglianza sussiste anche quando $f(\Delta)$ è un polinomo in Δ .

2. — SU UNO SPECIALE GRUPPO DI OPERATORI.

Notevole interesse presentano, per le applicazioni ai problemi di Elettrodinamica, gli operatori del tipo

$$(7) \quad \frac{P_1^{p_1} P_2^{p_2} \dots P_k^{p_k}}{Q_1^{q_1} Q_2^{q_2} \dots Q_b^{q_b}},$$

in cui $P_1, P_2, \dots, P_b, Q_1, Q_2, \dots, Q_b$, siano polinomi in Δ (coefficienti indipendenti da t), e $p_1, p_2, \dots, p_b, q_1, q_2, \dots, q_b$ rappresentino costanti reali.

Ho potuto dimostrare, valendomi delle identità (5), (6), che la funzione generatrice, $G(t)$, di uno qualunque di tali operatori, è soluzione di un'equazione di Laplace (alle derivate ordinarie). Precisamente, posto l'operatore (7) sotto la forma

$$(8) \quad \varphi(\Delta) = (m_1 + l_1 \Delta)^{r_1} (m_2 + l_2 \Delta)^{r_2} \dots (m_s + l_s \Delta)^{r_s},$$

con $m_1, m_2, \dots, m_s, l_1, l_2, \dots, l_s$ costanti (rispetto a t) reali o complesse, tali che si abbia

$$m_i l_b - m_b l_i \neq 0, \quad \text{per } i \neq b,$$

ed r_1, r_2, \dots, r_s costanti reali, $G(t)$ verifica l'equazione di Laplace, di ordine s ,

$$[t f_1(\Delta) + f_2(\Delta)] G(t) = 0,$$

in cui

$$f_1(\Delta) = (m_1 + l_1 \Delta) (m_2 + l_2 \Delta) \dots (m_s + l_s \Delta),$$

mentre $f_2(\Delta)$ è un polinomio (in Δ) di grado $s - 1$, dato da

$$f_2(\Delta) = f_1'(\Delta) + f_1(\Delta) \frac{d \log \varphi(\Delta)}{d\Delta}.$$

$$3. - \text{L'OPERATORE } (m_1 + l_1 \Delta)^{r_1} \cdot (m_2 + l_2 \Delta)^{r_2}.$$

Trascurando il fattore costante $l_1^{r_1} l_2^{r_2}$, possiamo riferirci al seguente

$$(a + \Delta)^{r_1} (b + \Delta)^{r_2}, \quad \left(a = \frac{m_1}{l_1}, b = \frac{m_2}{l_2} \right).$$

Determiniamo poi due numeri interi positivi o nulli, N_1, N_2 , per modo che si abbia

$$r_1 = N_1 - n_1, \quad r_2 = N_2 - n_2,$$

con

$$0 \leq n_1 < 1, \quad 0 \leq n_2 < 1.$$

Otteniamo intanto

$$(9) \quad (a + \Delta)^{n_1} (b + \Delta)^{n_2} = (a + \Delta)^{N_1} (b + \Delta)^{N_2} \int_{-\infty}^t V(\tau) H(t - \tau) d\tau,$$

dove $G(t)$ è la funzione generatrice di

$$(a + \Delta)^{-n_1} (b + \Delta)^{-n_2}.$$

Ma è facile riconoscere che le funzioni generatrici dei due fattori sono date rispettivamente da

$$\frac{1}{\Gamma(n_1)} e^{-at} t^{n_1-1}, \quad \frac{1}{\Gamma(n_2)} e^{-bt} t^{n_2-1}.$$

Perciò risulta

$$(10) \quad H(t) = \frac{1}{\Gamma(n_1) \Gamma(n_2)} \int_0^t \frac{e^{-[au+b(t-u)]}}{u^{1-n_1} (t-u)^{1-n_2}} du \quad (1).$$

In modo simile si può determinare, più in generale, la funzione generatrice dell'operatore (8).

Supponiamo ora, in particolare,

$$n_1 = n_2 = \frac{1}{2};$$

risulterà

$$(11) \quad H(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{e^{-[au+b(t-u)]}}{\sqrt{u(t-u)}} du = \frac{e^{-bt}}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-(a-b)s}}{\sqrt{s(1-s)}} ds.$$

(1) Difatti, se $f_1(\Delta)$, $f_2(\Delta)$ sono due generici operatori, diffusivi, $G_1(t)$, $G_2(t)$ le loro funzioni generatrici, la funzione generatrice del loro prodotto [cioè di $f_1(\Delta)$, $f_2(\Delta)$] si ottiene componendo $G_1(t)$ e $G_2(t)$, secondo la regola del VOLTERRA. Per dimostrarlo consideriamo un generico operando $V(t)$; dalle uguaglianze

$$W(t) = f_1(\Delta) V(t) = \int_{-\infty}^t V(\tau) G_1(t - \tau) d\tau,$$

$$f_1(\Delta) f_2(\Delta) V(t) = f_2(\Delta) W(t) = \int_{-\infty}^t G_2(t - \tau) d\tau \int_{-\infty}^{\tau} V(\theta) G_1(\tau - \theta) d\theta,$$

data l'arbitrarietà di $V(t)$ (che si può supporre assegnato in modo tale da rendere lecito nell'ultimo integrale lo scambio in ordine delle integrazioni, secondo la formula di DIRICHLET), si trae

$$f_1(\Delta) f_2(\Delta) V(t) = \int_{-\infty}^t V(\theta) d\theta \int_{\theta}^t G_1(\tau - \theta) G_2(t - \tau) d\tau.$$

Ponendo poi $\tau - \theta = u$, si ottiene appunto

$$G(t - \theta) = \int_0^{t-\theta} G_1(u) G_2(t - \theta - u) du.$$

Questa funzione si esprime agevolmente per mezzo della funzione di Bessel $J_0(\chi)$. Infatti è notissimo che

$$J_0(i\chi) = \frac{e^\chi}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-2\chi s}}{\sqrt{s(1-s)}} ds;$$

segue quindi dalla (11) che

$$H(t) = e^{-\frac{a+b}{2}t} J_0\left[i \frac{a-b}{2}t\right].$$

Se, come si verifica di solito nelle applicazioni, a e b sono reali, $J_0\left[i \frac{a-b}{2}t\right]$ diviene la cosiddetta funzione di Bessel non oscillante, $I_0\left[\frac{a-b}{2}t\right]$ ⁽¹⁾.

Si ha dunque

$$\frac{1}{\sqrt{(\Delta+a)(\Delta+b)}} V(t) = \int_{-\infty}^t V(\tau) e^{-\frac{a+b}{2}(t-\tau)} I_0\left[\frac{a-b}{2}(t-\tau)\right] d\tau.$$

Se poi nella (9) si pone $N_2 = 1$, $N_1 = 0$, $\left[n_1 = n_2 = \frac{1}{2}\right]$, si ottiene

$$\sqrt{\frac{\Delta+b}{\Delta+a}} V(t) = (b+\Delta) \int_{-\infty}^t V(\tau) e^{-\frac{a+b}{2}(t-\tau)} I_0\left[\frac{a-b}{2}(t-\tau)\right] d\tau;$$

ovvero, indicando con $I_1(\chi)$ la funzione di Bessel non oscillante del 1° ordine [che è la derivata di $I_0(\chi)$],

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\Delta+b}{\Delta+a}} V(t) = V(t) + \frac{a-b}{2} \int_{-\infty}^t V(\tau) e^{-\frac{a+b}{2}(t-\tau)} \left\{ I_1\left[\frac{a-b}{2}(t-\tau)\right] - \right. \\ \left. - I_0\left[\frac{a-b}{2}(t-\tau)\right] \right\} d\tau; \end{aligned}$$

in altri termini, la funzione generatrice di $\sqrt{\frac{\Delta+b}{\Delta+a}}$ è data da

$$Fu(t) + \frac{a-b}{2} \left[I_1\left(\frac{a-b}{2}t\right) - I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right) \right] e^{-\frac{a+b}{2}t}.$$

(1) Supposto, per es., $a = 1$, $b = -1$, si trova $H(t) = I_0(t)$. Cfr., a questo proposito, G. GIORGI, *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*, «Rend. del Circ. Mat. di Palermo», t. LII, 1928, pp. 265-312.

Invece, per $a = i$, $b = -i$, cioè $f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + 1}}$, risulterebbe $H(t) = J_0(t)$.

Matematica. — *Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico.* Nota ¹ di G. ALIPRANDI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una Nota recente ², essendo V_2 una varietà generica nello spazio hilbertiano, di equazione $f = f(l, u_1, u_2)$, indicando con X, Y, Z , i parametri normali di una terna ortogonale *qualunque* nel σ_2 e perpendicolare a V_2 , ho trovato che l'equazione del cono geodetico riferita a questa terna, è

$$(1) \quad x^2[X, X] + y^2[Y, Y] + z^2[Z, Z] + 2xy[X, Y] + 2xz[X, Z] + 2yz[Y, Z] = 0$$

dove

$$(2) \quad \begin{aligned} [X, Y] &= 2X^{11}Y^{22} - X^{12}Y^{12} + 2X^{22}Y^{11} \\ [X, X] &= 4X^{11}X^{22} - (X^{12})^2, \end{aligned}$$

X^{rs} indicando il reciproco di x_{rs} nel determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{22} \\ y_{11} & y_{12} & y_{22} \\ z_{11} & z_{12} & z_{22} \end{vmatrix}, \text{ ecc.}$$

Per trovare una terna autopolare, basterà risolvere l'equazione secolare corrispondente alla (1):

$$(3) \quad \begin{vmatrix} [X, X] - \lambda & [X, Y] & [X, Z] \\ [X, Y] & [Y, Y] - \lambda & [Y, Z] \\ [X, Z] & [Y, Z] & [Z, Z] - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

la quale, cambiata di segno, è del tipo:

$$(4) \quad \lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0.$$

È importante esprimere i coefficienti solo per gli elementi originari e non per quelli che sono legati alla terna di riferimento.

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.

(2) G. ALIPRANDI. *Sopra le terni principali (secondo il Vitali) di una superficie generica nello spazio hilbertiano.* «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. VIII, serie 6^a, 2° sem., fasc. 7-8, Roma 1928, p. 273.

2. Per questo, indicando al solito con f_{rs} le derivate seconde covarianti di f e ponendo col Vitali⁽¹⁾

$$A_{rs, pq} = \int_G f_{rs} f_{pq} dt$$

e tenendo conto della relazione⁽²⁾

$$f_{rs} = x_{rs}X + y_{rs}Y + z_{rs}Z$$

dovè

$$x_{rs} = \int_G f_{rs} X dt, \text{ ecc.,}$$

si ha subito

$$(5) \quad A_{rs, pq} = x_{rs}x_{pq} + y_{rs}y_{pq} + z_{rs}z_{pq}.$$

Per la regola di moltiplicazione dei determinanti, da (2), tenendo presenti le (5), si ha

$$(6) \quad D^2 = \begin{vmatrix} A_{11, 11} & A_{11, 12} & A_{11, 22} \\ A_{21, 11} & A_{21, 12} & A_{21, 22} \\ A_{22, 11} & A_{22, 12} & A_{22, 22} \end{vmatrix}.$$

3. Passiamo ora a calcolare i coefficienti della (4).

È:

$$P = [X, X] + [Y, Y] + [Z, Z].$$

Per le (2)

$$P = 4 \{ X^{11} X^{22} + Y^{11} Y^{22} + Z^{11} Z^{22} \} - \{ (X^{12})^2 + (Y^{12})^2 + (Z^{12})^2 \}.$$

La prima $\{ \}$ vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2} \left\{ \begin{vmatrix} y_{12} & y_{22} \\ z_{12} & z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ z_{11} & z_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{12} & x_{22} \\ z_{12} & z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ z_{11} & z_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{12} & x_{22} \\ y_{12} & y_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ y_{11} & y_{12} \end{vmatrix} \right\} = \\ = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} x_{11}x_{12} + y_{11}y_{12} + z_{11}z_{12} & x_{11}x_{22} + y_{11}y_{22} + z_{11}z_{22} \\ x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2 & x_{12}x_{22} + y_{12}y_{22} + z_{12}z_{22} \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} A_{11, 12} & A_{11, 22} \\ A_{12, 12} & A_{12, 22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*. Memoria. « Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti », Venezia 1927-28, t. LXXXVII, parte II, pp. 349-428, p. 422.

(2) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*. Nota. « Annales de la Société polonaise de mathématique », tome VII, année 1928, p. 43-67, Krakow.

La seconda $\{ \}$ vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2} \left\{ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{22} \\ \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{22} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{22} \\ y_{11} & y_{22} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{22} \\ \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{22} \end{vmatrix}^2 \right\} &= \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & \tilde{x}_{11} \\ x_{22} & y_{22} & \tilde{x}_{22} \end{vmatrix}^2 = \\ &= \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} x_{11}^2 + y_{11}^2 + \tilde{x}_{11}^2 & x_{11}x_{22} + y_{11}y_{22} + \tilde{x}_{11}\tilde{x}_{22} \\ x_{11}x_{22} + y_{11}y_{22} + \tilde{x}_{11}\tilde{x}_{22} & x_{22}^2 + y_{22}^2 + \tilde{x}_{22}^2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{D^2} \cdot \begin{vmatrix} A_{11,11} & A_{11,22} \\ A_{11,22} & A_{22,22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

e quindi

$$P = \frac{4}{D^2} \cdot \begin{vmatrix} A_{11,12} & A_{11,22} \\ A_{12,12} & A_{12,22} \end{vmatrix} + \frac{1}{D^2} \cdot \begin{vmatrix} A_{11,11} & A_{11,22} \\ A_{11,22} & A_{22,22} \end{vmatrix}.$$

È inoltre

$$Q = \begin{vmatrix} [X, X] & [X, Y] \\ [Y, X] & [Y, Y] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [X, X] & [X, Z] \\ [Z, X] & [Z, Z] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [Y, Y] & [Y, Z] \\ [Z, Y] & [Z, Z] \end{vmatrix}.$$

Per il calcolo del primo determinante, si tengano presenti le (2) e le regole di moltiplicazione delle matrici, si ha

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} [X, X] & [X, Y] \\ [Y, X] & [Y, Y] \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2X^{11} & X^{12} & 2X^{22} \\ 2Y^{11} & Y^{12} & 2Y^{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^{22} & -X^{12} & X^{11} \\ Y^{22} & -Y^{12} & Y^{11} \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} X^{11} & X^{12} \\ Y^{11} & Y^{12} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^{22} & X^{12} \\ Y^{22} & Y^{12} \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} X^{11} & X^{22} \\ Y^{11} & Y^{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^{22} & X^{11} \\ Y^{22} & Y^{11} \end{vmatrix} - \\ &\quad - 2 \begin{vmatrix} X^{12} & X^{22} \\ Y^{12} & Y^{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^{12} & X^{11} \\ Y^{12} & Y^{11} \end{vmatrix} = \\ &= 2 \frac{\tilde{x}_{22}\tilde{x}_{11}}{D^2} - 4 \frac{\tilde{x}_{12}^2}{D^2} + 2 \frac{\tilde{x}_{11}\tilde{x}_{22}^{(1)}}{D^2} = 4 \frac{(\tilde{x}_{11}\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_{12}^2)}{D^2} \end{aligned}$$

e analoghe.

E quindi

$$Q = \frac{4}{D^2} \{ x_{11}x_{22} + y_{11}y_{22} + \tilde{x}_{11}\tilde{x}_{22} - (x_{12}^2 + y_{12}^2 + \tilde{x}_{12}^2) \} = \frac{4}{D^2} \{ A_{11,22} - A_{12,12} \}$$

È infine

$$R = \begin{vmatrix} [X, X] & [X, Y] & [X, Z] \\ [Y, X] & [Y, Y] & [Y, Z] \\ [Z, X] & [Z, Y] & [Z, Z] \end{vmatrix}.$$

(1) G. ALIPRANDI, loc. cit., p. 274, form. (7).

Tenendo presenti le (2), la regola di moltiplicazione dei determinanti, ricordando che $D \cdot \bar{D} = 1$, essendo \bar{D} il determinante reciproco di D , si ha

$$R = \begin{vmatrix} 2X^{11} & X^{12} & 2X^{22} \\ 2Y^{11} & Y^{12} & 2Y^{22} \\ 2Z^{11} & Z^{12} & 2Z^{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^{22} & -X^{12} & X^{11} \\ Y^{22} & -Y^{12} & Y^{11} \\ Z^{22} & -Z^{12} & Z^{11} \end{vmatrix} = 4\bar{D} \cdot (-\bar{D}) = \frac{-4}{D^2}.$$

4. Per i risultati precedenti, la (4), moltiplicata per D^2 , diventa

$$D^2\lambda^3 + \left\{ 4 \begin{vmatrix} A_{11,12} & A_{11,22} \\ A_{12,12} & A_{12,22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11,11} & A_{11,22} \\ A_{11,22} & A_{22,22} \end{vmatrix} \right\} \lambda^2 + \\ + 4 \{ A_{11,12} - A_{12,12} \} \lambda - 4 = 0,$$

che si può scrivere nel modo seguente

$$\begin{vmatrix} \lambda A_{11,11} & \lambda A_{11,12} & \lambda A_{11,22} - 2 \\ \lambda A_{21,11} & \lambda A_{21,12} + 1 & \lambda A_{21,22} \\ \lambda A_{22,11} - 2 & \lambda A_{22,12} & \lambda A_{22,22} \end{vmatrix} = 0.$$

Quando si ponga $\lambda = \frac{2}{\rho}$ e si moltiplica ogni riga per ρa diventa

$$\begin{vmatrix} A_{11,11} & A_{11,12} & A_{11,22} - \rho a \\ A_{21,11} & A_{21,12} + \frac{\rho a}{2} & A_{21,22} \\ A_{22,11} - \rho a & A_{22,12} & A_{22,22} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è l'equazione alla quale il Vitali ha ricondotto il problema ⁽¹⁾.

Teoria dei Numeri. — *Sui corpi algebrici di Galois.* Nota ⁽²⁾ di A. M. BEDARIDA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Le considerazioni scritte in questa breve Nota riguardano gli ideali invarianti e gli ideali moltiplicatori di un corpo di Galois (o normale), cioè di un corpo coincidente con tutti i suoi corpi coniugati.

2. È ben nota la proposizione fondamentale che, in ogni corpo algebrico, per un ideale secondario A esistono sempre (infiniti) interi razionali positivi δ , tali che l'ideale A^δ sia un ideale principale. Tra questi vi è sempre il numero delle classi degli ideali del corpo ⁽³⁾. Può esser utile, in determi-

(1) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati*, ecc., pp. 43-67.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1928.

(3) Cfr. BIANCHI, *Lezioni sulla Teoria dei Numeri algebrici* (Zanichelli, Bologna), p. 368.

nate ricerche, conoscere dei valori di δ . Riferendoci ad un corpo di Galois $K(\theta)$, di grado n , a cui si può ricondurre lo studio di un corpo algebrico generale, consideriamo i suoi ideali invarianti, cioè quelli coincidenti con tutti i loro coniugati.

Hilbert⁽¹⁾, per questa specie di ideali, in una proposizione dimostrata direttamente, senza far uso di proprietà della teoria generale dei numeri algebrici, ha osservato che $n!$ è sempre un valore per δ . Ora, è notevole rilevare che, se invece si usufruisce di tali proprietà generali col fare appunto uso della proposizione, pure di Hilbert⁽²⁾, che in ogni corpo algebrico, un ideale moltiplicato per tutti i suoi ideali coniugati (che in generale saranno fuori del corpo considerato) offre un ideale principale, generato dalla norma dell'ideale stesso, per un ideale invariante di $K(\theta)$, già n stesso è, evidentemente, uno dei numeri di δ . Si ha dunque il teorema:

In un corpo algebrico di Galois $K(\theta)$, di grado n , un ideale invariante, elevato alla potenza n , è un ideale principale, generato dalla norma dell'ideale stesso.

3. Tra i valori del numero δ , relativo ad un ideale, il più piccolo, è quello chiamato il periodo dell'ideale. Ora note proprietà della teoria di composizione degli ideali, ed il teorema ora osservato, ci permettono di asserire la notevole proposizione:

In un corpo algebrico di Galois, gli ideali invarianti, hanno periodi che sono divisori del grado del corpo.

Segue, in particolare per i corpi quadratici, che gli ideali invarianti secondari sono a periodo 2, cioè sono i ben noti ideali ancipiti (od ambigui).

4. La prima proposizione di Hilbert ricordata al n. 2, ha permesso di dimostrare anche direttamente, per i corpi di Galois, il fatto fondamentale dell'esistenza, per un ideale, degli ideali moltiplicatori (appartenenti allo stesso corpo dell'ideale), cioè di quei ideali che moltiplicati per l'ideale considerato, danno ideali principali.

Si può osservare ancora che la seconda proposizione di Hilbert del n. 2, più semplicemente, ci assicura, per i corpi di Galois, l'esistenza di ideali moltiplicatori: invero basta, dato un ideale, considerare l'ideale prodotto dei suoi ideali coniugati. Questo ideale moltiplicatore, facilmente costruibile, può essere utile in determinate ricerche.

(1) HILBERT, *Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », Bd. 4 (1897).

(2) HILBERT, op. cit.

Analisi infinitesimale. — *A proposito di un'equazione differenziale.* Nota ⁽¹⁾ di G. SCORZA DRAGONI, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

Considerazioni d'ordine fisico, ispirate ai nuovi metodi statistici da lui ideati, hanno condotto il prof. Fermi ad arguire che l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'' = y^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

deve possedere un integrale soddisfacente alle condizioni ai limiti

$$(2) \quad y(0) = 1 \quad , \quad y(+\infty) = 0.$$

Per consiglio del prof. Picone, io ho cercato di dimostrare rigorosamente, coi metodi dell'Analisi, l'esistenza effettiva e l'unicità di tale integrale; e oggetto di questa breve Nota è appunto l'esposizione delle linee generali del procedimento che mi ha condotto alla meta.

I dettagli della dimostrazione, non difficile a ricostruire dopo le indicazioni che seguono, ma richiedenti per una esposizione chiara e precisa più spazio di quanto le norme accademiche consentano in questi « Rendiconti », saranno esposti diffusamente in una Memoria di prossima pubblicazione; nella quale del resto il metodo qui delineato verrà applicato ad un'equazione differenziale assai più generale.

La difficoltà maggiore che ho incontrato nel trattare il problema era data dal fatto che i punti dell'asse y sono singolari per la funzione a secondo membro della (1), di modo che gli ordinari teoremi sulle equazioni differenziali non dicevano nulla circa l'esistenza di integrali della (1) uscenti dai punti della retta $x = 0$.

Per ovviare a tale difficoltà ho pensato di fissare la mia attenzione sugli integrali uscenti da un punto $(x, 1)$ dell'insieme piano ($x > 0, y > 0$); di mostrare che fra di essi ne esiste certo uno (naturalmente unico) annullantesi all'infinito; e che inoltre quest'ultimo integrale tende ad un integrale della (1) soddisfacente alle condizioni (2) quando si faccia tendere il punto $(x, 1)$ al punto $(0, 1)$.

Che fra gli integrali della (1) passanti per il punto $(\bar{x}, 1)$ ne esistano infiniti dotati di zeri si mostra abbastanza facilmente; ma si potrebbe du-

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.

bitare che i punti in cui le curve corrispondenti incontrano l'asse x non costituiscono un insieme illimitato.

Questo dubbio si toglie facendo ricorso ad un lemma da me stabilito (di importanza fondamentale per la presente ricerca) il quale in sostanza afferma che ogni infinità numerabile di curve integrali della (1), soddisfacente a certe condizioni non molto restrittive, tende verso una linea che è ancora una curva integrale della nostra equazione. Di guisa che per dimostrare l'esistenza di un integrale della (1) soddisfacente alle condizioni ai limiti

$$y(\bar{x}) = 1 \quad \text{ed} \quad y(\infty) = 0$$

mi è bastato considerare la successione degli integrali uscenti dal punto \bar{x} , 1 ed annullantisi rispettivamente per $x = \bar{a} + 1, \bar{a} + 2, \bar{a} + 3, \dots$

Giunti a questo punto non resta che prendere di mira la successione di integrali della (1), y_1, y_2, \dots , verificanti le condizioni

$$y_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad , \quad y_n(\infty) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e mostrare che questi soddisfanno ancora alle ipotesi nelle quali può essere applicato il teorema cui ho alluso.

Idromeccanica. — *Il teorema del Bernouilli per i liquidi omogenei viscosi.* Nota ⁽¹⁾ di M. LELLI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

I. In un mio precedente lavoro ⁽²⁾ ho accennato al significato meccanico spettante alla relazione

$$(1) \quad \int_S \text{grad } \beta \times \mathbf{v} dS + \int_S \left\{ K\beta \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\} dS + \int_{\sigma} \beta \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma = 0,$$

dove β e \mathbf{v} sono un'omografia e un vettore, funzioni monodrome e derivabili dei punti dello spazio S avente come contorno la superficie σ . Precisamente ho rilevato che questa relazione, la quale può chiamarsi *il teorema di Green generalizzato*, rappresenta, a seconda della corrispondenza esistente fra β e \mathbf{v} , in un caso *il teorema dei lavori virtuali*, in un altro *il principio della conservazione dell'energia*.

Sotto quest'ultimo aspetto intendo in questa Nota di valermi della (1), quando siano β e \mathbf{v} l'una l'omografia delle pressioni, l'altro la velocità di

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1928.

(2) *Il principio di reciprocità nella Fisica*, « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo III (1925-1926), p. 168.

un fluido viscoso, per dedurre una espressione assai generale del teorema del Bernouilli.

2. Si consideri, istante, un tronco di tubo di flusso, infinitamente sottile, del vettore velocità, compreso fra due sezioni normali 0, 1. Il moto del fluido sia permanente, ed abbia il senso $0 \rightarrow 1$.

In virtù dell'equazione del moto

$$(2) \quad \text{grad } \beta = \rho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right),$$

dove ρ è la densità ed \mathbf{F} la forza di massa (che supporremo dipendente dal potenziale φ), la (1), applicata allo spazio limitato dalle sezioni 0 e 1, fornisce

$$(3) \quad \int \rho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \times \mathbf{v} v dt d\Omega + \int_0^1 I_1 \left(K \beta \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) v dt d\Omega - \int_0^1 \beta \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma = 0,$$

essendosi fatta la suddivisione dello spazio S in tronchi del tubo di flusso compresi fra sezioni infinitamente vicine, cioè essendosi posto

$$dS = v dt d\Omega,$$

dove $d\Omega$ è l'area, variabile lungo il tubo, della sua sezione retta.

Quando il fluido in moto sia un liquido omogeneo, sarà ρ costante lungo il tubo e potrà porsi $v d\Omega = q$, portata del tubo, in un determinato istante, espressione che avrebbe senso anche se il moto fosse vario, in virtù della incompressibilità dei liquidi. Pertanto il primo termine della (3) diviene:

$$\rho q \int \text{grad } \varphi \times d\mathbf{s} - \rho q \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} dt,$$

dove si è posto $\mathbf{v} dt = d\mathbf{s}$ (elemento di una qualsiasi delle linee di flusso contenute nel tubo). Considerando poi che è

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} dt = \frac{1}{2} d(v^2),$$

per essere il moto permanente, potrà scriversi infine

$$(4) \quad \int \rho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \times \mathbf{v} v dt d\Omega = \rho q \left(\varphi_1 - \varphi_0 - \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} \right).$$

In base alle premesse ipotesi il secondo termine della (3) assume per ovvie ragioni la forma

$$q \int_0^1 I_1 \left(K \beta \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \frac{ds}{v};$$

cioè, separando in β la parte statica p (omotetia) della pressione da quella non statica $\beta - p$ e notando che

$$\begin{aligned} I_1 \left\{ K p \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\} &= p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{per la continuità}); \\ (5) \quad q \int_0^1 I_1 \left\{ K (\beta - p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\} \frac{ds}{v} & \end{aligned}$$

Consideriamo infine il terzo termine della (3). Chiamando l il contorno della sezione retta generica $d\Omega$ del tubo, si ha:

$$\int_{\sigma} \beta \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma = \int_0^1 v dt \mathbf{v} \times \int_l \beta \mathbf{n} dl;$$

cioè, avendosi nell'elemento piano $d\Omega$

$$\begin{aligned} \int_l \beta \mathbf{n} dl &= -d\Omega \operatorname{grad} \beta; \\ \int_{\sigma} \beta \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma &= -q \int_0^1 \operatorname{grad} \beta \times ds; \end{aligned}$$

o, infine, separando anche qui la parte statica p della pressione da quella non statica:

$$(6) \quad \int_{\sigma} \beta \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma = q(p_0 - p_1) - q \int_0^1 \operatorname{grad} (\beta - p) \times ds.$$

E però il principio della conservazione dell'energia espresso dalla (3), assume la forma:

$$\begin{aligned} (7) \quad \rho q \left\{ \varphi_1 - \varphi_0 - \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} \right\} + q \int_0^1 I_1 \left\{ K (\beta - p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\} \frac{ds}{v} + q(p_0 - p_1) - \\ - q \int_0^1 \operatorname{grad} (\beta - p) \times ds = 0. \end{aligned}$$

Passando al limite per $d\Omega$ che tende a zero, il tubo di flusso si riduce a una delle sue linee di flusso, cioè a una traiettoria. D'altra parte, posto $\rho g = \omega$ (peso specifico del liquido), la precedente può scriversi

$$\begin{aligned} (8) \quad \frac{p_0}{\omega} + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{\varphi_0}{g} = \frac{p_1}{\omega} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{\varphi_1}{g} - \frac{1}{\omega} \int_0^1 I_1 \left\{ K (\beta - p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\} \frac{ds}{v} + \\ + \frac{1}{\omega} \int_0^1 \operatorname{grad} (\beta - p) \times ds, \end{aligned}$$

espressione del teorema del Bernouilli relativo al moto permanente di un liquido omogeneo viscoso soggetto all'azione di forze conservative.

Quando il liquido sia perfetto (cioè sia $\beta = p$), soggetto alla sola gravità, cioè si abbia $\varphi = -g\zeta$ (ζ altezza di un elemento sopra un piano orizzontale di riferimento), si ricade nel classico enunciato del Bernouilli:

$$\zeta_0 + \frac{p_0}{\omega} + \frac{v_0^2}{2g} = \zeta_1 + \frac{p_1}{\omega} + \frac{v_1^2}{2g} = \text{cost.}$$

lungo una traiettoria.

3. Alla (8) spetta una interpretazione fisica immediata.

Intendendo di nuovo che la traiettoria $0-1$ faccia parte del tubo infinitamente sottile prima considerato e moltiplicando la (8) per ωq (peso della portata del tubo), cioè scrivendo la (7) nell'ordine indicato dalla (8):

$$(8') \quad \omega q \left\{ \frac{p_0}{\omega} + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{\varphi_0}{g} \right\} = \omega q \left\{ \frac{p_1}{\omega} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{\varphi_1}{g} \right\} - \\ - q \int_0^1 I_1 \left\{ K(\beta - p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\} ds + q \int_0^1 \text{grad}(\beta - p) \times d\mathbf{s},$$

i tre termini del primo membro e quelli analoghi del secondo vengono a rappresentare rispettivamente l'energia potenziale dovuta a pressione, l'energia cinetica e l'energia potenziale dipendente dal campo conservativo delle forze (che è quanto dire, in complesso, la totale energia meccanica) possedute alle due estremità del tubo dal peso della sua portata.

Quanto al termine $-q \int_0^1 I_1 \left\{ K(\beta - p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\} ds$, scritto nella sua forma

originale $-q \int_S I_1 \left\{ K(\beta - p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\} dS$, essendo $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$ l'omografia delle velocità

di deformazione, e però $-I_1 \left\{ K(\beta - p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right\}$ il lavoro di deformazione per unità di volume e nell'unità di tempo, risulta evidente che ad esso spetta il significato di lavoro trasformato in calore svolto nell'unità di tempo entro il tubo di flusso $0-1$.

Analogo significato ha naturalmente il termine $q \int_0^1 \text{grad}(\beta - p) \times d\mathbf{s}$,

quando sia scritto anch'esso nella forma originale $q \int_S (\beta - p) \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma$.

Esso rappresenta cioè il calore equivalente al lavoro compiuto nell'unità di tempo dalla parte non statica delle pressioni agenti in superficie.

La (8') può dunque così interpretarsi:

L'energia meccanica posseduta in una sezione dal peso della portata di un sottile tubo di flusso è eguale all'energia meccanica che essa portata possiede in una sezione più a valle, aumentata del lavoro, trasformato in calore, compiuto, nell'unità di tempo all'interno e sulla superficie del tronco di tubo compreso fra le due sezioni, dalla parte non statica delle pressioni.

Spetta infine alla (8'), e quindi anche alla (8), una interpretazione più intuitiva, che subito discende dalla (8') moltiplicata per un elemento di tempo:

Nel passare dal punto 0 al punto 1 di una traiettoria, l'energia meccanica posseduta da un elemento di volume di un liquido omogeneo viscoso, in moto permanente, soggetto all'azione di forze conservative, diminuisce ⁽¹⁾ dell'equivalente meccanico del calore svolto dall'elemento durante il percorso 0 — 1, in seguito all'azione, nel suo interno e sul suo contorno, della parte non statica della pressione.

Geometria. — *Una nuova trasformazione delle superficie isoterme.* Nota ⁽²⁾ di R. CALAPSO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

In una precedente Nota ⁽³⁾ ho stabilito una nuova trasformazione delle superficie isoterme dello spazio ordinario S_3 , utilizzando la geometria dell'ipercono isotropo dello spazio euclideo S_5 .

Qui daremo l'espressione analitica della detta trasformazione, in coordinate cartesiane, per dimostrare anzitutto che la trasformazione stabilita sussiste per una superficie isoterma *qualunque* e comprende come caso particolare quella di Darboux; precisamente la nuova trasformazione contiene esplicitamente due costanti arbitrarie m, c , da indicarsi perciò con $D_{m,c}$ e la D_m di Darboux si presenta come una $D_{m,0}$.

§ I. — FORMOLE FONDAMENTALI PER LE SUPERFICIE ISOTERME E PASSAGGIO IN COORDINATE PENTASFERICHE.

1. Siano

$$x(uv), \quad y(uv), \quad z(uv)$$

le coordinate di un punto che descrive una superficie isoterma, riferita alle linee di curvatura, e siano

(1) Durante il moto, se questo è permanente, e quando le pareri siano fisse, l'energia meccanica effettivamente diminuisce, cioè il secondo e il terzo termine del secondo membro della (8') hanno una somma positiva, la qual cosa risulterebbe ancora muovendo dall'equazione del moto nella forma datale dal Navier.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1928.

(3) R. CALAPSO, *Una nuova trasformazione delle superficie isoterme*, (Questi « Rendiconti », 1928, fasc. 7-8, p. 287.

X_1, Y_1, Z_1 i coseni direttori della tangente alla linea v
 X_2, Y_2, Z_2 i coseni direttori della tangente alla linea u
 X_3, Y_3, Z_3 i coseni direttori della normale.

Si sa che le quantità introdotte soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali della forma⁽¹⁾:

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = e^{\omega} X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = e^{\omega} X_2,$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -a X_3 - \frac{\partial \omega}{\partial v} X_2, & \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} X_2 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial v} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -b X_3 - \frac{\partial \omega}{\partial u} X_1 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = a X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial v} = b X_1, \end{cases}$$

per la cui integrabilità sono necessarie e sufficienti le equazioni di Codazzi e di Gauss, cioè

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v} b & \frac{\partial b}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial u} a \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + ab = 0. \end{cases}$$

2. Operiamo una trasformazione di Ribancour; seguendo le notazioni usate da mio Padre⁽²⁾, le funzioni trasformatrici

$$\lambda, \mu, w, \psi, \sigma, \Phi, \Omega$$

sono caratterizzate dal seguente sistema di equazioni differenziali

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -aw - \frac{\partial \omega}{\partial v} \mu + m \Phi, & \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial v} \lambda, & \frac{\partial \mu}{\partial v} = -bw - \frac{\partial \omega}{\partial u} \lambda + m \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial u} = a \lambda, & \frac{\partial w}{\partial v} = b \mu, \end{cases}$$

(1) Cfr. P. CALAPSO, *Sulle trasformazioni delle superficie isoterme*. (« Annali di Matematica », t. XXIV, serie III, pp. 11 e sgg.). Confronta anche: P. CALAPSO, *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme*. (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XVII, p. 275).

(2) P. CALAPSO, *Sulle trasformazioni dei sistemi di linee coniugate ed ortogonali dello spazio S_n* . (« Annali di Matematica », t. XXX, serie III, pp. 119 e sgg.).

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial u} = e^{\omega} \lambda \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\lambda}{\psi} (\Phi - e^{\omega} \sigma) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial v} = e^{\omega} \mu \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\mu}{\psi} (\Omega - e^{\omega} \sigma) \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v} \Omega \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \Phi$$

e dalla relazione finita

$$(7) \quad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2 m \psi \sigma ;$$

in cui m è una costante arbitraria diversa da zero; le coordinate del punto che descrive la superficie trasformata (in generale non isoterma) sono date dalle formole

$$(8) \quad x' = x - \frac{1}{m\sigma} (\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) .$$

3. Per la data superficie isoterma facciamo la rappresentazione in coordinate pentasferiche; risulta dalle ricerche di mio Padre (vedi Memoria citata (3), § 2, n. 7) che le quantità x_{kv} , ξ_v , η_v da me introdotte nella Nota precedente hanno le espressioni:

$$x_{11} = \frac{w}{\psi} x - X_3 \quad , \quad x_{12} = \frac{w}{\psi} y - Y_3 \quad , \quad x_{13} = \frac{w}{\psi} z - Z_3 \quad ,$$

$$x_{14} + i x_{15} = - \frac{w}{\psi} ;$$

$$\psi(x_{21} + i x_{31}) = x \quad , \quad \psi(x_{22} + i x_{32}) = y \quad , \quad \psi(x_{23} + i x_{33}) = z \quad ,$$

$$\psi[(x_{24} + i x_{34}) + i(x_{25} + i x_{35})] = -1 ;$$

$$- \frac{1}{2 m \sigma} (x_{21} - i x_{31}) = x' \quad , \quad - \frac{1}{2 m \sigma} (x_{22} - i x_{32}) = y' \quad ,$$

$$- \frac{1}{2 m \sigma} (x_{23} - i x_{33}) = z' \quad , \quad - \frac{1}{2 m \sigma} [(x_{24} - i x_{34}) + i(x_{25} - i x_{35})] = -1 ;$$

$$\xi_1 = \frac{\lambda}{\psi} x - X_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad \xi_4 + i \xi_5 = - \frac{\lambda}{\psi} \quad ,$$

$$\eta_1 = \frac{\mu}{\psi} x - X_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad \eta_4 + i \eta_5 = - \frac{\mu}{\psi} \quad .$$

Esprimendo che sono soddisfatte le (2) della precedente Nota (e tenendo presenti le equazioni a cui soddisfano le funzioni trasformatrici) troviamo, senza difficoltà, per le quantità a_k, b_k le espressioni

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a - e^{\omega} \frac{w}{\psi}, \quad b_1 = b - e^{\omega} \frac{w}{\psi} \\ a_2 + i a_3 = - \frac{e^{\omega}}{\psi}, \quad b_2 + i b_3 = - \frac{e^{\omega}}{\psi} \\ a_2 - i a_3 = - 2m(\Phi - e^{\omega} \sigma), \quad b_2 - i b_3 = - 2m(\Omega - e^{\omega} \sigma) \end{array} \right.$$

e le coordinate pentasferiche del punto che descrive la superficie isoterma data sono

$$(10) \quad X_r = x_{2r} + i x_{3r}.$$

4. Per effettuare la trasformazione osservata nella Nota precedente interpretiamo le X_r come coordinate cartesiane di punto in uno spazio S_5 , in guisa che le (10) danno una rete ortogonale isoterma dell'ipercono isotropo; indi esprimiamo che la detta rete ammette una trasformazione di Christoffel. Per le (12) della mia Nota precedente e per le (9) del presente lavoro, potremo porre:

$$\begin{aligned} c_1 a - \frac{e^{\omega}}{\psi} \left(c_1 w + \frac{c_2 + i c_3}{2} \right) - m(\Phi - e^{\omega} \sigma) (c_2 + i c_3) &= c e^{-\omega} \psi \\ c_1 b - \frac{e^{\omega}}{\psi} \left(c_1 w + \frac{c_2 - i c_3}{2} \right) - m(\Omega - e^{\omega} \sigma) (c_2 + i c_3) &= - c e^{-\omega} \psi; \end{aligned}$$

d'altra parte (a meno di omotetia) si potrà ritenere:

$$c = - m(c_2 + i c_3)$$

sicchè le precedenti danno:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = e^{\omega} \sigma + e^{-\omega} \psi - c_1 a + \frac{e^{\omega}}{\psi} \left(c_1 w + \frac{c_2 - i c_3}{2} \right) \\ \Omega = e^{\omega} \sigma - e^{-\omega} \psi - c_1 b + \frac{e^{\omega}}{\psi} \left(c_1 w + \frac{c_2 + i c_3}{2} \right). \end{array} \right.$$

Si verifica con facile calcolo che, tenendo conto delle (4) e (5) [ove per Φ ed Ω si pongono le (11)], le espressioni (11) soddisfano le (6) senza ulteriori restrizioni per la superficie data; QUESTA OSSERVAZIONE È ESSENZIALE, in quanto accerta che la trasformazione di Ribancour, sopra definita, si applica ad una superficie isoterma QUALUNQUE.

§ 2. — LA NUOVA TRASFORMAZIONE DELLE SUPERFICIE ISOTERME
IN COORDINATE CARTESIANE.

5. Dopo ciò siamo in grado di dare le formole relative alla superficie trasformata in coordinate cartesiane.

Occorre anzitutto osservare che, partendo da una superficie isoterma I, si deducono col metodo esposto due nuove superficie, la trasformata S di Ribancour [in generale non isoterma] e la trasformata I' isoterma⁽¹⁾.

Dette \bar{X}_r le coordinate pentasferiche della trasformata di Ribancour, si avrà

$$\bar{X}_r = x_{2r} - i x_{3r};$$

in particolare:

$$\bar{X}_4 + i \bar{X}_5 = 2 m \sigma,$$

e per l'elemento lineare della superficie S si avrà

$$(12) \quad d\bar{s}^2 = \frac{\sum dX_r^2}{(\bar{X}_4 + i \bar{X}_5)^2} = \frac{(a_2 - i a_3)^2 du^2 + (b_2 - i b_3) dv^2}{4 m^2 \sigma^2} = \\ = \left(\frac{\Phi}{\sigma} - e^\omega \right)^2 du^2 + \left(\frac{\Omega}{\sigma} + e^\omega \right)^2 dv^2,$$

in cui per Φ e Ω si debbono porre le espressioni (11).

Se invece ci riferiamo alla trasformata isoterma e indichiamo con X'_r le coordinate del punto che la genera, si avrà:

$$X'_r = c_1 x_{1r} c_2 x_{2r} + c_3 x_{3r} \quad (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0);$$

in particolare

$$X'_4 + i X'_5 = -c_1 \frac{w}{\psi} + (c_2 + i c_3) m \sigma - \frac{c_2 - i c_3}{2 \psi},$$

e per l'elemento lineare della superficie I' si avrà:

$$(13) \quad ds'^2 = \frac{\sum dX_r'^2}{(X'_4 + i X'_5)^2} = e^{2\omega'} (du^2 + dv^2)$$

in cui

$$(14) \quad e^{\omega'} = \frac{c e^{-\omega} \psi}{-c_1 \frac{w}{\psi} + (c_2 - i c_3) m \sigma - \frac{c_2 - i c_3}{2 \psi}}$$

(1) La superficie I' è descritta dal punto che ha le coordinate pentasferiche

$$c_1 x_{1r} + c_2 x_{2r} + c_3 x_{3r} \quad (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0)$$

(Vedasi la mia citata Nota precedente, questi « Rendiconti »).

La trasformazione qui stabilita si riassume nel teorema seguente:

Se I è una superficie isoterma, il sistema differenziale (4) (5) (7) [in cui per Φ ed Ω si pongano le (11)] è illimitatamente integrabile; per ogni soluzione di questo sistema si ha una nuova superficie isoterma I' , di elemento lineare

$$ds'^2 = e^{2\omega'}(du^2 + dv^2)$$

essendo ω' definita dalla (14).

6. Facciamo da ultimo le seguenti osservazioni.

Le formole da cui si ricavano le funzioni trasformatrici contengono esplicitamente due costanti arbitrarie, m e c_1 , per il che la trasformazione (che si presenta in forma più generale di quella di Darboux) è da indicarsi con D_{m, c_1} .

La trasformazione di Darboux è caso particolare di questa, quando si prenda $c_1 = 0$; in tal caso le superficie S ed I' coincidono, epperò

$$D_m = D_{m, 0}.$$

È da notare che la trasformazione osservata ha anche interesse dal punto di vista reale; per esempio le formole (11) (14) hanno forma reale per $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = i$.

Geometria. — Osservazioni sulle quadriche di Darboux. Nota⁽¹⁾ di E. ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. In una Memoria presentata all'Accademia delle Scienze di Praga il 23 aprile 1926⁽²⁾, I. Klobouček ha dimostrato il teorema seguente: Sia O un punto generico di una superficie S non rigata riferita alle asintotiche u_1, u_2 ; per $i = 1, 2$, siano C_i ($i = 1, 2$) due curve tracciate su S . La C_i tocchi in O l'asintotica u_i ; il rapporto delle curvature in O di C_i e dell'asintotica u_i abbia, tanto per $i = 1$ quanto per $i = 2$, lo stesso valore k ; sia R_i la rigata delle tangenti asintotiche, lungo C_i , di quel sistema cui non appartengono le tangenti a u_i ; sia infine P_i il regolo osculatore in O della rigata R_i . Allora, P_1 e P_2 sono i due regoli complementari di una quadrica Q . Q appartiene al fascio F delle quadriche di Darboux e la posizione di Q in F dipende soltanto dal valore di k ⁽³⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1928.

(2) « Rozprawy II, třídy české akademie », vol. 35, n. 15.

(3) Il caso particolare $k = 0$ di questa proposizione è stato ritrovato da E. BOMPIANI (questi « Rendiconti », 10 ottobre 1927); poco dopo (questi « Rendiconti », 8 gennaio 1928), G. FUBINI ha ritrovato il teorema generale. Il Bompiani studia le curve, tracciate su S ,

2. Una quadrica Q del fascio F è determinata dal numero k , che è noto essere un parametro proiettivo nel fascio k ; dirò che k è l'indice della quadrica Q ; il teorema di Klobouček ne dà il significato geometrico.

In particolare, la quadrica d'indice 1 è la quadrica di Lie; per $k = \infty$ si ottiene il piano tangente contato due volte.

3. Al capitolo X della *Geometria proiettiva differenziale* di G. Fubini e mia, ho dato (§§ 85-88) una costruzione molto complicata delle quadriche di Monard. Al § 90 invece, ho indicato un'altra costruzione ben più semplice di queste quadriche; soltanto, nella seconda soluzione ho fatto uso di una quadrica, là indicata con M_0 , di cui ignoravo il significato geometrico.

Orbene, M_0 non è che la quadrica di Darboux d'indice $\frac{4}{9}$.

4. Siano ρ_1, ρ_2 i raggi proiettivi di curvatura di S ; sia K la curvatura della forma normale φ_2 di Fubini. Allora

$$(1) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = K - 1.$$

Questo teorema di Fubini è l'analogo proiettivo del *teorema egregium* di Gauss. Però, un significato geometrico soddisfacente di ρ_1 e ρ_2 mancava finora. Orbene, siano k_1, k_2 gli indici delle due quadriche di Darboux passanti per i fuochi della congruenza Γ generata dalle normali proiettive; allora

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{K - k_i}{2} \quad (i = 1, 2)$$

sicchè (1) si scrive

$$(2) \quad \frac{k_1 + k_2}{2} = K - 2.$$

Quindi $K - 2$ è l'indice di quella quadrica di Darboux, rispetto cui sono coniugati i due fuochi di Γ .

tangenti a un'asintotica; il Fubini studia anche le curve, tangenti tracciate su S , tangenti a un'asintotica, per cui il piano tangente ad S è piano osculatore stazionario, determinando in tale caso il valore corrispondente di k .

(1) *Geometria proiettiva differenziale*, § 25 A.

Geometria. — *Nuove definizioni del fascio canonico.* Nota ⁽¹⁾ di G. SANNIA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Nella geometria proiettivo-differenziale di una superficie sono state definite varie rette uscenti da un suo punto e non giacenti nel piano tangente π : la *direttrice* (Wilczynski), lo *spigolo* (Green), l'*asse* (Čeck), due *rette principali* e la *normale proiettiva* (Fubini). Si è poi riconosciuto che queste rette, definite per vie differenti, giacciono in uno stesso piano, che si è chiamato *canonico*; e si è chiamato *fascio canonico* il sistema delle *rette canoniche*, che sono quelle ora nominate e quelle che con tre di esse formano birapporti costanti, come la *tangente canonica* T , la cui coniugata indicherò con T' .

Orbene io ho osservato che al fascio canonico si può pervenire direttamente (e in più modi) con un processo *algebrico* atto a produrre sistematicamente rette canoniche, e che mette anche in evidenza dei legami tra due o più di esse. Si tratta di un processo di polarizzazione applicato a uno dei due coni-involuppo dai quali il Fubini ha dedotte (ma in modo diverso) le due rette principali ⁽²⁾: il *cono di Segre* Γ_6 (di 6^a classe) che tocca π secondo le *due tangenti asintotiche* A_r ($r = 1, 2$) e le *tre tangenti di Darboux* D_r ($r = 0, 1, 2$), le cui coniugate (*tangenti di Segre*) indicherò con S_r ; il cono Γ_4 (di 4^a classe) che con i fasci di piani aventi per assi le A_r costituisce l'unico cono degenerare del sistema lineare di coni individuato da tali fasci e da Γ_6 .

Di tutto darò conto in un prossimo lavoro. Qui intanto enuncio in anticipo alcune delle varie nuove definizioni che ho ottenuto delle rette canoniche elencate in principio, scegliendo le più semplici.

2. CONO Γ_6 — a). I primi polari ⁽³⁾ dei piani passanti per una delle A_r hanno un piano comune α_r passante per l'altra ⁽⁴⁾: la retta di intersezione di α_1 e α_2 è lo *spigolo*.

b) Gli stessi primi polari hanno altri tre piani comuni ⁽⁵⁾ formanti un triedro, rispetto al quale π ha una retta polare p_r : il piano delle p_1, p_2 sega π secondo T' , la cui coniugata armonica rispetto a p_1, p_2 è l'*asse*.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1928.

(2) FUBINI-ČECK, *Lezioni di geometria proiettiva differenziale*, tomo, I, § 24. (Zanichelli, Bologna, 1926).

(3) Dicendo « k^{mo} polare » si intenderà sempre « k^{mo} cono polare, rispetto a Γ_6 nel n. 2, e rispetto a Γ_4 nel n. 3 ».

(4) Oltre π , che si intenderà sempre escluso, a meno che sia esplicitamente nominato.

(5) Passanti per D_0, D_1, D_2 rispettivamente.

c) I terzi polari dei piani passanti per una delle A_r hanno un piano comune β_r passante per l'altra: la retta di intersezione di β_1 e β_2 è la *direttrice*.

d) Per ciascuna delle A_r passa un piano β'_r il cui secondo polare degenera in un fascio di piani avente per asse la rimanente e in un cono residuo ⁽¹⁾; e β'_r appartiene a tale cono con una generatrice di contatto g_r : i piani $g_1 A_2, g_2 A_1$ hanno per intersezione la *retta principale di Γ_6* ⁽²⁾.

e) Per ciascuna delle D_r passa un piano δ_r il cui primo polare degenera in un fascio di piani (avente per asse la S_r coniugata) e in un cono residuo: la retta polare di π rispetto al triedro formato da $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ è la *normale proiettiva* ⁽³⁾.

3. CONO Γ_4 — f). Per ciascuna A_r passa un piano α'_r che appartiene al suo primo polare: la intersezione dei piani α'_1, α'_2 è lo *spigolo* ⁽⁴⁾.

g) Per ciascuna A_r passa un piano β_r il cui primo polare degenera nel fascio di piani che ha per asse la rimanente (contato due volte) e in un fascio residuo F_r : la intersezione di β_1 e β_2 è la *direttrice* ⁽⁵⁾.

h) Gli assi di tali fasci residui F_1, F_2 determinano con A_2, A_1 rispettivamente due piani che hanno per intersezione la *retta principale di Γ_4* .

i) Il secondo polare del piano β_r passante per una delle A_r [e definito in g)] degenera nel fascio di piani avente per asse l'altra, e in fascio residuo il cui asse individua con A_r un piano η_r : i piani η_1 e η_2 hanno per intersezione la *normale proiettiva*.

k) I primi polari dei piani passanti per una delle A_r hanno tre piani comuni, i quali passano per una medesima retta a_r ⁽⁶⁾: il piano delle a_1, a_2 sega π secondo T' , la cui coniugata armonica rispetto a a_1, a_2 è l'asse.

4. La necessità di adoperare anche il cono Γ_4 è dovuta a ciò: che, adoperando il cono Γ_6 , si sono ottenute definizioni delle rette elencate nel n. 1, *tranne però della retta principale di Γ_4* ; e che, inoltre, in queste definizioni si fa uso delle sole tangenti asintotiche A_r , *tranne però in quella e) della normale proiettiva*, nella quale invece intervengono le D_r e le S_r . Adoperando anche Γ_4 , ogni eccezione vien tolta, in virtù di h) e di i).

(1) β'_1, β'_2 coincidono coi precedenti β_1, β_2 , ma invertiti; si ha così un secondo modo di definire la direttrice.

(2) Per dare un esempio di nuova retta canonica fornita dal processo, aggiungo che: il piano $g_1 g_2$ sega π secondo T' , la cui coniugata armonica rispetto a g_1, g_2 è una retta canonica; precisamente *quella che corrisponde a $\lambda = -7:24$* nell'espressione generale di loc. cit. (1), § 27.

(3) Ecco un secondo esempio di nuova retta canonica. Il cono residuo ha un piano ε_r passante per S_r ; i tre piani $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ passano per una retta che è la *retta canonica corrispondente a $\lambda = -3:16$* . Cfr. (2).

(4) α'_1, α'_2 coincidono con gli α_1, α_2 di a), invertiti.

(5) Questi β_r coincidono con quelli di c).

(6) E rispettivamente per D_0, D_1, D_2 .

Per finire, ecco qualche altra definizione:

l) I primi polari rispetto a Γ_6 dei piani passanti per una S_r hanno un piano comune θ_r che passa per la D_r coniugata: la retta polare di π rispetto al triedro $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ è l'asse.

m) I primi polari rispetto a Γ_4 dei piani passanti per una delle D_r hanno due piani comuni $\lambda_{rs}, \lambda_{rt}$ passanti per le rimanenti D_s, D_t ; e i sei piani che così risultano definiti si distribuiscono in due terne $(\lambda_{01}, \lambda_{12}, \lambda_{20})$, $(\lambda_{10}, \lambda_{21}, \lambda_{02})$ formanti due fasci: il piano degli assi b_1, b_2 dei due fasci sega π secondo T' , la cui coniugata armonica rispetto a b_1, b_2 è l'asse.

n) Le rette polari rispetto a Γ_4 dei piani passanti per una S_r giacciono in uno stesso piano μ_r : i tre piani μ_1, μ_2, μ_3 passano per la *normale proiettiva*.

o) Tali piani μ_r si possono definire anche in altro modo, che mena a un *legame tra normale proiettiva e spigolo* ⁽¹⁾. μ_r è anche il piano passante per D_r il cui primo polare rispetto a Γ_4 degenera in un fascio di piani avente per asse la S_r coniugata e in un cono residuo, il quale ha un piano v_r passante per S_r : i tre piani v_0, v_1, v_2 passano per lo spigolo.

Matematica. — *I funzionali analitici.* Memoria di L. FANTAPPIÈ, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Una questione sui veli elastici.* Nota di C. BURALIFORTI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul teorema di Gibbs.* Nota di V. POLARA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Applicazione del calcolo funzionale allo studio del raffreddamento di una sbarra.* Nota di S. L. STRANEO, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Un legame tra normale proiettiva e direttrice segue da g) e i).

Matematica. — *Sull'espressione dell'area di una superficie mediante un integrale doppio.* Nota di R. CACCIOPOLI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sopra le equazioni del problema dei due corpi di masse variabili.* Nota di G. VRANCEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sopra una nuova interpretazione del principio della minima costringimento del Gauss.* Nota di E. GUGINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sulla misura interferometrica della lunghezza d'onda effettiva di stelle doppie e della sua variazione con la distanza zenitale.* Nota ⁽¹⁾ di M. MAGGINI, presentata dal Socio E. BIANCHI.

1. In una Nota precedente ⁽²⁾ ho riferito su di un metodo assai semplice per determinare mediante l'Interferometro la lunghezza d'onda effettiva degli astri ed annunziavo anche che erano in corso esperimenti a Collurania per studiare la variazione della lunghezza d'onda con la distanza zenitale. Questi esperimenti sono stati proseguiti durante l'estate scorsa ed il risultato a cui sono giunto forma oggetto della presente Nota.

Il metodo che adopero per determinare con l'Interferometro rotante la lunghezza d'onda complessiva di una stella doppia stretta differisce alquanto da quello usato per i dischi. Come è noto nel caso dell'Interferometro rotante la formola che dà la distanza ρ di una doppia in funzione della distanza d fra le fenditure e della lunghezza d'onda effettiva λ prende la forma

$$\rho = \lambda/2d \cos \varphi$$

dove φ è l'angolo che la congiungente i punti di mezzo delle fenditure fa con la congiungente i due astri al momento della scomparsa delle frange.

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1928.

(2) Cfr. questi «Rendiconti», vol. VII, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 1, gennaio 1928.

Se, lasciando invariata la distanza d fra le fenditure, effettuiamo un'altra misura della stessa doppia, ma interponendo nell'Interferometro un filtro che lasci passare le radiazioni λ' , abbiamo analogamente:

$$\rho = \lambda' / 2d \cos \varphi'$$

da cui risulta:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'}$$

Dunque: il rapporto dei coseni degli angoli di posizione delle fenditure al momento della scomparsa delle frange è uguale al rapporto delle lunghezze d'onda effettiva delle due radiazioni.

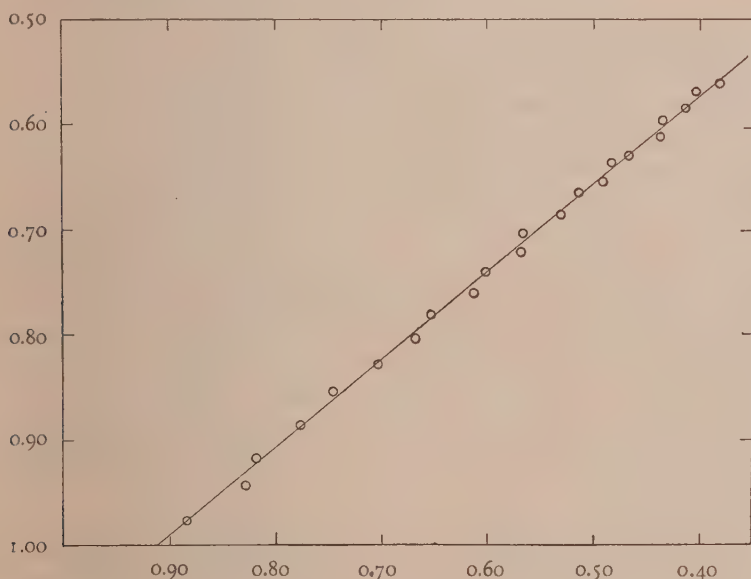


Fig. 1.

Effettuiamo allora un numero abbastanza grande di coppie di misure in λ ed in λ' variando per ciascuna coppia le d : prendendo per ascisse i $\cos \varphi$ e per ordinate i $\cos \varphi'$ corrispondenti dovrà risultare una retta, più o meno inclinata sull'asse delle ascisse, il cui coefficiente angolare darà il rapporto λ/λ' cercato.

Riporto qui sotto, come esempio, (fig. 1) una serie di misure eseguite il 3 giugno 1928 sulla doppia $\beta\text{GC } 6406 = 42 \text{ Comae}$ le cui componenti, entrambe di 5^m , permettono facilmente l'uso di un filtro rosso ($\lambda' = 658 \mu\mu$). In quella sera le fenditure interferometriche vennero variate in ciascuna

coppia di misure di una rivoluzione della vite del cono ⁽¹⁾, ciò che corrisponde sull'obiettivo a spostamenti di mm. 5.37 fra gli assi, partendo da un minimo di d pari a mm. 101.7 fino ad un massimo di mm. 263.0; ciascuna misura in λ e in λ' è la media di due rotazioni dell'Interferometro, tante quante ne uso nelle misure correnti di doppie, ma niente impedisce di effettuare tre o quattro rotazioni e di ridurre al minimo gli errori accidentali. Il coefficiente angolare della retta che perequa le misure risulta

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = 0.837$$

da cui si ottiene la lunghezza d'onda complessiva del sistema:

$$\lambda = 551 \mu\mu.$$

Riportandoci ai valori della λ eff. determinati a Catania ed a quelli ottenuti recentemente a Collurania, risulta per la β GC 4606 un tipo spettrale intorno ad F 5, come trovasi infatti nel Catalogo Draper.

Il metodo ora descritto può servire a risolvere per qualsivoglia stella i due problemi principali: la misura della lunghezza d'onda effettiva e la determinazione dell'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre. È necessario perciò trasformare la stella in una doppia, ciò che può ottenersi facilmente, come a suo tempo fece Anderson, interponendo dinanzi alle fenditure dell'Interferometro una lamina di quarzo tagliata a 45° rispetto all'asse di simmetria del cristallo; per effetto della doppia rifrazione, la lamina trasforma una stella semplice in una doppia più o meno stretta a seconda dello spessore. Una tale lamina, tagliata dalla Casa Hilger, ho saggiato l'estate scorsa a Collurania ⁽²⁾; i risultati, quantunque a causa dello spessore troppo grande la doppia artificiale ottenuta fosse un poco larga (0''.6), furono abbastanza incoraggianti.

Per determinare la λ eff. con la lamina di quarzo, ho fatto ancora uso dei filtri, quando lo splendore della stella lo permetteva, oppure ho scelta come λ' nota quella già determinata per un'altra stella; questo metodo di concatenamento delle misure è molto comodo e permette di ottenere delle rappresentazioni grafiche lineari.

2. Il secondo problema, quello dell'assorbimento selettivo esercitato dalla nostra atmosfera, è d'interesse capitale per l'interferometria astronomica e può trovare nei metodi di determinazione di λ ora descritti una soluzione elegante.

(1) Vedasi, per una breve descrizione dell'Interferometro di Collurania, nelle « Astronomische Nachrichten », Bd 233, p. 97 sgg.; uno studio dello strumento uscirà fra breve nelle « Memorie » della Specola.

(2) I più vivi ringraziamenti all'amico prof. V. Ronchi, direttore dell'Istituto di Ottica di Firenze, per i consigli e l'interessamento dimostratomi in occasione di queste ricerche.

Anche nel procedimento interferometrico, come in quello fotometrico di estinzione, si possono eseguire misure *assolute* e misure *differenziali*. Nel primo caso, una volta ottenuta la λ_0 di una stella zenitale o quasi, basta eseguire una serie di misure per varie distanze zenitali e determinare i rapporti λ_0/λ_z dai rapporti dei rispettivi $\cos \varphi_0$ e $\cos \varphi_z$ omologhi; la rappresentazione grafica di tale serie è un fascio di rette uscenti dal punto ($\cos \varphi_0 = 0$, $\cos \varphi_z = 0$) ciascuna retta corrispondendo al valore del rapporto λ_0/λ_z per la distanza zenitale z , mentre l'apertura massima del fascio corrisponde al coefficiente di assorbimento dell'atmosfera per la radia-

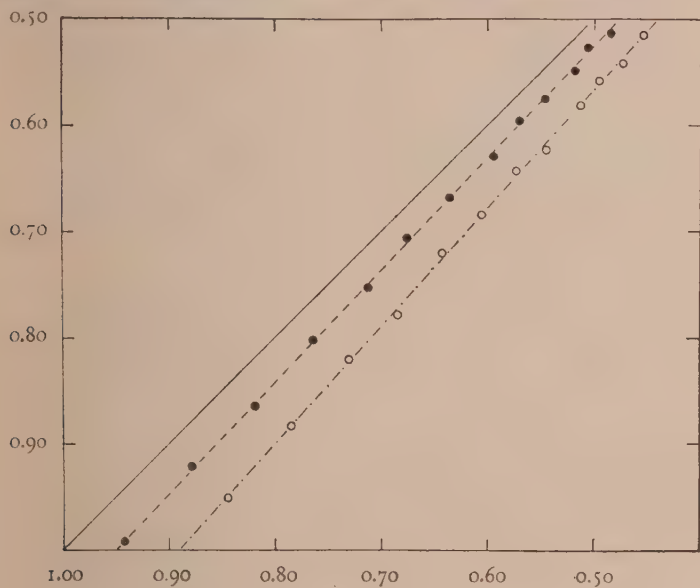


Fig. 2.

zione λ_0 . Queste misure possono eseguirsi su doppie artificiali, mediante la lamina di quarzo, o su doppie, artificiali o no, ugualmente colorate mediante filtri.

La fig. 2 riproduce due serie di misure ottenute nel mese di giugno 1928 allo scopo di saggiare la lamina di Hilger; vennero scelte le due stelle ν^1 e ν^2 *Bootis* ⁽¹⁾ aventi rispettivamente tipi spettrali K 5 e A 2, stelle che culminano quasi allo zenit di Collurania. L'intervallo di tempo in cui ho lavorato con la lamina è stato troppo breve per questo genere di osservazioni, occorrendo seguire le stelle a tutte le distanze zenitali; tuttavia

(1) La ν^2 *Bootis* è una doppia stretta, scoperta da Aitken nel 1907 e conosciuta appunto col simbolo A 1634 (cfr. «Lick Observatory Bulletin», n. 125), ma, data la piccola distanza delle sue componenti ($< 0''.1$), la duplicità non ha alcuna influenza sulle misure eseguite con la lamina.

distribuendo le osservazioni in due sedute per ciascuna sera e prolungando il più possibile la seconda potei spingermi a distanze zenitali notevoli, fra i 70° e gli 80° . Nella fig. 2 riporto appunto i valori estremi; la retta a tratto continuo, inclinata a 45° sull'asse delle ascisse (coeff. ang. 1.00) rappresenta, evidentemente, il rapporto λ_0/λ_z per $z = 0$; le due rette tratteggiate perequano i valori di detto rapporto per $z = 77^\circ$ ottenuti per le due stelle v^1 e v^2 .

Come si vede, i fasci di rette di cui le due tratteggiate sono rispettivamente le estreme (essendo a comune la retta a tratto continuo) hanno ampiezze diverse, e cioè ha ampiezza maggiore quello che si riferisca alla v^2 , ciò che sta ad indicare che le radiazioni emesse da questa stella subiscono un assorbimento maggiore per parte della nostra atmosfera, come appunto deve aver luogo considerando il tipo spettrale.

In quanto alle misure *differenziali*, possono consistere sia in misure su coppie di stelle relativamente vicine, scelte in modo che per effetto del moto diurno vengano a variare le loro distanze zenitali, sia nella ricerca del fattore di proporzionalità che possa ridurre la curva d'estinzione *locale* a quella *teorica*.

Quando sono andato ad applicare alle stelle doppie il metodo usato con le stelle artificiali per determinare l'assorbimento selettivo della nostra atmosfera, ho ottenuto dei risultati discordanti. Sembra però che il disaccordo sia soltanto apparente, perchè dovuto al fatto che ad una medesima variazione della distanza zenitale non corrispondono eguali variazioni nella lunghezza d'onda effettiva delle due componenti, cui quasi sempre competono tipi spettrali diversi. La λ eff. *complessiva* del sistema varia allora, con la distanza zenitale, in una maniera diversa da come varierebbe se la stella fosse semplice o con le componenti di egual tipo spettrale; questa azione selettiva esercitata dalla nostra atmosfera sembra che, in alcuni casi di doppie a componenti egualmente luminose, possa permettere di conoscere *grosso modo* la λ eff. relativa a ciascuna componente; ma di ciò, in una prossima Nota.

In conclusione, come vedemmo già dalla Nota precedente, all'ufficio di sostituire il Micrometro dove questo è impotente, si è aggiunto per l'Interferometro l'ufficio di sostituire il reticolo di diffrazione nelle misure di lunghezza d'onda effettiva, vediamo ora che esso può sostituire anche il Fotometro nelle misure di estinzione, sì che può dirsi che l'Astronomia classica e l'Astrofisica trovano in un unico strumento tre delle loro principali applicazioni.

Fisica. — *L'influenza dei raggi X sulle condizioni di struttura del bismuto e del tellurio.* Nota III ⁽¹⁾ di E. ADINOLFI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Con le ricerche sperimentali da me condotte si è voluto esaminare se la ionizzazione dell'atomo, per assorbimento di radiazioni penetranti in una massa metallica fusa, può avere influenza sul suo assetto cristallino nel processo di solidificazione.

Esperienze istituite allo scopo diedero risultati positivi con il constatare che i raggi X, assorbiti dal Bi durante la solidificazione, portano come conseguenza una modificazione di struttura del metallo che si manifesta con una diminuzione del coefficiente di Hall e con il comportamento del metallo dal punto di vista termoelettrico come elettropositivo rispetto allo stesso bismuto solidificato senza l'influenza delle dette radiazioni.

Per il tellurio ricerche analoghe hanno accertata una diminuzione del coefficiente di Hall per il Te_x e una forza elettromotrice termoelettrica in senso opposto alla prima, con comportamento cioè del Te_x da elettronegativo rispetto al Te ⁽²⁾.

Sempre allo scopo di rendermi più sicuro dell'esistenza del fenomeno e prima di procedere ad altre misure destinate a vedere se tale effetto differenziale potesse farsi sentire in altre proprietà del metallo, mi è parso utile precisare anzitutto le modalità della fusione e del raffreddamento con il particolare forno a resistenza adoperato: poichè, partendo dalla sostanza allo stato amorfo, i fattori sinora riconosciuti come strettamente legati al fenomeno della cristallizzazione, sia per il numero di germi che si formano che per il loro accrescimento, sono appunto: la temperatura a cui trovansi inizialmente la sostanza e la velocità di raffreddamento.

Per tale studio preliminare è servita la variazione di resistenza elettrica del bismuto nel passaggio di stato.

Una spirale piana di bismuto, ottenuta per fusione in uno stampo di terra refrattaria, portava agli estremi due conduttori di rame destinati a chiudere in circuito, attraverso una resistenza, un accumulatore di due elementi e un amperometro. In derivazione alla spirale un amperografo registratore serviva a fornire, con le indicazioni della intensità della corrente derivata, le variazioni di resistenza durante la fusione e la solidificazione. Detta spirale, unitamente allo stampo nel quale era contenuta, veniva intro-

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1928.

(2) « Rend. Acc. Lincei », 1, 382, 1925; « Boll. Soc. Naturalisti », 38, 114, 1926.

dotta nel forno elettrico e disposta orizzontalmente a 6 cm. di distanza dall'apertura.

Le grafiche della fig. 1 si riferiscono alla stessa spirale di bismuto fusa e solidificata prima senza l'influenza dei raggi X e in un secondo tempo con l'azione delle radiazioni emanate da un tubo Coolidge con tensione al secondario di 170 kv. circa e con intensità al secondario di 3 milliampère.

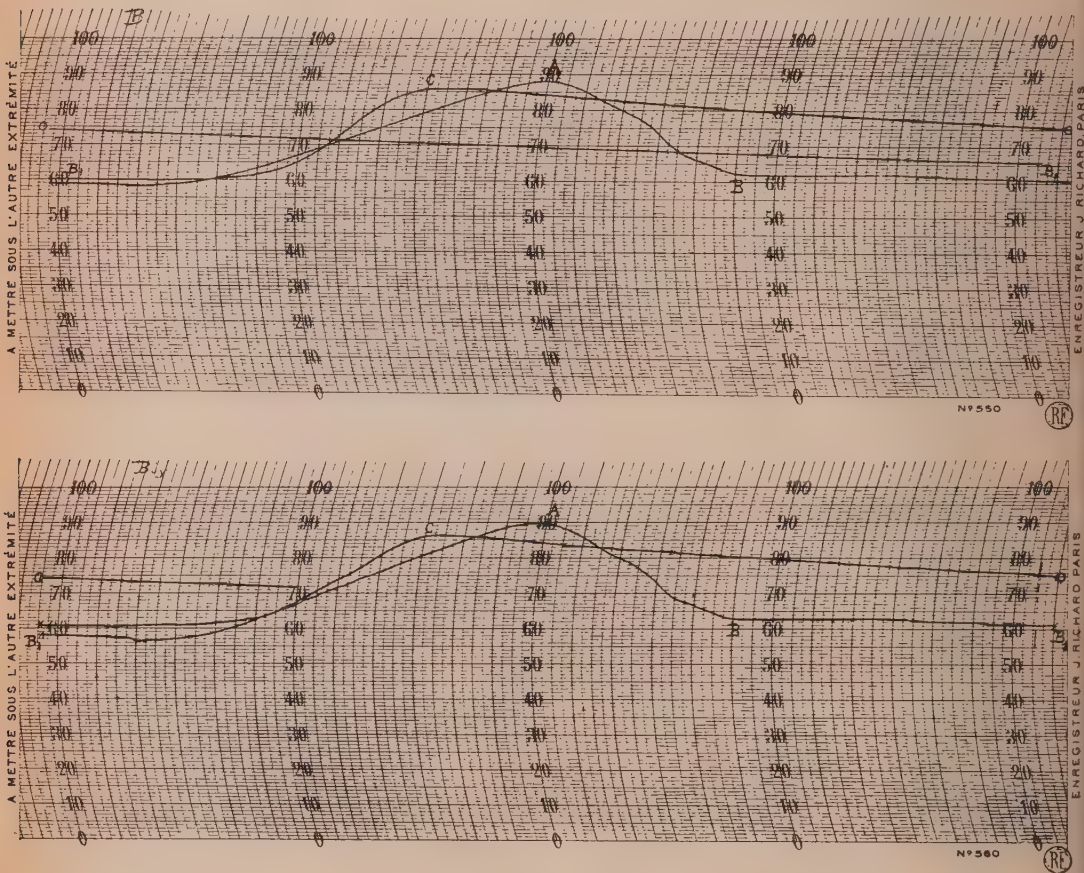


Fig. 1.

Le variazioni di resistenza, dedotte con facile computo dalle indicazioni dell'amperografo, sono coincidenti con quelle ottenute dal Tsutsuni⁽¹⁾ sia in queste prove che in altre eseguite con una seconda spirale di bismuto gettata nello stesso stampo. La durata della solidificazione col particolare regime del forno impiegato avviene costantemente in 30 minuti, e in tutte le prove

(1) HIDIO TSUTSUNI, « The Sciences Reports of the Tohokio I. U. », settembre 1918.

identica è la velocità di raffreddamento; sicchè gli effetti precedentemente constatati non sono da attribuirsi al diverso grado di ricuocimento dei pezzi metallici cimentati (fig. 1).

Quanto alle variazioni relative di resistenza che si hanno all'istante in cui la fusione è completa (punto B delle curve) e all'istante della effettuata solidificazione (punto C) riferita alla resistenza del metallo all'inizio della fusione (punto A) si sono ottenuti i valori seguenti:

	Bi	Bi _x
$\frac{r_B}{r_A} =$	0.45	0.55
$\frac{r_C}{r_A} =$	1.00	0.95

Dalla diversità di questi rapporti potrebbe desumersi una diversità di comportamento del Bi_x rispetto al Bi in ordine alla resistenza specifica ma, per il fatto che nelle particolari condizioni sperimentali da me realizzate le misure non potevano spingersi di là da un'approssimazione insufficiente, non ho voluto insistere con altre prove del genere contentandomi di verificare quanto mi ero proposto e cioè il regolare funzionamento del forno quando si disponga la lamina metallica nello stesso piano ad una certa profondità dell'apertura allo scopo essenziale di avere tutti i suoi punti nelle stesse condizioni termiche nelle diverse fusioni.

I calori specifici del Bi_x e del Te_x. — Per ricerche su di una eventuale variazione del calore specifico per il bismuto e tellurio sottoposti all'influenza dei raggi X si è preferito l'impiego del calorimetro di Bunsen. La massima cura si ebbe nel riempimento dell'apparecchio col far uso di acqua in ebollizione a bassa pressione, per deaerarla, e mercurio bidistillato. Il calorimetro era protetto da un vaso di Dewar contenente ghiaccio e acqua distillata; la produzione dell'involucro di ghiaccio che circonda il tubo interno si è ottenuta col raffreddare un secondo tubo di rame a fondo chiuso, introdotto nel primo, versandovi dell'aria liquida goccia a goccia. Si è sempre atteso tre ore circa prima di iniziare le misure per far sì che fra acqua e ghiaccio nell'interno del calorimetro si stabilisse l'uniformità di temperatura; di ciò si era avvertiti dai piccoli valori della velocità di spostamento del mercurio nel tubo capillare.

La costante dell'apparecchio adoperato in queste prime misure è di 2.676 divisioni del tubo capillare per una caloria.

I pezzi metallici, cimentati fra la temperatura dell'ambiente e quella del ghiaccio fondente, avevano forma di spranghette dello spessore di 4 mm. e della lunghezza di 4 cm. con massa aggirantesi intorno ai 10 grammi. Data la impossibilità di ottenere la colonnina di mercurio immobile nel tubo

capillare per ragioni già note⁽¹⁾ si è tenuto conto della velocità di spostamento eseguendo, a mezzo di un microscopio di piccolo ingrandimento, dieci letture prima dell'introduzione dei pezzi metallici e dieci successivamente ad intervalli di un minuto l'una dall'altra.

Nelle tabelle seguenti sono riportati i risultati ottenuti; in esse figurano anche i valori dati da campioni fortemente incruditi col versare il metallo fuso nello stesso stampo di grafite, fuori del forno, così da aversi la solidificazione e il raffreddamento nel brevissimo intervallo di tempo di qualche minuto.

TABELLA I.

	Bi	Bi _x	Bi (incrudito)
1	0.0313 295 309	0.0363 360 362	0.0342 345 —
2	300 295 294	325 327 323	327 329 323
3	284 283	323 322	321 331
4	284 297	327 326	314 320
Valore medio	0.0294 ± 0.0007	0.0336 ± 0.0014	

Da questa prima serie di misure risulta che sia l'incrudimento che l'azione dei raggi X portano un aumento del calore specifico; tale aumento si aggira intorno all'11 % per il Bi incrudito e al 14 % per il Bi_x; per il Te si hanno in ambo i casi aumenti dell'8 % sul valore normale.

Degno di rilievo è il fatto che per i due metalli cimentati il cosiddetto valore atomico si avvicina al valore teorico nello stato di lento ricuocimento; si ha infatti per il Bi 6.13 e per il Te 6.02.

(1) W. LOUGUINON, *Méthodes de Calorimétrie*, p. 137.

TABELLA II.

	Te	Te _x	Te (incrudito)
1	0.0479	0.0506	0.0500
1	477	503	492
1	461	515	—
2	464	507	534
	465	511	521
	464	508	524
3	461	503	493
	473	502	494
	489	—	—
4	489	528	530
	476	524	536
5	470	505	508
	476	504	521
Valore medio	0.0473	0.0510	
	± 0.0007	± 0.0007	

Allo scopo di aumentare la sensibilità del calorimetro e la precisione nelle misure in un secondo tempo ho fatto uso di un tubo capillare di minore sezione e nel contempo ho separato il calorimetro dal ghiaccio esterno con l'intermediario di una notevole massa di acqua distillata contenuta in un recipiente cilindrico di rame.

In tali condizioni, oltre ad avere un valore della costante uguale a 17.57, la velocità di spostamento del mercurio nel capillare, pur non assumendo valori tali da potersi trascurare nei calcoli, si è notevolmente ridotta. È necessario avvertire che generalmente, quando si usano tutte le precauzioni per proteggere il calorimetro dal calore irraggiato dall'esterno, il mercurio nel tubo capillare lentamente avanza; ciò dipende dal fatto che si ha un aumento continuo dell'involucro di ghiaccio che circonda il tubo calorimetrico perchè la temperatura del ghiaccio del commercio che si dispone all'esterno a scopo di protezione può essere leggermente inferiore a 0°. In ogni modo, a prescindere dal fatto che le misure hanno avuto più che ogni altro carattere differenziale, è da escludere che l'aver fatto uso dell'aria

liquida per la formazione della camicia di ghiaccio abbia potuto portare sensibili errori poichè il calorimetro ha conservato l'andamento regolare fino a quattro giorni di seguito, quando si è avuto cura di rifornire il ghiaccio esterno man mano che è venuto a mancare per fusione.

Seguono i risultati ottenuti con l'uso di pezzi di bismuto aventi massa notevolmente più grande di quelle precedenti e uno spessore di 4 mm.

TABELLA III.

	Massa del Bi	Calore specifico del Bi	Massa del Bi _x	Calore specifico del Bi _x
1	13.100	0.0288	9.514	0.0317
		299		322
		292		315
		299		321
2	16.980	299	19.558	308
		300		307
		303		306
		302		306
3	21.003	303	19.975	307
		295		308
		302		310
		—		310
4	22.275	304	20.182	323
		302		324
		297		327
5	22.275	293	19.259	308
		304		312
		302		311
6	21.012	303	18.641	309
		305		311
		304		315
		303		307
Valori medii		0.0300		0.0313

Anche da questa seconda serie di misure nettamente si rileva un aumento del calorico specifico per il Bi_x che si aggira intorno al 4.3 % con un errore medio dell'1 %. Mi sfuggono le ragioni per le quali si è avuto un aumento medio del calore specifico notevolmente più piccolo di quello ottenuto precedentemente nè saprei con sicurezza attribuirle al diverso modo di funzionare del tubo, a tracce di impurità nel metallo, ecc. ⁽¹⁾.

Per il tellurio i risultati sono più concordanti con quelli ottenuti con due coppie di campioni esaminati al secondo calorimetro. Se ne riportano i valori;

	Te	Te _x
1)	0.0483	0.0514
	493	519
	488	506
2)	0.0476	0.0506
	472	507
	479	505
	valore medio 0.0481	valore medio 0.0519

Conclusioni. — L'incrudimento del bismuto e del tellurio ottenuto con rapido raffreddamento del metallo fuso porta come conseguenza un aumento del calore specifico.

L'assorbimento dei raggi X da parte dei detti metalli durante il passaggio allo stato solido conferisce ad essi variazioni di struttura che si manifestano con un aumento del calore specifico.

In una Nota del dott. Rostagni, apparsa in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, sono esposti risultati che porterebbero a escludere ogni efficacia dei raggi X sulla variazione di struttura del bismuto. I campioni di bismuto con i quali si procedette a misure di f. e. m. termoelettriche furono ottenute con dispositivo diverso da quello da me impiegato allo scopo, secondo lo sperimentatore, di aversi maggiore omogeneità nel raffreddamento e di evitare l'ossidazione superficiale del metallo.

Ma è da rilevare che per essere disposti i pezzi di bismuto (della lunghezza di 10 cm.) secondo l'asse di una stufa a resistenza lungo il quale il gradiente termico è sempre grandissimo può aversi come effetto quella diversità di velocità di solidificazione che si è voluta evitare quantunque

(1) Il bismuto adoperato è quello che fornisce in spranghe la Casa Kahlbaum, ma i pezzi che servirono per la seconda serie di misure furono ritirati a intervallo di un anno circa dei precedenti.

(2) Fascicolo del 15 aprile 1928.

vi sia l'azione antagonista della conducibilità del blocco di alluminio nel quale si effettuava il getto.

Per ciò che riguarda l'ossidazione dello strato superficiale poichè interessa una frazione dello spessore estremamente piccola, quando non si raggiungano temperature molto più elevate di quella di fusione, l'inconveniente si elimina, come ho fatto io, con l'asportare l'esilissimo strato superficiale con pochi colpi di carta smeriglio sottile.

Le misure delle f. e. m. termoelettriche sono state eseguite per confronto dei due pezzi di Bi e Bi_x col rame. È da rilevare però che il potere termoelettrico medio Bi/Bi_x è una piccola frazione (un decimo circa) di quello Bi/Cu e per tale ragione è forse da preferirsi la misura diretta su elementi Bi/Bi_x come fu da me fatto. Il valore medio del potere termoelettrico bismuto rame ottenuto dal Rostagni (57×10^{-6} volts) sembra troppo piccolo poichè coincidente con quello minimo dato da altri sperimentatori⁽¹⁾, minimo che si raggiunge per cristalli con orientamento normale all'asse cristallografico; ammessa una distribuzione in tutte le direzioni dei cristalli nei campioni cimentati si sarebbero dovuti avere valori del potere termoelettrico con aumento di 13×10^{-6} volts circa, valori cioè corrispondenti a quello medio per le due orientazioni dei cristalli isolati.

Quanto al metodo di misura dei calori specifici nasce immediata la considerazione che il calorimetro delle miscele, così come è stato adoperato non poteva servire allo scopo per le ragioni che seguono:

1° Il notevole salto di temperatura che i pezzi metallici subivano nella immersione (da 97° a 15°) non poteva non portare effetto di tempera dato il basso punto di fusione del bismuto e l'esistenza di un punto di trasformazione a 75°⁽²⁾.

2° La dispersione di calore che si ha nel tempo del trasporto del campione dalla stufa al recipiente calorimetrico influisce fortemente su misure destinate a mettere in rilievo un effetto di piccola entità.

Conchiudo col far noto che nelle tabelle che figurano nel presente lavoro sono raccolte *tutte* le misure eseguite perchè in ricerche del genere non è da parlare di dati che possono parere più *attendibili*.

(1) BORELIUS und LIND, « Ann. d. Phys. », 51, 607, 1916; f. e. m. normale all'asse 54×10^{-6} ; parallelo all'asse 85×10^{-6} nell'intorno della temp. di 25°.

(2) DRUCKER, « Zeitschr. f. phys. Chem. », 130, 1927.

Fisica. — *Le scintille a basso voltaggio come sorgenti spettroscopiche* ⁽¹⁾. Nota di A. OCCHIALINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Lo spettro degli elementi presenta modificazioni così profonde e suggestive col cambiare del modo di eccitazione, che ogni nuovo procedimento atto a destarlo è degno della più attenta considerazione.

Per questo ho creduto non privo di interesse indagare lo spettro emesso da quelle scariche, che fin dal 1911 ho realizzato con una tensione di soli 220 V, e che per questo ho chiamato *scintille a basso potenziale* ⁽³⁾.

L'artificio per ottenere queste scintille consiste nell'usare come elettrodi di scarica un catodo incandescente, costituito dal carbone di un arco ausiliario, e un anodo freddo; e nel caricare un condensatore, derivato sull'intervallo di scarica, con corrente continua, attraverso a una resistenza abbastanza grande da impedire la formazione dell'arco. Allora il condensatore, caricato lentamente, si scarica a un tratto appena è raggiunta la tensione esplosiva, che nel caso speciale è straordinariamente bassa.

Con capacità di qualche microfarad, che data la piccola tensione richiesta, sono facili a realizzare con i condensatori a carta del commercio, la scarica ha luogo col rumore caratteristico e con le apparenze delle scintille condensate dei rocchetti e delle macchine elettrostatiche, delle quali possiede anche le caratteristiche spettrali.

Nell'applicazione di queste scariche come sorgenti spettroscopiche, ho dovuto riconoscere subito che l'arco ausiliario rappresenta un serio inconveniente, per la incostanza delle condizioni in cui si svolge la scarica, e per la necessità di una continua regolazione.

E anche la corrente continua, adoperata nei primi studi, non si dimostrò affatto adatta, sia perchè essa non è più disponibile sulle reti stradali, sia perchè non consente variazioni facili nel voltaggio.

Quindi, prima di passare all'esame dello spettro emesso da queste scintille, ho creduto di modificare la loro produzione in modo da sopprimere l'arco ausiliario, e da ottenere la carica del condensatore mediante la corrente alternata. E la descrizione del dispositivo che ne è risultato è lo scopo della presente Nota.

La sostituzione della corrente continua con l'alternata è stata facilmente raggiunta raddrizzando la corrente alternata mediante una batteria di valvole

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Siena.

(2) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(3) « Nuovo Cimento », (VI), 2, 223, 1911.

elettrolitiche. Poichè ogni elemento Al-Fe raddrizza fino a 20 V, per raddrizzare fino a 1000 V bastano 50 elementi, che, data la corrente poco intensa necessaria, possono essere realizzate con piccoli recipienti.

Con striscie metalliche di 10×2 cm., inchiodate a coppie e immerse in vasetti da specialità farmaceutiche contenenti una soluzione di bicarbonato sodico, si possono costruire elementi di un costo trascurabile e del tutto rispondenti allo scopo.

L'arco ausiliario è stato sostituito con un carbone incandescente. Il tentativo di arroventare il carbone facendolo percorrere da una corrente elettrica fallì per il rapido consumo del carbone; e solo dopo molti insuccessi, si riuscì nell'intento col far passare la corrente lungo due carboni disposti come quelli di un arco, ma permanentemente a contatto.

In tal caso l'incandescenza resta limitata attorno al punto di contatto, e se i due carboni sono di diametro diverso, prevale in quello sottile. Allora il carbone grosso si può tener fisso per lungo tempo e la regolazione resta limitata al carbone sottile. Una tale regolazione diventa automatica se si dispongono i due carboni verticalmente con quello fisso in basso, e l'altro abbandonato, lungo una guida al proprio peso.

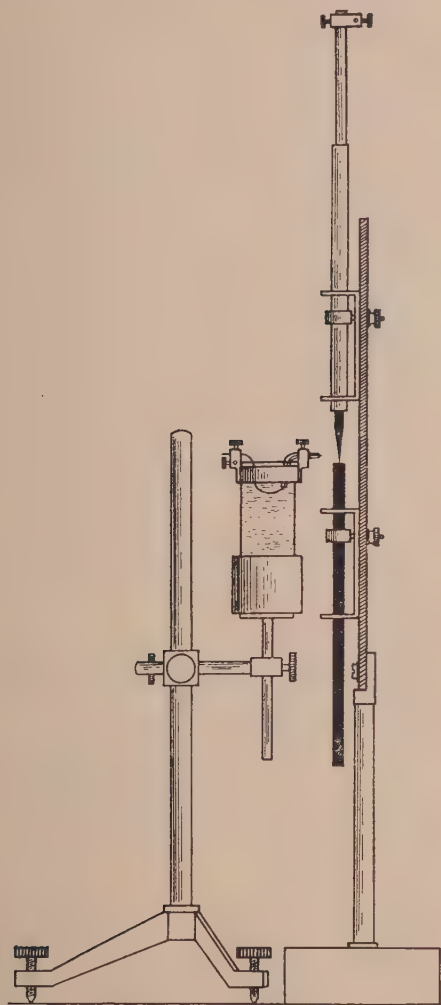
Il dispositivo che realizza queste condizioni, e che dopo molte prove è rimasto adottato, è costituito da un carbone di 7 mm. serrato contro due appoggi da un tirante e tagliato superiormente in piano; e da una canna di ottone fissata nello stesso modo, dentro la quale scorre il carbone superiore.

Quest'ultimo ha il diametro di 5 mm., ed è infilato per la sommità in una canna di ottone, che entra esattamente nella canna fissa, e che serve a tenere il carbone sempre sulla stessa verticale, a gravarlo in modo da assicurare la sua discesa di mano in mano che si consuma e a stabilire una buona comunicazione elettrica.

La canna esterna si prolunga fino a un paio di centimetri dal carbone fisso, e quindi riveste il carbone mobile per tutta la sua lunghezza, ad eccezione di un breve tratto estremo. In tal modo la parte del carbone non utilizzata è protetta contro l'eccessivo riscaldamento e contro l'ossigeno dell'aria e le bacchette possono essere utilizzate per quasi tutta la loro lunghezza. Invece il breve tratto esterno brucia gradatamente a partire dall'estremo e si foggia a guisa di lapis appuntito, facilitando così il concentramento dell'incandescenza.

L'apparecchio si mette in funzione automaticamente appena si fa passare la corrente riscaldante, e non ha bisogno di alcuna regolazione. La corrente di riscaldamento si mantiene sui 20 A, e sarebbe ottenuta nel modo più economico mediante un trasformatore in discesa alimentato dalla corrente alternata stradale, col secondario chiuso in corto circuito sui carboni. In queste ricerche è stato utilizzato un trasformatore che abbassa la tensione da 150 a 50 V, inserendo nel circuito secondario un'opportuna resistenza.

Come secondo elettrodo per la scintilla ho trovato molto soddisfacente un filo del metallo che si desidera esaminare passante in un tubetto di vetro immerso per un tratto nell'acqua contenuta in un bicchiere. L'acqua sale per capillarità nel tubetto e irrorà continuamente la punta che sporge per



breve tratto e fa da base alla scintilla. Con ciò viene del tutto eliminata la rapida fusione di alcuni metalli, e anche un filo di piombo del diametro di 1 mm. rimane inalterato sotto l'azione delle più potenti scariche.

Lo stesso dispositivo serve per l'esame delle soluzioni, le quali si pongono al posto dell'acqua, con un filo d'oro o di platino dentro il tubetto.

La tensione richiesta per ottenere scintille con questo metodo è superiore a quella con l'arco ausiliario, e raggiunge i 1000 V. Ma ciò non porta nessuna difficoltà, perchè i condensatori del commercio, che servono per il rifasamento dei motori e dei trasformatori, reggono benissimo a questa tensione; mentre la tensione stessa può essere generata facilmente con un piccolo trasformatore alimentato da corrente alternata stradale.

Con lo stesso dispositivo si possono ottenere anche scintille ordinarie, allontanando gli elettrodi tra loro e applicandovi una tensione conveniente. Ma questa tensione è sempre notevolmente più bassa di quella richiesta da elettrodi freddi, e con 3 cm. di distanza esplosiva non supera i 6000 V.

In tal caso la scarica è data da un condensatore a vetro caricato da un trasformatore in risonanza.

La figura qui annessa riproduce il dispositivo nelle proporzioni esatte. In essa si vede chiaramente come le varie parti possono essere spostate, sia per portare l'intervallo esplosivo all'altezza voluta, sia per variare la distanza del filo dai carboni. Per quest'ultimo scopo giova anche la vite esterna del treppiede che sorregge il bicchierino.

La scintilla ottenuta nel modo suddetto è orizzontale, e non potrebbe essere resa verticale senza complicare notevolmente la disposizione.

Ma questa posizione ha parecchi vantaggi su quella verticale generalmente adottata, perchè in essa:

- a) la scintilla resta sempre sulla fenditura e non saltella ai lati;
- b) si esamina sempre lo stesso punto della scintilla, e non, come succede con la scintilla verticale, talvolta una zona vicina agli elettrodi e talvolta una zona lontana;
- c) si può misurare esattamente la lunghezza di una riga, misurando lo spostamento che bisogna far subire all'immagine attraverso alla fenditura per percorrere il tratto in cui la riga è visibile.

Ma questi vantaggi risulteranno meglio quando si parlerà delle applicazioni spettroscopiche che si sono fatte con queste scintille a basso voltaggio, il che sarà fatto in una prossima Nota.

Fisica. — *L'effetto della resistenza sullo spettro di una scintilla.* Nota di A. OCCHIALINI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Calore di formazione dei cloruri doppi di cadmio e potassio* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di P. AGOSTINI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Si conoscono due sali doppi di cadmio e potassio $\text{KCl} \cdot \text{CdCl}_2$ e $4\text{KCl} \cdot \text{CdCl}_2$ che si separano dalle miscele dei sali fusi: il primo fonde a 431° e il secondo si scompone a 461° ⁽³⁾.

Del primo si conosce l'idrato $\text{KCl} \cdot \text{CdCl}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ che si separa da soluzioni equimolecolari dei due sali, mentre dalle soluzioni contenenti un forte eccesso di KCl si separa il sale $4\text{KCl} \cdot \text{CdCl}_2$, che, per diluizione, si scompone secondo l'equazione:



Sono stati misurati i calori di formazione dei due sali anidri.

*
* *

$\text{KCl} \cdot \text{CdCl}_2$.

Venne misurata la tonalità della reazione:



« Q » rappresenta la somma del calore di dissociazione di una molecola di sale doppio, e del calore di precipitazione di una molecola di $\text{Cd}(\text{OH})_2$. Togliendo da Q il calore di precipitazione di $\text{Cd}(\text{OH})_2$ si ottiene il valore cercato.

Si ottennero i risultati seguenti:

gr. $\text{KCl} \cdot \text{CdCl}_2$	gr. KOH in 1800 cc. H_2O	Variazione di temperatura	Δt	Q
10.00	4.35	+ 0.04	+ 0.0003	+ 2.01

gr. CdCl_2	gr. KOH in 1800 cc. H_2O	Variazione di temperatura	Δt	Q
7.10	4.35	+ 0.121	+ 0.005	+ 5.66

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta dell'11 novembre 1928.

(3) « N. Jb. Min. », Beilagebd 32, 629, (1911); « id. », 37, 1-50, (1914).

Con questi valori si calcola:

$$x = 2.01 - 5.66 = - 3.65 .$$

Il calore di addizione di una grammomolecola di KCl ad una di CdCl₂ è perciò di + 3.65 Cal.

La determinazione è stata fatta anche per altra via. Si misurò il calore di soluzione in acqua del sale doppio, e si sottrasse dal valore trovato la somma dei calori di soluzione di KCl e di CdCl₂.

gr. KCl ₂ ·CdCl ₂	cc. H ₂ O	Variazione di temperatura	Δt	Q
32.23	1800	- 0.408	+ 0.004	- 5.98

Per il calore di soluzione del cloruro di potassio fu preso - 4.32 Cal. e per quello di cadmio + 2.07 Cal.

Questi valori vennero determinati sperimentalmente nelle stesse condizioni di diluizione in cui fu eseguita la misura per il sale doppio.

Si ottenne così: $x = - 3.73$ Cal.

La concordanza tra questo valore e quello ottenuto mediante la misura del calore di precipitazione sta a dimostrare che il cloruro di cadmio e potassio in soluzione diluita si decompone completamente.

4KCl · CdCl₂.

La misura del calore di precipitazione ha dato i seguenti risultati:

gr. 4KCl·CdCl ₂	gr. KOH in 1800 cc. H ₂ O	Variazione di temperatura	Δt	Q
18.68	4.35	+ 0.093	+ 0.005	+ 4.67

Da questi si ricava:

$$x = + 4.67 - 5.659 = - 0.989.$$

Il calore di addizione di 4 mol. di KCl. a una di CdCl₂ sarebbe perciò di + 0.989 Cal. La lieve entità dell'effetto termico rende conto della poca stabilità di questo sale, che fonde con decomposizione e viene scomposto anche dall'acqua.

Chimica. — *α-fenil-cumarine*. Nota ⁽¹⁾ di G. BARGELLINI e LYDIA MONTI, presentata dal Socio N. PARRAVANO ⁽²⁾.

Continuando le ricerche iniziate da diversi anni sulle fenil-cumarine ⁽³⁾ descriviamo in questa Nota la preparazione e le proprietà di alcune cumarine sostituite in posizione *α* con un anello benzenico che ha anch'esso alcuni ossidrili eterificati.

Abbiamo preparate queste cumarine con lo stesso metodo che Ogliadoro ⁽⁴⁾ applicò per la prima volta nel 1879 per preparare la *α*-fenil-cumarina



e che fu poi applicato da noi per ottenere altre *α*-fenil-cumarine. Condensando una o-ossi-aldeide aromatica (aldeide salicilica, aldeide resorcilica o aldeide floroglucinica) con un acido fenilacetico sostituito (acido p-metossi-fenilacetico o acido metilendiossi-fenilacetico) abbiamo preparato le cumarine che descriviamo nella parte sperimentale, insieme ad alcuni dei loro derivati che possono servire a caratterizzarle meglio.

(1) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1928.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

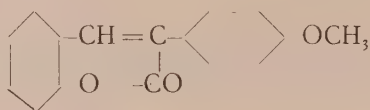
(3) BARGELLINI e LEONARDI, «Gazz. Chim. Ital.», 41, (1), 737, (1911); BARGELLINI e FORLI-FORTI, «Gazz. Chim. Ital.», 41, (1), 747, (1911); BARGELLINI, questi «Rend.», (6), 2, (2), 32, (1925); BARGELLINI, questi «Rend.», (6), 2, (2), 178, (1925); BARGELLINI, questi «Rend.», (6), 2, (2), 261, (1925); BARGELLINI, «Gazz. Chim. Ital.», 55, 945, (1925); BARGELLINI, «Gazz. Chim. Ital.», 57, 457, (1927); BARGELLINI e MONTI, «Gazz. Chim. Ital.», 57, 462, (1927).

(4) OGLIALORO, «Gazz. Chim. Ital.», 9, 428, (1879).

(5) L'acido p-metossi-fenilacetico necessario per queste esperienze fu preparato a partire dal prodotto di condensazione dell'aldeide anisica con rodanina (ANDREASCH e ZIPSER, «Monatsh.», 24, 515-1903; BARGELLINI, «Gazz. Chim. Ital.», 36, (2), 129-1906). Da questo per riscaldamento con KOH e poi con ammoniaca, secondo il metodo indicato da GRÄNACHER («Helv. Chim. Acta», 5, 610-1922; 6, 462-1923) si forma l'acido p-metossi-fenil-piruvico $\text{CH}_3\text{O}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CH}_2-\text{CO}-\text{COOH}$. Ossidando questo con H_2O_2 in soluzione alcalina si ottiene l'acido p-metossi-fenilacetico in aghetti bianchi fusibili a 86°, come per la prima volta indicò CANNIZZARO («A.», 117, 243-1861).

PARTE SPERIMENTALE

α -(4-METOSSI-FENIL)-CUMARINA :

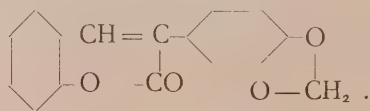


Gr. 5 di aldeide salicilica e gr. 8 di sale di sodio dell'acido p-metossi-fenilacetico ⁽⁵⁾ insieme con 50 cc. di anidride acetica si riscaldano su bagno di sabbia a ricadere. Dopo circa 30 ore si getta in acqua il prodotto della reazione. Si deposita la cumarina che si purifica facendola cristallizzare più volte dall'alcool bollente. Si ha in laminette lucenti leggermente giallognole. Fonde a 142-144°.

Sostanza gr. 0.1706	CO ₂ gr. 0.4777	H ₂ O gr. 0.0736
Donde °/o trovato	C = 76.36	H = 4.80
per C ₁₆ H ₁₂ O ₃ calcolato	C = 76.19	H = 4.76

Nell'acqua non si scioglie; è solubile invece nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo. Nell'acido solforico concentrato si scioglie dando soluzione quasi incolore con debole fluorescenza verde.

α -(3-4-METILENDIOSSI-FENIL)-CUMARINA :



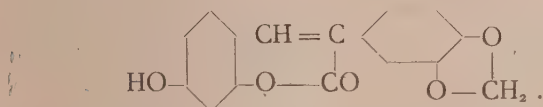
Si prepara riscaldando per circa 30 ore a ricadere su bagno di sabbia una mescolanza di gr. 7 di aldeide salicilica, gr. 10 di sale sodico dell'acido metilendiossi-fenilacetico ⁽¹⁾ e 50 cc. di anidride acetica. Gettando in acqua il prodotto della reazione si deposita la cumarina che, cristallizzata dall'alcool bollente, si ottiene in piccoli aghetti fusibili a 170-172°.

Sostanza gr. 0.1878	CO ₂ gr. 0.4988	H ₂ O gr. 0.0652
Donde °/o trovato	C = 72.44	H = 3.85
per C ₁₆ H ₁₀ O ₄ calcolato	C = 72.18	H = 3.76

(1) L'acido metilendiossi-fenilacetico occorrente per queste condensazioni fu preparato a partire dall'alcool piperonilico, trasformando questo con acido cloridrico gassoso, nel cloruro corrispondente, poi, con KCN in soluzione idroalcolica, nel cianuro, dalla saponificazione del quale si ha l'acido 3-4-metilendiossi-fenilacetico, in aghetti bianchi fusibili a 127°.

È insolubile nell'acqua. Si scioglie poco nell'alcool freddo ; meglio nell'alcool caldo e nell'acido acetico; meglio ancora nel benzolo anche a freddo. La soluzione nel benzolo ha una bella fluorescenza celeste. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con intensa colorazione verde oliva.

α -(3-4-METILENDIOSSI-FENIL)-4-OSSI-CUMARINA:



L'*acetil-derivato* si forma riscaldando gr. 2 di aldeide resorcilica con gr. 3 di sale sodico dell'acido metilendiossi-fenilacetico e 20 cc. di anidride acetica, a bagno di sabbia a ricadere. Dopo circa 30 ore si getta in acqua il prodotto della reazione. La sostanza che si deposita cristallizza dall'alcool bollente in laminette bianche fusibili a 191-192°.

Sostanza gr. 0.2027	CO ₂ gr. 0.4954	H ₂ O gr. 0.0677
Donde % trovato	C = 66.65	H = 3.71
per C ₁₈ H ₁₂ O ₆ calcolato	C = 66.66	H = 3.70

È solubile nell'alcool e nell'acido acetico. Nel benzolo si scioglie dando una soluzione incolore con fluorescenza celeste. È insolubile nell'acqua e nelle soluzioni di idrato sodico a freddo: riscaldando, viene saponificata e passa in soluzione. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa bruna che passa dopo poco al verde.

Sciogliendo questo acetil-derivato nell'alcool e facendo passare nella soluzione una corrente di ammoniacca gassosa fino a saturazione, si ha saponificazione mentre il liquido assume una intensa fluorescenza verde. Si fa distillare l'alcool e il residuo si riprende con acido cloridrico diluito, scaldando su bagno-maria. La *ossi-cumarina* che così si separa si purifica cristallizzandola dal benzolo bollente e poi dall'alcool caldo. Fonde a 238-239°.

Sostanza gr. 0.1622	CO ₂ gr. 0.4032	H ₂ O gr. 0.0555
Donde % trovato	C = 67.79	H = 3.80
per C ₁₆ H ₁₀ O ₅ calcolato	C = 68.08	H = 3.54

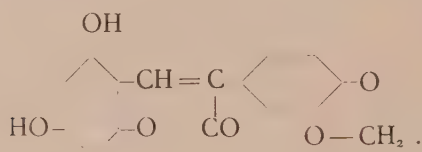
Nell'acqua non si scioglie: è solubile invece anche a freddo nella soluzione diluita di NaOH e nella soluzione di ammoniacca. La soluzione ammoniacale presenta intensa fluorescenza verde. Si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico, meno nel benzolo al quale imparte forte fluorescenza celeste. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rosso-bruna che dopo pochi minuti diventa verde.

L'ete e metilico di questa ossi-cumarina si prepara eterificandola con solfato dimetilico e potassa. Dopo aver fatto distillare l'alcool si riprende il residuo con acqua e si estrae con etere. Si purifica per cristallizzazione dall'alcool. Fonde a 195-196°.

Sostanza gr. 0.1516	CO ₂ gr. 0.3827	H ₂ O gr. 0.0563
Donde % trovato	C = 68.84	H = 4.12
per C ₁₇ H ₁₂ O ₅ calcolato	C = 68.91	H = 4.05

Si scioglie nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione verde.

α-(3-4-METILENDIOSSI-FENIL)-4-6-DIOSSI-CUMARINA:



Il *biacetil-derivato* si prepara riscaldando su bagno di sabbia a ricadere una miscela di gr. 9 di aldeide floroglucinica, gr. 10 di sale sodico dell'acido metilendiossi-fenilacetico e 60 cc. di anidride acetica. Dopo circa 30 ore di riscaldamento si getta in acqua il prodotto della reazione. Il composto che si separa si purifica cristallizzandolo da acido acetico. Aghetti giallognoli fusibili a 198-199°.

Sostanza gr. 0.2322	CO ₂ gr. 0.5305	H ₂ O gr. 0.0855
Donde % trovato	C = 62.30	H = 4.09
per C ₂₀ H ₁₄ O ₈ calcolato	C = 62.82	H = 3.66

È insolubile nell'acqua e nella soluzione di idrato sodico a freddo. Si scioglie poco nell'alcool, meglio nell'acido acetico. Anche nel benzolo bollente si scioglie poco, ma abbastanza per impartire alla soluzione fluorescenza celeste.

Per ottenere la *diossi-cumarina* si fa passare una corrente di ammoniac gassosa attraverso la soluzione alcoolica dell'acetil-derivato sopradescritto. Dopo aver fatto distillare l'alcool, il residuo si riprende con acido cloridrico diluito scaldando su bagno-maria. Il prodotto che si ottiene, insolubile nell'acqua, si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool caldo. Per

riscaldamento si decompone poco a poco sopra 260° diventando nero. Fu analizzata la sostanza seccata nel vuoto su acido solforico:

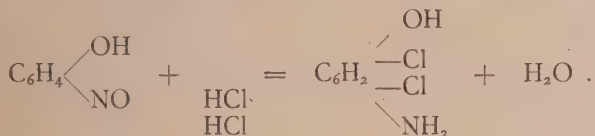
Sostanza gr. 0.1618	CO ₂ gr. 0.3605	H ₂ O gr. 0.0567
Donde % trovato	C = 60.76	H = 3.89
per C ₁₆ H ₁₀ O ₆ + H ₂ O calcolato	C = 60.75	H = 3.79

Si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico, pochissimo nel benzolo bollente. La soluzione ammoniacale è gialla non fluorescente. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rosso-bruna.

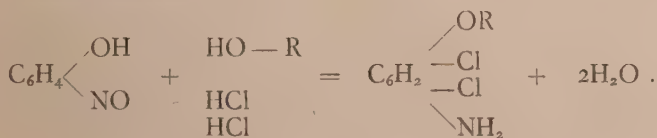
L'etere metilico di questa diossi-cumarina si prepara nel solito modo, eterificandola con solfato dimetilico e idrato potassico in soluzione alcoolica. Cristallizzato dall'alcool, fonde a 170° circa.

Chimica. — Sulla 3-5-bicloro-fenetidina⁽¹⁾. Nota di G. BARGELLINI e P. LEONE, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Facendo passare una corrente di acido cloridrico gassoso attraverso una soluzione eterea di nitroso-fenolo, Jaeger⁽³⁾ osservò che il gruppo —NO di questo viene trasformato in gruppo —NH₂ mentre due atomi di cloro entrano nell'anello benzenico, in modo che si forma un bicloro-ammino-fenolo:



Jaeger non studiò in modo particolare questo composto e soprattutto non si occupò di determinare in quale posizione entrino nell'anello benzenico i due atomi di cloro. Facendo poi agire l'acido cloridrico sul nitroso-fenolo in soluzione nell'alcool metilico o nell'alcool etilico, Jaeger osservò che si formano sostanze prive di proprietà feniche, le quali sono probabilmente la bicloro-anisidina e la bicloro-fenetidina corrispondenti al bicloro-ammino-fenolo precedente:

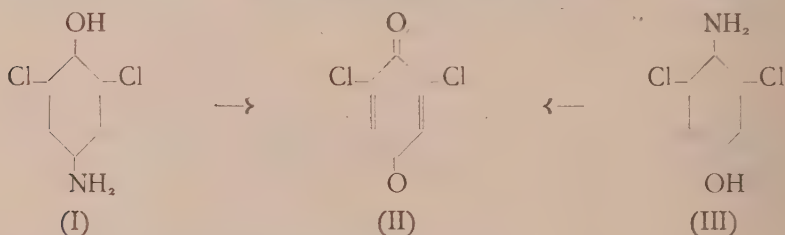


(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

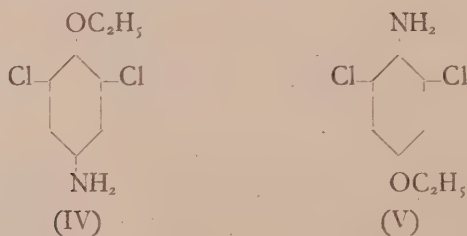
(2) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(3) JAEGER, « Ber. », 8, 895 (1875).

Noi abbiamo ripreparato il composto etilico di Jaeger, potemmo fissare le condizioni migliori per ottenerlo, ne abbiamo ottenuti alcuni derivati (che saranno descritti nella parte sperimentale) e potemmo dimostrare che è veramente una bicloro-fenetidina. Riscaldandola con acido iodidrico si forma lo stesso bicloro-ammino-fenolo che Jaeger aveva ottenuto direttamente dal nitroso-fenolo e acido cloridrico in soluzione eterea. In questo bicloro-ammino-fenolo che proviene dal para-nitroso-fenolo, i due gruppi —NH_2 e —OH devono stare in posizione para l'uno all'altro. L'ossidazione di questo composto con acido cromico ci fornì un primo indizio sulla sua costituzione perchè, essendosi formato il 2-6-bicloro-chinone (formula II), si poteva ad esso attribuire la formula I oppure la formula III



e per la bicloro-fenetidina di Jaeger ad esso corrispondente restava da scegliere fra le formule IV e V.



Un'osservazione fatta sul comportamento della bicloro-fenetidina di Jaeger ci permise presto di scegliere la formula V.

Mentre come è noto, le ammine aromatiche si condensano facilmente con le aldeidi aromatiche e con altre sostanze capaci di reagire con il gruppo —NH_2 , la bicloro-fenetidina di Jaeger non ha invece alcuna tendenza a reagire e si riottiene inalterata in quasi tutte le reazioni di condensazione a cui si sottopone. Questo comportamento negativo della bicloro-fenetidina di Jaeger è probabilmente da attribuirsi all'impedimento sterico che sul gruppo —NH_2 esercitano i due atomi di cloro che stanno in posizione orto-orto ad esso e si può spiegare se le assegnamo la formula V di 3-5-bicloro-fenetidina.

Questa prima conclusione alla quale siamo giunti è stata poi da noi confermata preparando l'altro isomero, la 2-6-bicloro-fenetidina della formula IV e dimostrando che è differente da quella di Jaeger.

Intorno alla 2-6-bicloro-fenetidina riferiremo in una Nota a parte.

PARTE SPERIMENTALE

3-5-BICLORO-FENETIDINA (Formula V). — Si prepara nella maniera che fu indicata da Jaeger (loc. cit. [2]) Cc. 100 di alcool assoluto vengono saturati con acido cloridrico gassoso, raffreddando esternamente con ghiaccio. Alla soluzione sempre raffreddata si aggiunge a piccole porzioni gr. 10 di nitroso-fenolo secco, agitando continuamente il liquido; nella reazione si svolge molto calore, onde conviene raffreddare sempre con ghiaccio. Il nitroso-fenolo si discioglie colorando il liquido prima in verde poi in rosso bruno; infine si comincia a depositare una sostanza cristallina. Quando il riscaldamento spontaneo è cessato, si lascia stare il liquido a temperatura ordinaria per qualche ora. Si deposita così cristallizzato una parte del prodotto della reazione, il cloridrato della bicloro-fenetidina. Non conviene però filtrarlo perchè è mescolato con una sostanza resinosa rossastra da cui è difficile separarlo. Meglio è diluire con acqua, far distillare l'alcool, alcalizzare il liquido con idrato sodico e far distillare in corrente di vapore d'acqua. Distilla così la bicloro-fenetidina come un olio giallognolo che si solidifica facilmente. Rendita gr. 8. Cristallizzato dall'alcool diluito, si ha in ciuffi di lunghi aghi bianchi fusibili a 46°, come indicò Jaeger. Si scioglie facilmente nell'etere, alcool, benzolo, cloroformio, poco nell'acqua. Distilla inalterata a 275° circa..

	Trovato	N % 7.02	Cl % 34.60
per $C_8H_9Cl_2ON$	Calcolato	N % 6.90	Cl % 34.46

Con gli acidi forma sali ben cristallizzati. Il cloridrato e il solfato cristallizzano per raffreddamento dalle soluzioni acide bollenti in aghi bianchi splendenti. Se questi sali si fanno bollire con acqua distillata, si idrolizzano facilmente, mentre la base libera distilla col vapor d'acqua.

3-5-BICLORO-AMMINO-FENOLO (Formula III). — Per saponificare il gruppo etossilico contenuto nella bicloro-fenetidina sopradescritta, si riscalda con 10 parti di acido iodidrico ($d = 1.70$) in un palloncino con refrigerante a ricadere. Dopo 8-10 ore di ebollizione, il liquido si getta in acqua contenente solfito di sodio e si neutralizza poi con ammoniaca. Si deposita una sostanza cristallina bianca che si può purificare facendola cristallizzare di nuovo dall'acqua bollente. Si ha così il bicloro-ammino-fenolo in aghetti bianchi fusibili a 174-175°, come il bicloro-ammino-fenolo che Jaeger

aveva ottenuto direttamente facendo agire l'acido cloridrico gassoso sopra il nitroso-fenolo sciolto nell'etere puro (privo di alcool).

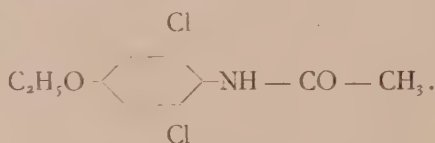
Il bicloro-ammino-fenolo si scioglie poco nell'acqua fredda, più facilmente a caldo. È solubile nell'alcool, nell'etere e nell'acido acetico.

	Trovato	N %	7.92	Cl °	39.56
per $C_6H_5Cl_2ON$	Calcolato	N %	7.86	Cl %	39.88

2-6-BICLORO-CHINONE (Formula II). -- Aggiungendo una soluzione acquosa di bicromato di potassio ad una soluzione di bicloro-ammino-fenolo in acido solforico diluito si forma il bicloro-chinone che si deposita come polvere gialla. Si filtra, si fa distillare in corrente di vapor d'acqua e si fa cristallizzare infine dall'alcool. Aghetti gialli fusibili a 118-120° come il bicloro-chinone che per confronto abbiamo preparato dal tricloro-fenolo col metodo descritto da Waselski⁽¹⁾. Una miscela dei due composti fonde alla stessa temperatura 118-120°.

DERIVATI DELLA 3-5-BICLORO-FENETIDINA.

Acetil-derivato (3-5-bicloro-fenacetina).



Gr. 3 di bicloro-fenetidina si sospendono in 10 cc. di acqua e si aggiungono 10 cc. di anidride acetica. La mescolanza si riscalda un poco spontaneamente, mentre la bicloro-fenetidina passa in soluzione. Si agita per qualche tempo finchè è scomparso lo strato oleoso. Lasciando poi in riposo a temperatura ordinaria per qualche ora, si deposita l'acetil-derivato come una massa cristallina bianca. È facilmente solubile nell'alcool, etere, acetone, cloroformio. Cristallizza dall'alcool metilico diluito in aghetti bianchi fusibili a 129-130°.

	Trovato	N %	5.80	Cl %	28.40
per $C_{10}H_{11}Cl_2O_2N$	Calcolato	N %	5.64	Cl %	28.62

Biacetato. — Se invece di fare l'acetilazione a freddo nella maniera sopradescritta, si riscalda su bagno di sabbia a ricadere per 4-5 ore la base (oppure il mono-acetato) con 2 parti di acetato sodico e 10 parti di anidride acetica e poi si getta in acqua il prodotto della reazione, si ottiene un

(1) WESELSKI, « Ber. », 3, 646 (1870).

acetil-derivato differente dal precedente, il quale cristallizza dall'alcool diluito in aghetti bianchi fusibili a 86–88°. È solubile in alcool, etere, acetone e cloroformio.

	Trovato N %	5.02	Cl %	24.72
per $C_{12}H_{13}Cl_2O_3N$	Calcolato N %	4.82	Cl %	24.48

Si tratta quindi di un biacetato $C_8H_7Cl_2ON$ $\begin{matrix} \swarrow CO-CH_3 \\ \searrow CO-CH_3 \end{matrix}$ analogo a

quelli che sono stati preparati anche da altre ammine aromatiche. Per riscaldamento con ammoniaca (Vedi Tassinari, « Gazz. Chim. It. », 24, [I] 445 [1894]) perde un gruppo acetilico e si trasforma nel mono-acetato fusibile a 130°. Se si riscalda invece con HCl al 50 % o con KOH al 25 % si eliminano tutti e due i gruppi acetilici e si forma la bicloro-fenetidina fusibile a 45°.

Beuzoil-derivato. — Gr. 1.7 di bicloro-fenetidina si sciolgono in poco etere anidro e si mescolano con una soluzione di gr. 1 di cloruro di benzoile in etere anidro. Dopo pochi minuti comincia a separarsi un precipitato fioccoso bianco. Si fa distillare l'etere, il residuo si raccoglie su filtro lavandolo bene con acqua acidificata con acido cloridrico e si purifica infine facendolo cristallizzare dall'alcool. Fonde a 188°. È poco solubile nel benzolo e nel cloroformio.

	Trovato N %	4.70	Cl %	22.62
per $C_{15}H_{13}Cl_2O_2N$	Calcolato N %	4.51	Cl %	22.90

Condensazione con anidride ftalica. — Gr. 2 di bicloro-fenetidina si mescolano con gr. 1.4 di anidride ftalica e si riscalda la miscela in un bagno d'olio a 170–180° per circa un'ora cioè finchè non è cessata la formazione di acqua che si deposita sul collo del palloncino dove si fa il riscaldamento. Il prodotto della reazione si scioglie in alcool bollente: per raffreddamento si deposita in aghi incolori fusibili nettamente a 193–194°. Lasciando raffreddare, si solidifica e quando poi si riscalda di nuovo, fonde nuovamente alla stessa temperatura. Si scioglie facilmente nel cloroformio anche a freddo, mentre, come è noto, l'anidride e l'acido ftalico si sciolgono poco o niente in questo solvente.

	Trovato N %	4.30	Cl %	20.95
per $C_{16}H_{11}Cl_2O_3N$	Calcolato N %	4.16	Cl %	21.13

Condensazione con anidride succinica. — Si fa in modo analogo a quello descritto per l'anidride ftalica. Il prodotto della reazione cristallizza dall'alcool in aghi incolori fusibili a 137°.

Azo-derivati. — La bicloro-fenetidina si può facilmente diazotare nel solito modo aggiungendo nitrito sodico in quantità calcolata alla sua soluzione acida ben raffreddata. La soluzione del diazo-composto si copula facilmente coi fenoli e con le ammine aromatiche. Aggiungendo la soluzione del diazo-composto ad una soluzione alcalina di β -naftolo, si ottiene un precipitato rosso. Dopo averlo raccolto e lavato bene con acqua si fa cristallizzare dall'alcool bollente. Si ha in aghi rossi solubili in etere, cloroformio, acetone. Fonde a 120° .

	Trovato N % 8.04	Cl % 19.90
per $C_{18}H_{14}Cl_2O_2N_2$	Calcolato N % 7.75	Cl % 19.66

La soluzione del diazo-composto riscaldata fino all'ebollizione con l'intenzione di ottenere da essa il fenolo corrispondente, si altera senza che ci sia stato possibile isolare il fenolo cercato.

Numerosi tentativi abbiamo fatti per copulare il cloruro di diazo-benzolo con la bicloro-fenetidina, presa come componente passivo. In tutte queste prove abbiamo ottenuto sempre la base inalterata.

Altre prove negative. — Sono riuscite infine completamente negative le prove fatte per condensare la bicloro-fenetidina fusibile a 46° con aldeidi aromatiche (aldeide benzoica e piperonalio) con cloro-dinitro-benzolo, con CS_2 , con fenil-senfolo, con KSCN, ecc.

Chimica. — *Sulla 2-5-bicloro-fenetidina.* Nota di G. BARGELLINI e L. MONTI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla 2-6-bicloro-fenetidina.* Nota di G. BARGELLINI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il calore di formazione della dolomite.* Nota di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Nuovo metodo per il dosamento volumetrico del cobalto* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio R. NASINI.

In una Nota precedente ⁽³⁾ ho descritto la demolizione dei cobalti-nitriti mediante bicarbonato sodico a caldo. Nei liquidi verdi che risultano da tale reazione tutti i gruppi NO_2 che facevano parte del complesso cobalti-nitroso sono contenuti in forma di nitrito alcalino, mentre il cobalto trivalente è entrato a far parte di un complesso cobalti-carbonico cui è dovuta la colorazione verde. Introducendo i liquidi verdi in una soluzione di permanganato acidificata con acido solforico, l'acido nitroso viene ossidato quantitativamente e a freddo ad acido nitrico, e il cobalto trivalente viene ridotto a bivalente così che per ogni molecola di cobalti-nitrito originario vengono consumati undici equivalenti di ossigeno del permanganato.

Queste reazioni offrono una via piana e facile per la titolazione volumetrica dei cobalti-nitriti e quindi anche dei due elementi che possono venire separati quantitativamente come cobalti-nitriti: il potassio e il cobalto.

Sull'applicazione di queste reazioni al dosamento volumetrico del potassio, ho già riferito in altra Nota ⁽⁴⁾: in questa mi propongo di mostrare come possono venir utilizzate nel dosamento volumetrico del cobalto.

Di tutti i metodi che sono stati finora proposti per il dosamento volumetrico del cobalto nessuno ha avuto un successo definitivo. Quello ⁽⁵⁾ che si fonda sulla reazione fra sali cobaltosi e cianuro potassico, oltre ad essere poco esatto, ha un campo di applicazione molto ristretto perchè non può essere impiegato in presenza di nichel e di altri metalli.

Tutti gli altri sono metodi ossidimetrici in cui si determina o il potere riducente dell'idrossido cobaltoso ⁽⁶⁾ mediante una soluzione titolata di permanganato, o il potere ossidante dell'idrossido cobaltico ⁽⁷⁾ mediante acido

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1928.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(3) « Rend. Accad. Lincei » [6], 7, I, (1928), 747.

(4) « L'industria saccarifera italiana », XXV, 8, (1928), 387.

(5) E. RUPP, F. PFENNING, « Chem. Ztg. », 34, 322; H. GROSSMANN, « Chem. Ztg. », 34, 673.

(6) WINKLER, « Z. Analyt. Chem. », 3 (1864), 265-420; 7 (1868), 48; FLEISCHER, « J. Prakt. Chem. » [2], 2 (1870), 48; HARRIS, « Am. Chem. Soc. », 20, (1898), 173; TAYLOR, « Chem. News », 88, (1903), 184.

(7) MAC CULLOCH, « Chem. News », 56 (1887), 27; CARNOT, « C. R. », 108 (1889), 610; H. WILLARD, D. HALL, « Journ. Am. Chem. Soc. », 44, 2237.

jodidrico o solfato ferroso. Questi metodi non hanno una sensibilità molto grande perchè si basano su reazioni nelle quali ad ogni atomo di cobalto corrisponde il consumo o la liberazione di un solo equivalente di ossigeno, mentre, come si è detto più sopra, nella titolazione dei cobalti-nitriti ogni atomo di cobalto importa l'impiego di undici equivalenti di ossigeno.

Non mi risulta che il potere riducente dei cobalti-nitriti rispetto al permanganato sia stato finora utilizzato per la titolazione volumetrica del cobalto. Nell'analisi per via ponderale la separazione del cobalto come cobalti-nitrito di potassio non può dare risultati soddisfacenti perchè è stato riconosciuto che la composizione del precipitato giallo di cobalti-nitrito è diversa a seconda dei sali estranei presenti nella soluzione in cui ha preso origine. In presenza di molti sali di sodio la sua composizione si avvicina a quella espressa dalla formula $K_2Na[Co(NO_2)_6] \cdot H_2O$ e in presenza di metalli alcalino terrosi, di nichel, di manganese e di zinco ¹⁾, quantità più o meno grandi di questi elementi entrano a far parte del precipitato sostituendo parzialmente il potassio. Ma d'altra parte era ovvio prevedere che la variabilità di composizione del cobalti-nitrito potassico non avrebbe impedito l'impiego di quest'ultimo nell'analisi volumetrica, giacchè ciò che è mutevole nel cobalti-nitrito, che si ottiene come precipitato, è soltanto la sua sfera esterna, mentre il suo potere riducente dipende esclusivamente dalla sfera interna, cioè dal complesso $[Co(NO_2)_6]$ la cui composizione non viene influenzata dalla natura e dalla quantità degli elementi che entrano nella sfera esterna a sostituire parzialmente il potassio.

I risultati sperimentali che furono da me ottenuti e che riferisco in questa Nota confermano pienamente tali previsioni. Il cobalto, sotto forma di cobalti-nitrito potassico, può essere titolato con grande esattezza mediante ossidazione con permanganato, non soltanto nelle soluzioni pure, ma anche in presenza di sodio, di magnesio, di metalli alcalino terrosi, di fosfati, di manganese, di zinco e di nichel. In presenza di quantità notevoli di ferro si ottengono risultati errati in eccesso, perchè insieme col cobalti-nitrito potassico precipita parzialmente il ferro in forma di nitrito basico. I sali di ammonio inducono un errore in difetto ed è quindi necessario eliminare tutto l'ammonio prima della precipitazione, facendo bollire la soluzione addizionata con un eccesso di nitrito sodico.

Passo ora a descrivere le condizioni che ho sperimentalmente trovate più opportune per la precipitazione quantitativa del cobalto come cobalti-nitrito potassico e per la titolazione di quest'ultimo con permanganato.

Siccome per ogni milligrammo di cobalto vengono consumati cc. 1.86 di soluzione N 10 di permanganato, si possono determinare con esattezza anche pochi milligrammi di cobalto e non è conveniente lavorare su quantità di cobalto maggiori di 30-40 milligrammi.

(1) A. ROSENHEIM, E. HUDSCHINKY, «Z. f. anorg. Chem.», 32 (1902), 86.

La soluzione del sale cobaltoso (10 cc.) a reazione neutra o debolmente acida, viene addizionata con 20 cc. di una soluzione al 50 % di nitrito sodico e 2 cc. di acido acetico glaciale; si scalda fino quasi all'ebollizione tenendo il bicchiere coperto con un vetro da orologio, poi si aggiungono a goccia a goccia 25 cc. di una soluzione di nitrato potassico al 20 % pure scaldata all'ebollizione. Il precipitato cristallino si forma in queste condizioni abbastanza lentamente, è di colore giallo aranciato e possiede una grana cristallina relativamente grossa: la precipitazione è completa dopo 3-4 ore. Il precipitato può venire filtrato comodamente alla pompa. Lo si lava con soluzione di nitrato potassico al 5 % (150-200 cc.) fino a che il filtrato non imbluisce più una soluzione di joduro potassico e salda d'amido acidificata con acido acetico.

Il precipitato dopo il lavaggio viene, mediante un getto d'acqua, staccato dal filtro e fatto cadere in una bevuta di 500 cc. Il filtro, che rimane sempre un po' giallo, viene addizionato in un piccolo bicchiere con 2-3 gr. di bicarbonato sodico e 25 cc. di acqua, poi si scalda a bagno-maria fino a soluzione completa delle tracce di cobalti-nitrito aderenti al filtro. Il liquido colorato debolmente in verde viene versato nella bevuta nella quale pure si aggiungono gr. 15-20 di bicarbonato sodico e acqua fino a portare il volume del liquido a circa 200 cc.: e infine si scalda a bagno-maria agitando di frequente il liquido finchè non sia diventato perfettamente limpido e di un verde smeraldo. Lo si raffredda fino a 40-50 gradi, poi mediante un imbuto col collo molto affilato e lungo lo si fa arrivare in una soluzione di permanganato N/10 acidificata fortemente con acido solforico al 30 %. L'estremità dell'imbuto deve restare immersa nel permanganato e quest'ultimo deve essere in tale eccesso che, ultimata l'ossidazione, il liquido deve apparire ancora fortemente violetto. Al liquido violetto viene aggiunta una soluzione titolata di solfato ferroso anch'essa fortemente acida per acido solforico, fino a decolorazione completa, poi la soluzione di permanganato fino ad incipiente colorazione rosa. Dal volume totale di soluzione N/10 di permanganato viene detratto il volume della soluzione di solfato ferroso (ridotta col calcolo a N/10); moltiplicando la differenza per il fattore 0.0005361 si ottiene il peso di cobalto contenuto nel volume di soluzione cobaltosa sottoposto all'analisi.

Nella seguente tabella sono riportati i risultati di determinazioni volumetriche di cobalto eseguite tanto su soluzioni pure di solfato di cobalto, (preparato dal cloruro di luteocobalto) quanto sopra soluzioni che oltre al cobalto contenevano ammonio, calcio, magnesio, acido fosforico, manganese, zinco, nichel.

TABELLA I.

CoSO ₄ impiegato gr.	Sol.ne N/10 di KMnO ₄ cc.	Cobalto calcolato gr.	Cobalto trovato gr.	Osservazioni
0.0685	48.87	0.0261	0.0262	Soluzioni pure di solfato di cobalto.
»	48.12	»	0.0258	
»	48.50	»	0.0260	
»	49.06	»	0.0263	
0.00685	4.85	0.0026	0.0026	
0.05364	38.24	0.0204	0.0205	
»	38.00	»	0.0204	
0.09416	67.00	0.0358	0.0359	In presenza di gr. 1 di solfato di ammonio e impiegando gr. 15 di NaNO ₂ .
0.09416	66.97	»	0.0359	
»	66.6	»	0.0357	In presenza di gr. 0.2 di CaCl ₂ .
»	67.01	»	0.0359	In presenza di gr. 1 di MgSO ₄ ·7H ₂ O.
»	66.4	»	0.0356	
»	66.8	»	0.0358	In presenza di gr. 0.2 di fosfato sodico.
»	66.3	»	0.0355	In presenza di gr. 0.2 di solfato di manganese idrato.
»	67.1	»	0.0360	In presenza di gr. 0.2 di solfato di zinco idrato.
»	66.6	»	0.0357	In presenza di gr. 0.2 di solfato di nichel idrato.
»	66.78	»	0.0358	

Chimica. — *Ulteriori ricerche sulla catalisi coi metalli del gruppo del platino* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. R. LEVI, presentata dal Socio G. BRUNI.

In una serie di precedenti lavori mi sono occupato di questa questione studiando in primo luogo i metalli del gruppo del platino, preparati con diversi metodi, a mezzo dei raggi X ⁽³⁾, cercando poi di confrontare l'azione catalitica coi risultati roentgenografici, poichè da questi ultimi è possibile risalire al grado di suddivisione del metallo.

Successivamente in uno studio ⁽⁴⁾ sulla decomposizione dell'acqua ossigenata con diversi preparati di platino puro finamente diviso sono riuscito a riportare il confronto, almeno fino a che l'incremento di superficie non supera certi limiti, fra catalisi e catalizzatore ad una semplice azione di superficie. Avevo allora già espressamente scritto: « troppi e di natura troppo diversa sono i fenomeni catalitici per poter pensare ad una generalizzazione di queste osservazioni ». Infatti in un successivo studio ⁽⁵⁾ sulla azione dei metalli del gruppo del platino nella catalisi di SO_2 ad SO_3 , osservavo che alcuni di questi, particolarmente il rodio ed assai più l'iridio, esercitano un'azione deprimente, che non può comunque essere messa in relazione con quella di superficie e che fu da me attribuita a cause chimiche e precisamente alla stabilità degli ossidi di alcuni metalli del gruppo.

Un esame specifico del comportamento degli ossidi di rodio ed iridio in atmosfera di SO_2 pura fatto da S. Pastorello ⁽⁶⁾ confermava, poi, a più forte ragione, questo mio modo di vedere individuando gli ossidi di questi metalli particolarmente stabili e fissando che la loro temperatura di decomposizione, anche in quelle condizioni, è notevolmente superiore a quella di reazione per la formazione di SO_3 .

Contemporaneamente allo studio di Pastorello, e cioè giusto un anno dopo la pubblicazione del mio lavoro sull'azione deprimente specifica dell'iridio, i signori L. Duparc, P. Wenger e Ch. Urfer ⁽⁷⁾ pubblicavano un

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della Regia Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1928.

(3) G. R. LEVI e R. HAARDT, « Rendiconti Lincei », III (6), p. 91 (1926); ibidem, III (6), p. 215 (1926).

(4) G. R. LEVI e R. HAARDT, « Gazzetta Chimica », 56, p. 424 (1926).

(5) G. R. LEVI e M. FALDINI, « Giornale di Chim. Ind. », 9, maggio 1926.

(6) « Rend. Lincei », 7 (6) 1^o, p. 754 (1928).

(7) « Helvetica Ch. Acta », XI, p. 337 (1928).

lavoro sull'azione catalitica dei metalli rodio, palladio ed iridio nell'ossidazione di NH_3 con aria e nella riduzione di N_2O ed NO con idrogeno concludendo per un'azione catalitica di natura chimica e ritrovando per l'iridio un potere accelerante notevolmente inferiore a quello degli altri metalli.

Credo che la conclusione degli autori sopra citati per il complesso dei fenomeni da essi osservati sia per lo meno troppo unilaterale e che se essi volessero portare argomenti sperimentali a sostegno di tale tesi non riuscirebbero nell'intento per tutti i casi studiati. Piuttosto ritengo che l'azione deprimente specifica dell'iridio da me osservata per una reazione diversa (che gli autori non citano e perciò presumo non conoscessero) possa, anzi debba, essere messa in parallelo coi risultati poi ottenuti da essi.

Si potrebbe, da quanto è sopra esposto, pensare che la catalisi in mezzo gassoso sia in genere una reazione di ordine più chimico di quella in mezzo liquido ma la conclusione sarebbe arrischiata. Per trovare una possibilità di confronto fra questi due tipi di reazione, che sono ugualmente di catalisi eterogenea, ho pensato di esaminare con le stesse masse usate per la catalisi di SO_2 ad SO_3 la reazione di decomposizione dell'acqua ossigenata.

I risultati di questo esame possono venire così riassunti:

Usai i preparati di platino puro e platino rispettivamente addizionato del 10 % di palladio, osmio, rutenio, iridio e rodio del precedente lavoro aventi cioè una massa di supporto formata di $\frac{2}{3}$ di farina fossile e $\frac{1}{3}$ di solfato di magnesio monoidrato. In una serie di prove preliminari si stabilì, in seguito a raccolta del gas spostato, che a 20° per 50 cc. di acqua ossigenata era utile la concentrazione di circa 1 volume e perciò fu diluita 100 volte l'acqua ossigenata concentrata del commercio: rispetto ad essa il catalizzatore usato in un primo tempo era in ogni prova di 10 pastiglie e cioè circa $\frac{1}{2}$ gr. di massa catalitica. La silice e la magnesia presenti oltre ad avere sempre la stessa azione debbono agire ben poco: si tenga anche presente che le masse dopo aver servito alla catalisi per SO_3 erano state a lungo vivificate con aria secca a 450° e perciò erano private dei gas occlusi. La non perfetta omogeneità nella distribuzione del metallo e la non eguaglianza delle dimensioni delle pastiglie, tenuto conto del piccolo numero usato in ogni operazione, diedero, in queste prove preliminari, luogo a differenze che in qualche caso raggiunsero il 20 %. Fu possibile ugualmente stabilire che il potere catalitico crescente era rappresentato da una serie del tipo:

$\text{Pt iridato} < \text{Pt rodiato} \simeq \text{Pt palladato} < \text{Pt puro} \simeq \text{Pt rutenato} < \text{Pt osmiato}$
serie quindi avente solo *alcuni* punti di confronto, e qualitativi, con quella:
 $\text{Pt iridato} < \text{Pt rodiato} < \text{Pt osmiato} < \text{Pt puro} \simeq \text{Pt rutenato} \simeq \text{Pt palladato}$
trovata nella catalisi per SO_3 .

Per avere un campione medio di catalizzatore si presero in ogni caso 10 gr. di pastiglie, pesandone, dopo fine macinazione, gr. 0.500 per ogni operazione, usando cc. 50 di acqua ossigenata a circa 1 volume (esattamente 1 litro = 1.020 volumi). Il gas veniva raccolto per spostamento ed ogni preparato fu usato tre volte per fare una media dei valori piuttosto oscillanti: la temperatura del termostato era 20°.

Pt puro: catalizzatore gr. 0.500 pari a gr. 0.00250 Pt.

tempo in minuti	cc. di ossigeno svolto			media in 15'
5	9.0	8.0	8.0	cc. 21.0
10	15.5	14.5	14.1	
15	22.0	21.2	20.0	

Pt rutenato: catalizzatore gr. 0.500 pari a gr. 0.00225 Pt e gr. 0.00025 Ru.

tempo in minuti	cc. di ossigeno svolto			media in 15'
5	11.8	11.3	13.0	cc. 24.2
10	17.8	20.2	20.8	
15	21.4	25.6	25.5	

Pt iridato: catalizzatore gr. 0.500 pari a gr. 0.00225 Pt e gr. 0.00025 Ir.

tempo in minuti	cc. di ossigeno svolto			media in 15'
5	2.8	3.0	2.4	cc. 6.8
10	4.5	5.7	4.4	
15	6.2	7.5	6.5	

Pt palladato: catalizzatore gr. 0.500 pari a gr. 0.00225 Pt e gr. 0.00025 Pd.

tempo in minuti	cc. di ossigeno svolto			media in 15'
5	8.5	8.2	8.2	cc. 15.0
10	13.1	12.0	12.5	
15	16.0	14.3	14.8	

Pt rodato: catalizzatore gr. 0.500 pari a gr. 0.00225 Pt e gr. 0.00025 Rh.

tempo in minuti	cc. di ossigeno svolto			media in 15'
5	7.5	7.2	5.5	cc. 13.5
10	12.0	11.3	9.2	
15	14.5	13.9	12.2	

Pt osmiato: catalizzatore gr. 0.500 pari a gr. 0.00225 Pt e gr. 0.00025 Os.

tempo in minuti	cc. di ossigeno svolto			media in 15'
5	18.9	20.0	19.0	cc. 40.4
10	29.0	30.2	31.0	
15	39.5	40.5	41.5	

Da questi risultati, pur dando il peso dovuto alle differenze fra le singole esperienze, risulta confermata la serie sopra data; inoltre se si confronta il platino puro con quello rutenato si nota per quest'ultimo una attività un poco maggiore, mentre dal confronto del platino palladiato con quello rodiato si conclude per una quasi identità nel comportamento dei due preparati.

Per poter mettere in forma grafica e perciò più evidente le esperienze sopra date, esse furono ripetute ancora una volta a 22° con agitazione di circa 80 giri al minuto usando per la chiusura dell'agitatore una valvola a mercurio, raccogliendo il gas in un comune azotometro e facendo le solite dovute correzioni. In ogni esperienza furono fatte sei letture di 5 in 5' quadruplicando la quantità di acqua ossigenata (200 cc.) sempre della stessa concentrazione (1 litro = 1.020 vol. di O_2).

I valori numerici ed il grafico sotto riportati si comprendono facilmente:

Tempo in minuti	cc. di ossigeno svolti					
	Pt puro	Pt rodiato	Pt iridiato	Pt rutenato	Pt palladato	Pt osmiato
5	19.4	12.5	3.9	18.5	12.5	39.5
10	35.2	22.4	7.2	32.6	21.5	75.5
15	48.7	30.3	10.6	44.6	29.4	95.0
20	59.7	37.1	13.0	54.9	36.3	111.0
25	69.6	42.8	15.7	63.6	42.6	122.5
30	79.1	48.2	17.9	71.1	48.3	132.0

Dall'esame di questi valori si deduce che l'osmio esalta profondamente il fenomeno di catalisi studiato mentre l'iridio lo deprime assai; la loro presenza ha cioè un'azione diversissima ma in entrambi i casi assai spiccata. Il rutenio non ha azione notevole e il piccolo incremento trovato in un primo tempo non è stato poi confermato. Il palladio ed il rodio, pur avendo un'azione non molto spiccata, mostrano però una chiara azione deprimente.

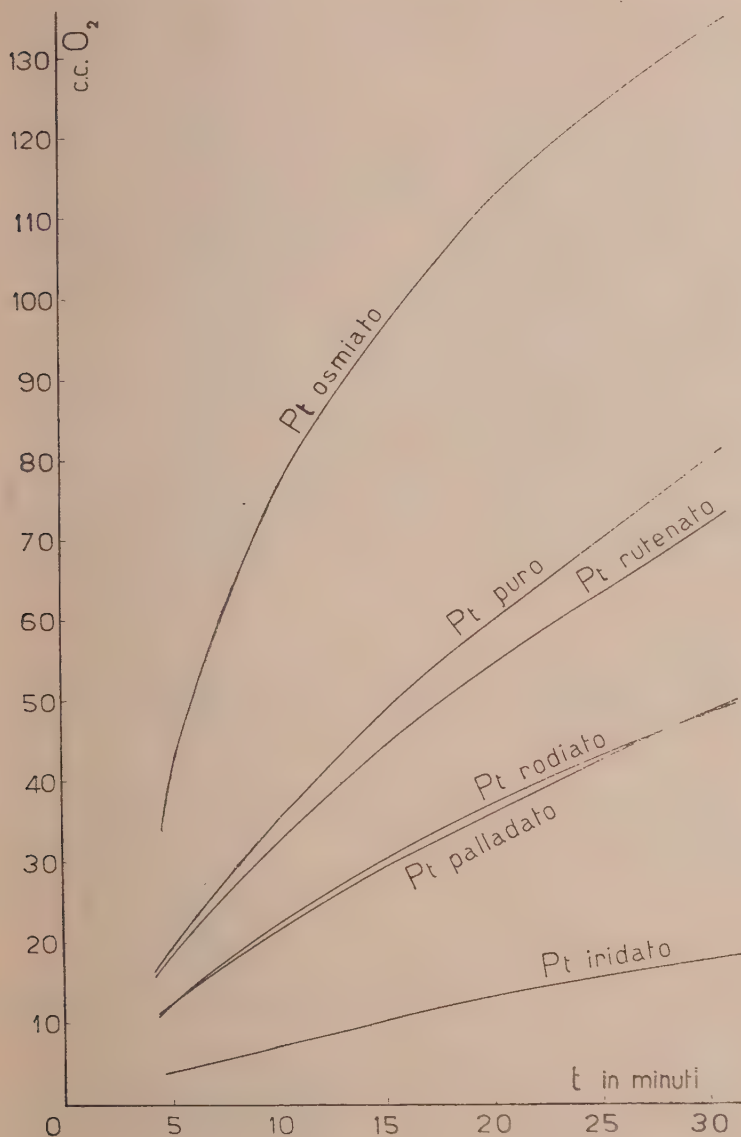
Occorre osservare che malgrado le variazioni da esperienza ad esperienza le conclusioni sotto esposte debbono considerarsi sicure.

Esse possono così venire riassunte:

a) La catalisi della decomposizione di acqua ossigenata con platino è fortemente influenzata dalla presenza di altri metalli del gruppo come già avevo notato nella formazione catalitica di SO_3 .

b) La presenza di iridio e di rodio deprime la catalisi (molto maggiormente per il primo) in modo qualitativamente, almeno, del tutto paragonabile all'azione nella formazione di SO_3 ; qui si ritrova però anche una

azione del palladio analoga al rodio il che è logico se consideriamo le diverse condizioni di esperienza; infatti mentre a 450° in presenza di SO_2



PdO si riduce, a temperatura ambiente in presenza di H_2O_2 la sua resistenza è certa e la sua formazione è inevitabile nel processo di vivificazione del catalizzatore.

c) Il rutenio ha un'azione praticamente quasi nulla; ciò può essere anche il risultato di due azioni compensanti, positiva del metallo e negativa dell'ossido: non ho però argomenti sperimentali a favore di questa tesi.

d) L'osmio ha un'azione specifica diversissima e contraria a quella esercitata nella catalisi di SO_3 ; mentre quest'ultima è solo leggermente influenzata in senso negativo, si ha, per l'acqua ossigenata, un'azione positiva spiccatissima (circa un raddoppiamento del potere catalizzante nelle condizioni sopra esposte fino a che la concentrazione di H_2O_2 non è sensibilmente diminuita).

e) Dal complesso delle conclusioni elencate da a) a d) e da quanto è stato esposto nei miei precedenti lavori risulta che i fattori fisico o di superficie e chimico o di formazione di composti debbono essere sempre presi contemporaneamente in esame non dovendosi *a priori* parlare di una sola di queste azioni. Questo modo di vedere si accorda con le conclusioni recenti di Bredig e Allolio («Zeit. Phys. Chem.», 126, 41 [1927]). In alcuni casi, quando una delle due azioni è assai piccola, può essere grossolanamente lecito parlare di azione chimica o fisica. Vera azione sostanzialmente fisica si ha nei fenomeni di assorbimento e così l'azione del platino puro da me studiata in funzione della superficie può essere confrontata, anche come ordine di grandezza nei valori numerici, con quella trovata proprio ora da U. Hofmann («Berichte», 61, 2183 [1928]) per i carboni attivati.

Chimica-fisica. — *I livelli di Röntgen delle terre rare, e le deviazioni dalla legge di Moseley.* Nota⁽¹⁾ di G. PICCARDI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

La dipendenza dei valori dell'energia dei vari livelli ed il numero atomico è espressa, com'è noto dalla legge di Moseley, che si può rappresentare così:

$$\frac{\nu}{R} = \frac{1}{n^2} (N - \sigma)^2 \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\frac{\nu}{R}} = \frac{N - \sigma}{n}$$

dove N è il numero atomico e $\frac{\nu}{R}$ è la frequenza, cioè il numero d'onde espresso in multipli del numero di Rydberg.

La prima formula rappresenta una parabola, la seconda una retta.

In pratica, nessuno dei livelli segue esattamente la legge di Moseley e l'andamento di $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$ dato dai valori sperimentali è simile a quello di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1928.

una curva ondulata per i livelli K ed L o simile addirittura a quello di una spezzata per i livelli M, N, ed O.

V. Dolejšek⁽¹⁾, ponendo:

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = a + bN + cN^2 + dN^3$$

cioè eguagliando $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$ non ad una funzione lineare del numero atomico, ma ad una funzione di grado superiore, ha studiato come devino varie linee della serie L da questa legge empirica ed ha ottenuto una legge pressochè periodica.

Ma nei livelli superiori ad L è assolutamente impossibile stabilire una legge empirica approssimativa alla quale riferire le curve sperimentali. Per osservare le variazioni delle curve dei livelli ho pensato allora di riferire l'andamento delle curve stesse a qualche tratto singolare di esse.

Poichè risulta che tutti i livelli nel gruppo degli elementi delle terre rare presentano un andamento esattamente rettilineo (nei limiti degli errori sperimentali), a differenza degli altri gruppi di elementi, e pensando d'altra parte che questi elementi formano un gruppo unico, che non trova riscontro in alcuna altra parte del sistema periodico e quindi, per questa loro singolarità, possono servire perfettamente come gruppo di base, ho riferito l'andamento delle curve dei livelli alle rispettive rette individuate dal gruppo

delle terre rare: ho cioè tracciato nel diagramma $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$, N tutte le rette passanti per i gruppi delle terre rare ed ho misurato, per ciascun elemento, di quanto i punti rappresentanti i valori dei vari livelli si scostano dalle rispettive rette.

I risultati di questo studio, pel quale ho utilizzato i dati recentemente riportati da A. E. Lindh⁽²⁾ in un suo lavoro di insieme, sono riuniti nel grafico qui unito (fig. 1), che porta in ascisse il numero atomico ed in ordinate le deviazioni Δ .

La retta di ogni livello è rappresentata dalla retta O. Le deviazioni sono riportate in senso positivo od in senso negativo a seconda che i punti rappresentanti i valori sperimentali si trovavano sopra o sotto la retta. Naturalmente, avendo espresso i valori dei livelli in $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$, anche le deviazioni Δ sono espresse in $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$.

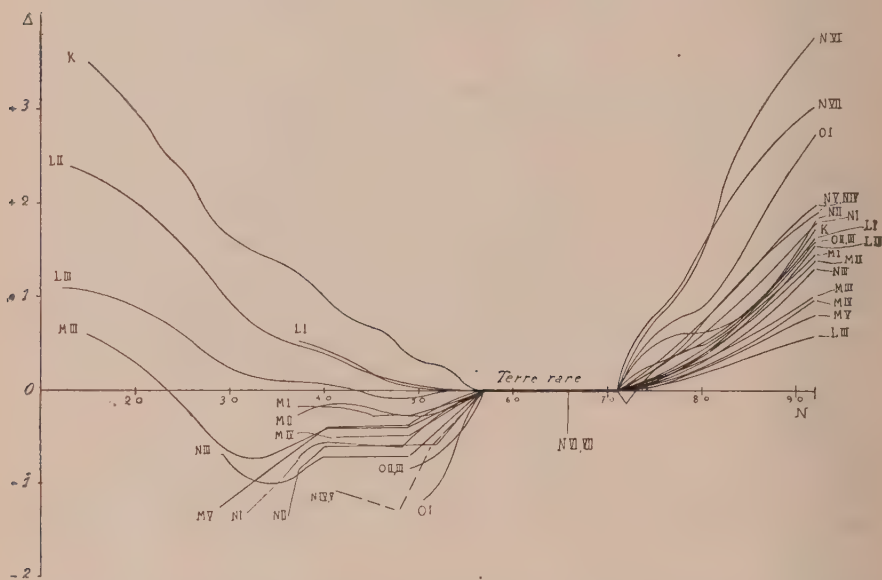
(1) V. DOLEJŠEK, « Zeitschr. f. Phys. », 46, 132 (1927).

(2) A. E. LINDH, « Phys. Zeitschr. », 28, 24, 93 (1927).

Dall'esame del grafico risulta un fatto molto notevole e cioè che, avanti il gruppo delle terre rare, le curve rappresentanti le deviazioni dei livelli (che si trovano nel campo positivo nel caso dei livelli K ed L ed in quello negativo nel caso dei livelli M, N ed O) si abbassano regolarmente passando dal livello K, a L I, a L II, a L III ecc. fino ai livelli O.

Dopo il gruppo delle terre rare, tutti i livelli, senza eccezione, deviano in senso positivo ed in un modo, che a prima vista sembra del tutto irregolare.

Esaminando più attentamente, si osserva che si ha invece sovrapposizione ordinata delle curve corrispondenti ai livelli K, L ed M, e che per



ogni gruppo di livelli si ha un progressivo abbassamento delle relative curve passando da L I a L III e da M I a M V.

Per i livelli N si ha abbassamento regolare passando da N I a N III; ma i livelli N IV e N V saltano al disopra di N I e quelli N VI e N VII al disopra di N IV, V; N VI si conserva da un certo punto in poi superiore ad N VII.

I livelli O discendono ordinatamente passando da O I a O II, III.

Questo comportamento dei livelli dimostra che se in qualche caso (per es. per qualche livello L) si può confrontare in modo approssimativo la curva sperimentale con una curva arbitraria, come quella usata dal Dolejšek, ciò non è in generale possibile, perchè bisognerebbe sostituire, ad un certo punto, senza una chiara ragione teorica, ad una curva con la concavità rivolta verso l'alto, una curva a flessi.

VALORI DEI LIVELLI D'ENERGIA DEGLI ELEMENTI DELLE TERRE RARE ⁽¹⁾.

Livelli.

N	El.	K	L I	L II	L III	M I	M II	M III	M IV	M V
57	La	—	21.51	20.83	20.10	10.03	9.48	9.16	7.93	7.85
58	Ce	54.52	21.51	21.98	20.54	10.30	9.72	9.38	8.16	8.08
59	Pr	55.62	22.45	21.79	20.96	10.56	9.96	9.61	8.38	8.30
60	Nd	56.69	22.93	22.26	21.39	10.79	10.23	9.83	8.61	8.53
61	Fr	—	—	—	—	—	—	—	—	—
62	Sm	58.80	23.79	23.21	22.25	11.28	10.71	10.28	9.05	8.93
63	Eu	59.86	24.38	23.69	22.68	11.53	10.96	10.50	9.27	9.15
64	Gd	60.93	24.86	24.18	23.10	11.79	11.20	10.72	9.48	9.36
65	Tb	—	25.35	24.66	23.53	12.04	11.44	10.93	9.70	9.57
66	Dy	63.03	25.84	25.15	23.96	12.29	11.70	11.16	9.92	9.79
67	Ho	64.16	26.33	25.63	24.38	12.53	11.94	11.37	10.13	9.99
68	Er	—	26.70	26.15	24.82	12.79	12.20	11.60	10.35	10.20
69	Tu	—	27.33	26.62	25.24	13.05	12.47	11.84	10.57	10.41
70	Yb	—	27.83	27.12	25.67	13.30	12.73	12.07	10.79	10.62
71	Cp	—	28.33	27.62	26.10	13.56	12.98	12.28	10.99	10.82

N	El.	N I	N II	N III	N IV	N V	N VI	N VII	O I	O II	O III
57	La	4.53	4.06	3.94	2.79	2.79	—	—	1.73	1.52	—
58	Ce	4.66	4.17	4.02	2.90	2.92	—	—	1.79	1.58	—
59	Pr	4.76	4.27	4.11	2.98	2.95	—	—	1.76	1.52	—
60	Nd	4.87	4.38	4.22	3.03	3.03	—	—	1.76	1.64	—
61	Fr	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
62	Sm	5.09	4.57	4.41	3.16	3.13	—	—	1.76	1.67	—
63	Eu	5.22	4.75	4.51	3.27	3.23	—	—	1.89	1.70	—
64	Gd	5.35	4.79	4.58	3.31	3.29	—	—	2.00	1.82	—
65	Tb	5.42	4.93	4.69	3.38	3.33	—	—	1.87	1.61	—
66	Dy	5.57	5.11	4.82	3.49	3.40	0.89	—	1.76	1.79	—
67	Ho	5.64	5.19	4.88	3.58	3.46	0.89	0.45	—	1.64	—
68	Er	5.75	5.33	4.99	3.70	3.55	0.95	0.55	1.97	1.97	—
69	Tu	5.86	5.47	5.16	3.80	3.63	0.95	0.63	—	1.94	—
70	Yb	6.02	5.56	5.24	3.86	3.77	0.95	0.83	—	1.89	—
71	Cp	6.07	5.70	5.36	4.01	3.84	1.00	0.77	2.05	2.00	—

(1) Espressi come $\sqrt{\frac{v}{R}}$.

Altro fatto notevole è che le deviazioni per i vari livelli sono tutte dello stesso ordine di grandezza.

Così se in senso relativo, il livello K segue meglio degli altri la legge di Moseley o comunque una legge lineare, perchè le deviazioni che si notano sono piccole in confronto al valore assoluto dei livelli, in senso assoluto si distacca più degli altri dall'andamento rettilineo.

Considerando solo l'entità delle deviazioni, il livello che più si avvicina all'andamento rettilineo è L III.

Le curve dei vari livelli si inflettono o presentano dei bruschi cambiamenti di direzione, generalmente in corrispondenza degli stessi elementi.

Questi cambiamenti di direzione si osservano per tutti i livelli nel tratto precedente le terre rare; nel tratto seguente i livelli K, L ed M seguono delle curve regolarmente ascendenti mentre i livelli N ed O cominciano ad accennare dei flessi.

I flessi delle varie curve, nel tratto precedente le terre rare sono sempre più evidenti passando dal livello K ai livelli O; si osserva così un principio di periodicità che si accentua sempre più passando dai livelli più interni a quelli più esterni.

Non si può peraltro dire che questa periodicità coincida con quella del sistema degli elementi, se si fa astrazione dell'aspetto singolare presentato dal gruppo delle terre rare.

Del resto il fatto che le terre rare formino un gruppo particolarissimo diverso da tutti gli altri gruppi di elementi è conforme perfettamente alla costruzione generale del sistema degli elementi in cui le terre rare, non ammettendo omologhi in alcuna altra parte del sistema, interrompono la periodicità, formando, come generalmente si dice, una « pausa » nella periodicità stessa.

L'andamento rettilineo che tutti i livelli presentano in corrispondenza delle terre rare indica che, per una speciale costituzione degli atomi di questi elementi, è valida esattamente una legge del tipo di quella di Moseley.

Zoologia. — *Intorno all'epoca di riproduzione dei delfini.* Nota di G. BRUNELLI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Termoliosi e dissociazione coloristica.* Nota di C. GORINI, presentata dal Socio P. R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche ponderali ed istofisiologiche su cavia e conigli sottoposti ad iniezioni di miscele lipoidi.* Nota riassuntiva di A. BARCHIESI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Ho eseguito per consiglio del prof. Baglioni e del prof. Serono, esperienze che brevemente riassumo ⁽¹⁾ per portare un contributo alla conoscenza del meccanismo d'azione dei lipoidi ⁽²⁾.

Ho iniettato innanzi tutto in un gruppo di cavia, per 15 giorni, complessivamente gr. 1.5 di lecitina, gr. 0.6 di luteina e di eteri di colesterina, in siero fisiologico gr. 37.5 ⁽³⁾, osservando, negli esemplari iniettati, un aumento di peso più rapido rispetto ad esemplari della stessa età, tenuti come controllo ed alimentati come i precedenti, ma non sottoposti ad iniezioni. L'osservazione dell'andamento ponderale ha fatto sorgere l'ipotesi che sotto l'influenza della miscela lipodea iniettata è stato modificato il metabolismo e che, per non citare che alcune delle interpretazioni possibili per spiegare il fenomeno, sono state ritardate le attività cataboliche o più probabilmente accresciute le attività anaboliche; ipotesi quest'ultima

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1928.

(2) Ricerche eseguite nei Laboratori dell'Istituto Nazionale Medico Farmacologico.

(3) BARCHIESI A., *Esperienze su l'azione dei lipoidi, ecc.* Comunicazione preventiva. « Boll. della Soc. It. di Biol. Sperim. » fasc. VIII, vol. III, 1928; *Esperienze su l'azione dei lipoidi.* — Nota I. *Ricerche ponderali e citometriche su cavia sottoposte ad iniezioni di lecitina e di eteri di colesterina.* « La Rassegna di Clinica, Terapia e Scienze Affini », anno XXVII, fasc. IV, 1928.

(4) Le preparazioni suddette sono state fatte dall'Istituto Nazionale Medico Farmacologico Serono e sono quelle che servono per la fabbricazione della Bioplastina.

avvalorata dal fatto che messi a digiuno degli esemplari, si vide che la morte sopravveniva quando si raggiungeva una perdita ponderale percentuale del 30 ° circa, raggiunta in giorni 5.33, in media, dagli individui lecitinati, in giorni 7.66 dagli esemplari di controllo, tenuti semplicemente a digiuno.

Esaminando gli organi le sostanze iniettate hanno rivelato un meccanismo molto complesso. Per il peso, facendo eguale a 100 il peso degli organi degli esemplari normali di controllo, ho trovato negli individui iniettati la seguente riduzione (—) od aumento (+) percentuale: fegato — 18.62 °, testicoli ÷ 5.51 °, reni + 6.21 °, stomaco — 2.12 °, polmoni — 5.63 °, cuore + 0.37 °, pancreas + 0.76 °, milza + 1.06 °, cervello + 4.15 °, ghiandole surrenali + 21.50 °.

Aumentano cioè in peso i reni, i testicoli, la milza, il cervello e in special modo le ghiandole surrenali, diminuisce soprattutto il fegato. L'esame citometrico rende pure manifesta la riduzione delle cellule epatiche le quali, da un volume di 12.000 micron³ in media, come ho trovato negli individui normali, scendono a 4772 micron³ negli esemplari normali lecitinati. Per le ghiandole surrenali ho trovato i seguenti valori: le cellule corticali e midollari assumono rispettivamente un volume di micron³ 2555 e di micron³ 2913 negli individui normali di controllo, nei lecitinati di micron³ 4616 e micron³ 5117. Negli altri organi ho trovato pure variazioni tali che mi hanno fatto pensare ad una modificazione di tutto il ricambio: degli idrati di carbonio, proteine, lipoidi, grassi. Per quanto riguarda questi ultimi Cruto ⁽¹⁾ ha chimicamente convalidato l'ipotesi con ricerche eseguite sulle stesse cavie su cui avevo sperimentato.

Ho ripreso gli studi sui conigli ⁽²⁾ che più delle cavie si prestano, data la maggior mole degli organi, per unire ad analisi istologiche analisi chimiche, riunendo gli esemplari in quattro gruppi: un primo gruppo comprende animali tenuti come controllo, gli altri gruppi esemplari lecitinati a dose crescente. In questi ultimi ho eseguito 31 iniezioni in 54 giorni consecutivi. In complesso agli individui lecitinati di un 1° lotto vennero iniettati: gr. 1.24 di lecitina, gr. 0.496 di luteina ed eteri di colesterina in siero fisiologico gr. 31; agli esemplari di un 2° gruppo gr. 6.200 di lecitina, gr. 2.480 di luteina ed eteri di colesterina, in gr. 77.5 di siero fisiologico; agli individui del 3° gruppo gr. 12.400 di lecitina, gr. 4.960 di luteina ed eteri di colesterina, in siero fisiologico gr. 155.

(1) CRUTO A., *Sull'azione della lecitina nel metabolismo dei grassi*. «Rassegna di Clinica, Terapia e Scienze Affini», anno XXVII, fasc. V, 1928.

(2) BANCHESI A., *Modificazione istofisiologiche della tiroide ai conigli lecitinati*. «Boll. Soc. It. di Biol. Sper.», fasc. XI, vol. III, 1928; *Ricerche citometriche sulle ghiandole surrenali di conigli lecitinati*. «Boll. Soc. It. di Biol. Sper.», fasc. XI, vol. III, 1928; *Modificazioni istologiche e fisiologiche del fegato ai conigli lecitinati*. «Boll. Soc. It. di Biol. Sper.», fasc. XI, vol. III, 1928; *Esperienze su l'azione dei lipoidi*. Nota II ecc. «La Rassegna di Clinica, Terapia e Scienze Affini», anno XXVII, fasc. V, 1928.

Riporto nella presente nota le osservazioni eseguite sulla tiroide, sulle ghiandole surrenali e sul fegato.

Negli esemplari normali, di controllo, le vescicole tiroidee presentano un diametro di 38-32 micron, 64-28 micron; assai di rado assumono valori più elevati. In due casi ho trovato diametri di 80-100 micron. Le cellule, specie nelle vescicole piccole, hanno spesso la parete interna, rivolta verso la cavità vescicolare, così poco netta, che non è sempre facile distinguere la sostanza colloide, assai vacuolizzata e chiara alla periferia, più omogenea verso l'interno delle vescicole. Gli elementi cellulari presentano un aspetto variabilissimo; in vescicole piccole ho trovato un'altezza di 10-14 micron, una larghezza di 8-10 micron; nelle grandi vescicole hanno un aspetto più uniforme, e assai spesso si presentano regolarmente cubiche.

Negli esemplari del gruppo 2° (lecitinati) le vescicole assumono, come nei precedenti, dimensioni varie; sono più numerose le vescicole grosse, che si rinvenivano pure con facilità nelle tiroidi degli individui del gruppo 3°.

I conigli del gruppo IV, ai quali è stata iniettata la maggior quantità di lipoidi, presentano vescicole di dimensioni variabilissime: accanto a quelle di 20-24 micron di diametro se ne trovano di 100-45 micron, 130-70 micron ecc. Sia nelle grandi che nelle piccole, l'aspetto degli elementi cellulari dà spesso l'impressione che si vada formando attivamente la sostanza colloide, assai vacuolizzata alla periferia e non sempre nettamente distinta dalle cellule ghiandolari; tale deduzione risulta nettamente confrontando le presenti tiroidi con quelle d'esemplari a digiuno e ibernanti ⁽¹⁾.

In conclusione dalle presenti ricerche risulta che la tiroide è influenzata in modo notevole dalla miscela impiegata; eccitata in modo blando negli individui ai quali è stata somministrata minor quantità di lipoidi, aumenta di attività quando la dose iniettata è più forte.

Tale reperto concorderebbe perfettamente con un'osservazione comunicatami dal prof. Serono, che nei basedowiani cioè la miscela di lipoidi impiegata per le presenti ricerche accentua i fenomeni morbosi; per l'introduzione di tali sostanze si avrebbe la formazione di maggior quantità di colloide donde l'accentuarsi del processo. L'andamento ponderale degli esemplari esaminati concorderebbe pure col fatto, riscontrato da Levi e Rothschild, Marañon, Falta, Pende, Janney ecc., che mentre una piccola quantità di sostanza tiroidea può essere seguita da aumento di peso, forti dosi producono dimagrimento: così nei conigli esaminati, ad una modica eccitazione della tiroide segue aumento di peso, mentre se l'eccitamento è maggiore si riscontra il contrario.

(1) BARCHIESI A., *Ricerche istologiche sulla tiroide di Emys oricularis L. tenute a digiuno fino a 26 mesi*. « Boll. della Soc. Ital. di Biol. Sper. », fasc. VIII, 1928; *Ricerche su l'influenza delle variazioni di temperatura in alcuni organi di eterotermi*. « Rend. R. Acc. dei Lincei » (in corso di pubblicazione).

Per quanto concerne le ghiandole surrenali le cellule corticali presentano dimensioni diverse nelle varie zone; in media l'altezza complessiva è, negli esemplari normali, tenuti come controllo, di 13-15 micron, la larghezza di 9.4-10.4 micron, il volume di 1373 micron³. Le cellule cromaffini sono alte 22-23 micron, larghe 10-13 micron, e presentano un volume di 2867 micron³.

Negli esemplari lecitinati riscontro sempre un aumento volumetrico delle cellule: così nel primo gruppo di individui, ai quali è stata iniettata minor quantità di sostanza, il volume medio delle cellule corticali è di 3236 micron³, delle cromaffini di 4292 micron³; nel secondo gruppo, sottoposto ad iniezioni di maggior quantità di lipoidi, le cellule corticali e le midollari assumono rispettivamente un volume di 2106 micron³ e di 3456 micron³; nel terzo lotto di esemplari a cui la quantità di sostanza iniettata è stata ancora maggiore, gli elementi corticali presentano una media volumetrica di 2050 micron³, le cellule cromaffini di 2400 micron³.

Tali reperti convalidano dunque le osservazioni già eseguite nelle cavia e dimostrano come l'attività degli organi si modifica notevolmente in seguito all'iniezione della miscela impiegata. Negli organi normalmente ricchi in lecitina questa si accresce, come anche ha osservato il Novi, il quale riscontro in cani lecitinati, nel cervello, un aumento di lecitina del 13% rispetto a cani normali, di controllo.

Per quanto riguarda il fegato anche nei conigli ho trovato una netta riduzione di volume degli elementi degli individui lecitinati rispetto a quelli degli esemplari tenuti come controllo; in questi ultimi il volume medio è di 13.652 micron³, nei lecitinati di rado sorpassa i 4000 micron³. Aumentano di volume le cellule di Kupfer, come ha osservato anche Mannelli, ⁽¹⁾ recentemente, che si caricano, con altri elementi di sostanze lipoidee.

Eseguito la ricerca del glicogeno col metodo Vastarini-Cresi, ho trovato una diminuzione tale dell'idrato di carbonio negli esemplari lecitinati che credetti opportuno ripetere la colorazione per timore che non fosse riuscita; ma sempre ebbi lo stesso fatto e il fenomeno è stato controllato all'analisi chimica del Cruto ⁽²⁾.

Negli esemplari lecitinati si ha sempre una riduzione della quantità di glicogeno, che in alcuni individui è del 90% circa.

In sostanza, dalle ricerche eseguite sulle cavia e sui conigli, risulta che la miscela lipodea iniettata non ha lasciato indifferente nessuno degli organi

(1) MANNELLI M., *La importanza del sistema reticolo endoteliale nel riassorbimento dei lipoidi*. «La Rassegna di Clinica, Terapia e Scienze Affini», anno XXV, fasc. VI, 1926; *Sulla distribuzione dei lipoidi nell'organismo somministrati sperimentalmente durante l'infezione tubercolare e relative deduzioni terapeutiche*. «Rinnovamento Medico», anno VI (XXXVI) n. 15, 15 agosto 1918.

(2) CRUTO A., *Sull'azione della lecitina sul glicogeno*. «Rivista di Clinica, Terapia e Scienze Affini», anno XXVII, fasc. VI, 1928.

e dei tessuti studiati e che da quella è stato modificato tutto il ricambio organico, come aveva intraveduto fin dalle sue esperienze del 1897 il Serono ⁽¹⁾, che primo iniettò miscele lipoidee nell'uomo.

È possibile a questo punto trarre delle conclusioni sul meccanismo d'azione dei lipoidi? Io credo che tali sostanze, come ammette il Serono, rappresentino, forse per la loro speciale natura chimica, specie di catalizzatori, catalizzatori biologici, che provocano molteplici e complesse reazioni.

Biologia. — *Sulla natura biofisica della erosione foveolare delle arenarie nella costa Tirrena.* Nota di G. BRUNELLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

I fenomeni di erosione marina delle arenarie presso Capo Linaro sono stati già fatti conoscere dall'Almagià ⁽³⁾.

Egli ha descritto in tali banchi di arenarie solcati da numerose clasi, nicchie od alveoli di forma elissoidale, altri più grandi di forma rettangolare: l'A. riferisce tali fenomeni di erosione all'azione meccanica e chimica delle acque dilavanti la superficie delle rocce. Si ripromette ulteriori indagini e rileva la somiglianza dei fenomeni sovraccennati con quelli rilevati da Marinelli a Sassoscritto.

Era già noto che nelle arenarie si osserva sovente un disfacimento reticolare, con piccole celle irregolari, contigue, ricordanti quelle d'un vespaio, dette perciò da Ratzel - erosione a favo -, e che sono dovute a irregolarità e ineguaglianze nella struttura e composizione della roccia, e, come dice il Rovereto, poste in risalto dalla disaggregazione.

Di queste erosioni Dainelli e Marinelli ⁽⁴⁾ hanno data una precisa descrizione, riferendosi a quelle che si osservano lungo le coste tra Livorno e Castiglioncello, presso la Torre di Calafuria. Essi le chiamano - sculture alveolari - e corrispondono perfettamente al caso sopra descritto. Difatti, dice il Rovereto, una scultura si osserva ovunque scende sino al mare, lungo la costa Ligure, l'arenaria macigno, e più specialmente a S. Remo, e tra Spezia e Sestri Levante; non si osserva invece lontana dal mare, dove è sostituita da nicchie e da altre incisioni più vistose.

(1) C. SERONO, *Sulle iniezioni di lecitina nell'uomo e negli animali.* Nota preventiva. Comunicazione fatta alla R. Accademia di Medicina di Torino nella seduta del 23 aprile 1897; *Ricerche sulle iniezioni di lecitina.* «La Riforma Medica», anno XIII, 1897.

(2) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(3) R. ALMAGIÀ, *Fenomeni di erosione presso Capo Linaro*, «Atti Soc. It. per il Progr. delle Scienze», convegno di Trieste, X riunione, 1921.

(4) G. DAINELLI e O. MARINELLI, *Strutture alveolari nelle arenarie e in altre rocce*, «Mem. Geografiche», n. 32, 1916.

Proseguendo le osservazioni dell'Alinagà a Capo Linaro, io ho fatto questa osservazione: le prime perforazioni dell'arenaria avvengono per opera dei piccoli gusci delle Littorine, *Littorina punctata* Gm e *Littorina neritoides* L, che, evidentemente, perforano la roccia nei punti di minore resistenza. In un secondo tempo entrano forse in scena le *Monodonta*.

Sussequentemente il flagellare delle onde opera un ulteriore disfacciamento della roccia nelle perforazioni iniziate dai molluschi, cosicchè si avrebbe una forma di degradazione mista, biofisica.

In certi casi anche le Patelle sembrano contribuire a questo fenomeno: a Parenzo infatti nelle rocce calcaree vi sono erosioni prodotte dall'azione biochimica delle Patelle combinata con quella degli spruzzi delle onde.

L'Andrée — nella sua: « *Geologie des Meeres Bodens* », Leipzig, Borntraeger, ed. 1920 — fa giustamente notare che nei fenomeni di erosione litorale marina con le forze inorganiche coopera l'azione degli organismi, e nota anche giustamente, che si richiedono però sistematiche osservazioni lungo tutte le coste, per giungere a delle conclusioni generali.

È notevole che nelle piccole cavità prodotte dalla disgregazione della roccia permane l'acqua nella bassa marea, e le piccole raccolte d'acqua restano come centri di piccole associazioni biologiche. La biologia neritica, come da noi ha dimostrato Raffaele Jssel, è ancora nel campo pieno di attrazioni.

È anche molto interessante notare come le condizioni della vita litoranea si svolgono con uno stretto rapporto tra i fattori fisici e biologici.

Fisiologia. — *Sulla natura dell'azione biologica degli alcali.* Memoria di M. MITOLO, presentata dal Socio S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Embriologia. — *Rapporti tra processi organogenetici ed istogenetici. (Ricerche di morfologia sperimentale nei Cefalopodi)*⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di S. RANZI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Lo studio delle correlazioni che si osservano nel corso dello sviluppo si mostra, al giorno d'oggi, sempre più fecondo di risultati ed, anche con lo scopo di indagare queste correlazioni, ho da tempo intrapreso ricerche sui processi di inibizione differenziale che, per azione di cloruro di litio ed altri agenti, ho potuto determinare nello sviluppo di alcuni Cefalopodi: *Loligo vulgaris* Lam., *Sepia officinalis* L., *Sepioida inornata* L.⁽³⁾. In base a queste ricerche ho potuto vedere parecchi rapporti di dipendenza, tra lo sviluppo delle diverse parti degli embrioni dei Cefalopodi, rapporti sui quali altrove avrò ampia occasione di insistere. In questa Nota voglio invece limitarmi all'esposizione di taluni fatti concernenti i rapporti che intercorrono tra processi organogenetici⁽⁴⁾ ed istogenetici.

Se prendiamo ad esaminare i fenomeni inibitori, che si osservano nell'occhio, vediamo che il processo di formazione della fossetta oculare e di chiusura della medesima, che come è noto si forma nei Cefalopodi a spese dell'ectoderma che riveste il corpo, può arrestarsi in diverso periodo dello sviluppo, può cioè o formarsi una fossetta, che resta in comunicazione più o meno larga con l'esterno, ovvero può la piastra oculare restare come un ispessimento ectodermico, più o meno, piegato sui margini. Altre volte invece osserviamo che, a questa mancata chiusura, si associano malformazioni per cui le pareti della vescicola ottica si presentano spiegazzate ovvero la fossetta appare come una introflessione irregolare a lume più o meno stretto e tutto l'organo può anche essere notevolmente ridotto in dimensioni.

Nell'occhio in queste condizioni le pareti possono acquistare lo spessore normale della retina, ed, anche quando la piastra non si è affatto piegata, può osservarsi una normale formazione di pigmento, tanto che spesso si forma pigmento fin nell'occhio impari dei ciclopi con forti inibizioni⁽⁵⁾.

(1) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1928.

(3) RANZI S., *Ricerche di morfologia sperimentale nei Cefalopodi*, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », vol. I, 1926: *Inibizione differenziale nello sviluppo nei Cefalopodi e considerazioni sul così detto gradiente assiale*, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei » (Cl. Sc. fis. mat. e nat.), S. 6^a, vol. VI, 1927.

(4) Uso il termine di processi organogenetici in senso stretto indicando con esso solo la genesi della forma degli organi, non la loro istogenesi.

(5) RANZI, 1927, op. cit.

interessa. Le immagini di pigmenti nelle cellule i quali, in seguito al trattamento immunologico dei tessuti, non formano delle immagini dell'azione.

[illegible]

Contra al Mito del Cero e Contra al Cero por medio de la Intervención Social
 y Socialmente Intervención Social

Die meisten, wenn nicht alle, der hier aufgeführten Autoren haben sich in der Vergangenheit mit der Frage beschäftigt, wie man die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft zu verstehen und zu erklären vermag. Die meisten von ihnen haben sich dabei auf die Analyse der sozialen Strukturen und der Machtverhältnisse konzentriert, die in der Gesellschaft existieren. Sie haben versucht, die Ursachen der sozialen Ungleichheit und der Ausbeutung zu finden und zu erklären. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Klasse und der Klassekämpfe betont. Sie haben versucht, die Entwicklung der Gesellschaft als einen Prozess zu verstehen, der von den Interessen und den Kämpfen der verschiedenen sozialen Klassen bestimmt wird. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Arbeiterklasse betont, die sie als die treibende Kraft der gesellschaftlichen Entwicklung gesehen haben. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Revolution betont, die sie als die einzige Möglichkeit gesehen haben, die soziale Ungleichheit und die Ausbeutung zu beseitigen und eine gerechtere Gesellschaft zu schaffen. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Partei betont, die sie als die einzige Organisation gesehen haben, die in der Lage ist, die Interessen der Arbeiterklasse zu vertreten und die Revolution zu führen. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Diktatur der Proleten betont, die sie als die einzige Möglichkeit gesehen haben, die soziale Ungleichheit und die Ausbeutung zu beseitigen und eine gerechtere Gesellschaft zu schaffen. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Sozialistischen Revolution betont, die sie als die einzige Möglichkeit gesehen haben, die soziale Ungleichheit und die Ausbeutung zu beseitigen und eine gerechtere Gesellschaft zu schaffen. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Sozialistischen Partei betont, die sie als die einzige Organisation gesehen haben, die in der Lage ist, die Interessen der Arbeiterklasse zu vertreten und die Sozialistische Revolution zu führen. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Sozialistischen Diktatur betont, die sie als die einzige Möglichkeit gesehen haben, die soziale Ungleichheit und die Ausbeutung zu beseitigen und eine gerechtere Gesellschaft zu schaffen. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Sozialistischen Revolution betont, die sie als die einzige Möglichkeit gesehen haben, die soziale Ungleichheit und die Ausbeutung zu beseitigen und eine gerechtere Gesellschaft zu schaffen. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Sozialistischen Partei betont, die sie als die einzige Organisation gesehen haben, die in der Lage ist, die Interessen der Arbeiterklasse zu vertreten und die Sozialistische Revolution zu führen. Die meisten von ihnen haben dabei die Rolle der Sozialistischen Diktatur betont, die sie als die einzige Möglichkeit gesehen haben, die soziale Ungleichheit und die Ausbeutung zu beseitigen und eine gerechtere Gesellschaft zu schaffen.

Il Leggero di quel tempo è così di colore rosso porpora, con perle di vetro, turchese, corallo, e altri gioielli, e di stoffa di seta.

sviluppata, della quale le diverse parti non sono necessariamente tutte collegate in comunicazione con l'esterno per mezzo del condotto di Müller e si conserva un tratto di sviluppo più o meno regolare ed indipendente per la parte interna con l'esterno, avendo però la parte, da cui essa trae origine, nel futuro esteso e conservarsi come un esperimento straordinario. In quest'ultimo caso evidentemente si conserva un lato di grande sviluppo le cellule della parte più caudale della piastra — quella a opera della quale si forma il condotto di Müller, poiché la chiusura della cistivola precede dell'estrema caudale verso la caudale — ad un certo momento dello sviluppo, divengono cellule, affuso ed vengono aperte in tutto e per tutto come alle cellule che nell'embrione normale, formano le pareti del condotto di Müller, mentre, non solo il condotto di Müller non si forma, ma si trova guasti non è nemmeno fissi. In altre sono due piastre in queste condizioni si presentano con un aspetto simile a quella che forma nell'embrione della stessa specie, la quale caudale delle pareti della cistivola. Come si vede, quindi, si afferma essere *indipendente dalla caudale del condotti di Müller l'impulso di sviluppo, non solo della formazione di condotti, ma anche della stessa formazione della caudale*.

Casi analoghi di infrazione si osservano pure nella ghiandola del gusci, che può presentarsi notevolmente malformato, come a la comunicazione con l'esterno. In tutti questi casi può sempre osservarsi l'eccezione del primo sviluppo di guasto, in quello che è più lentamente anche nel caso in cui la ghiandola si presenta normale, il tipo delle parti che dovrebbe costruire il suo fondo e che attualmente è all'incirca della estrusione si osservi la sezione del primo sviluppo del gusci. Lo sviluppo di questo il gusci è quindi indipendente del normale sviluppo e della chiusura della ghiandola del gusci.

I gusci possono presentarsi notevolmente alterati in tutto o in parte, di sviluppo corrispondenti a quelli di embrioni del gusci. In questi gusci molto più però si differenzialmente sviluppo normale come nei controlli. Condizione molto interessante è offerta dai nostri esperimenti e nei quali un lato si presenta normalmente sviluppato e l'altro è una media normale dello sviluppo. Nel gusci di questo lato si differenzialmente sviluppo procede come nei gusci dell'altro. Il fatto è in tutto evidente, nel gusci unico, che, nel lato meno sviluppato, è rappresentato da una linea e senza forma, che può essere l'occhio, portandosi dal gusci caudale fino quasi alla caudale caudale, nel lato normale, è presente più esattamente come una massa posta sotto l'occhio. In questo gusci unico del lato caudale può osservarsi più facilmente il tipo di uno altro corrispondente allo stato passivo che nei controlli appare solo molto tempo dopo che il gusci ha preso l'aspetto di uno nuovo parte sotto l'occhio.

(1) R. Ann. 1900, pag. 40.

Questo esempio, ed altri che potrei citare, dimostra che *il differenziamento istologico dei gangli è indipendente dal loro sviluppo normale.*

Anche in altri organi possiamo osservare fatti analoghi: troviamo così differenziamento istologico delle cellule del sacco della radula anche quando questo sacco non si forma, differenziamento delle cellule dell'organo di Hoyle in mantelli fortemente malformati. ecc.

Questi fatti, ed altri che potrei citare, mettono in evidenza un principio di carattere generale: *i processi istogenetici sono fino ad un certo punto indipendenti dai processi organogenetici*, principio che concorda pienamente con molte esperienze eseguite sulla cultura dei tessuti di Vertebrati, nelle quali è stato, a più riprese, messo in evidenza che le cellule possono per un periodo più o meno lungo, ma ordinariamente piuttosto breve, continuare il loro differenziamento; così nelle culture Harrison ⁽¹⁾ vide differenziarsi i cromatofori, Levi ⁽²⁾ osservò formazione di fibre connettive, Harrison ⁽¹⁾ vide progredire il differenziamento di fibre muscolari striate, Olivo ⁽³⁾ di elementi cardiaci; Harrison ⁽¹⁾, Levi ⁽⁴⁾ ed Olivo ⁽⁵⁾ videro differenziarsi le cellule nervose e formarsi le fibre. In base, quindi, alle mie ricerche sui Cefalopodi ed a queste esperienze sulle culture dei tessuti dei Vertebrati, credo poter affermare che il principio sopra enunciato vale, non solo per i Cefalopodi, ma anche per i Vertebrati, e, con ogni verisimiglianza, per tutti i Metazoi.

(1) HARRISON R. G., *The outgrowth of the nerve fiber as a mode of protoplasmic movement.* « Journ. of exp. Zool. », vol. IX, 1910.

(2) LEVI G., *Differenziazione « in vitro » di fibre da cellule mesenchimali e loro accrescimento per movimento ameboide.* « Monit. Zool. Ital. », vol. XVII, 1916.

(3) OLIVO O. M., *Differenziazione istologica ottenuta « in vitro » del cuore di pollo indifferenziato.* « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », vol. III, 1928.

(4) LEVI G., *Connessioni e struttura degli elementi nervosi sviluppati fuori dell'organismo.* « Mem. R. Acc. Naz. Lincei » (Cl. Sc. fis. mat. e nat.). S. 5^a, vol. XII, 1917.

(5) OLIVO O. M., *Differenziazione e sdifferenziazione del tessuto embrionale di pollo coltivato da più settimane « in vitro ».* « Arch. f. exper. Zellforsch. ». Bd. V, 1928.

Biologia sperimentale. — *Processi regolativi della regione encefalica degli embrioni di Anuri* ⁽¹⁾. Nota di ALDO SPIRITO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Con la presente Nota preliminare mi propongo di esporre brevemente i primi risultati di esperienze condotte per indagare la natura di alcuni processi regolativi, che possono intervenire in seguito ad operazioni interessanti ampi territori dell'encefalo precordale.

Mio intendimento era anche di vedere, in relazione alle esperienze sul determinismo degli abbozzi oculari, se sia possibile ottenere, mediante nuove condizioni introdotte artificialmente, uno spostamento del tempo limite, dopo il quale nessun territorio circonvicino o trapiantato è più capace di dare origine a occhi più o meno normali.

È bene notare, ancora, che tutto ciò non rientra nel problema della rigenerazione totale dell'occhio: problema che del resto è stato già pienamente risolto quando lo si consideri da un punto di vista prettamente rigenerativo.

Le mie esperienze sono state eseguite su embrioni di *Rana esculenta* allo stadio di bottone codale già ben distinto e di vescicole ottiche primarie prossime ad invaginarsi in calici. Ho asportata una gran parte della parete encefalica destra, cercando di comprendervi l'abbozzo oculare, e ho conservato tale frammento per un eventuale controllo. L'ampia ferita, ponente allo scoperto la cavità cerebrale, è stata ricoperta con uno straterello di tuorlo tolto dalla regione ventrale di altro embrione: regione dalla quale è stato pure prelevato un ampio pezzo di ectoderma destinato a ricoprire il territorio cefalico così operato.

Non si è avuta mortalità negli embrioni e, dopo breve tempo ⁽³⁾, essi non mostravano quasi più traccia dell'operazione subita.

Così facendo ho tentato di porre la parete encefalica di un lato in condizioni embrionali per quanto è possibile analoghe a quelle che esistono prima del periodo dell'estroflessioni oculari, in modo che si potesse formare, in seguito all'azione combinata del turgore interno del tubo neurale e delle condizioni spaziali stabilentisi gradatamente all'esterno della parete cerebrale per il

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(3) La temperatura del liquido di Ringer nel quale venivano posti gli embrioni dopo le operazioni oscillava tra 25° e 28°, in modo che si è potuto ottenere una grande rapidità nei processi di cicatrizzazione e nell'ulteriore sviluppo.

riassorbimento del tuorlo appostovi, una nuova vescicola encefalica, e si potesse quindi vedere a quali processi sarebbe andata incontro questa regolazione cerebrale.

Dallo studio delle sezioni seriali di alcuni embrioni ho potuto constatare in primo luogo la formazione di un'esile parete cerebrale a guisa di ependima e di una grande vescicola da essa derivata. Questa parete si continua gradatamente con quella di sinistra integra.

È interessante notare che, anche nell'assenza dell'organo olfattorio destro asportato allo stadio di semplice abbozzo, non vi sono apparenti asimmetrie del capo; e ciò dev'essere attribuito alle avvenute regolazioni della parte anteriore dell'encefalo, che, pur nella sua nuova forma, è riuscita ad occupare uno spazio più grande di quello necessario al suo sviluppo normale.

Tra gli embrioni fissati in stadi più avanzati dei precedenti ne ho trovato finora uno mostrante, a destra, un occhio di dimensioni quasi normali, allungato in senso caudo-rostrale, sì che la sua parte anteriore è nel dominio del prosencefalo. Il suo epitelio pigmentato si continua gradatamente con la parete sinistra del cervello e viene a chiudere da un lato le cavità delle parti anteriori dell'encefalo.

Il differenziamento della parte visiva dell'occhio è molto ritardato rispetto a quello dell'occhio normale di sinistra; anche la lente è in uno stadio molto primitivo, munito di cavità e ancora aderente all'ectoderma.

Da questa sommaria esposizione appare evidente soprattutto l'importanza di alcuni fatti relativi alle regolazioni intervenute nella regione precordale del cervello e allo sviluppo di altre regioni cefaliche pur dopo operazioni così estese.

Per la parte che riguarda la presenza di un occhio sul lato operato, date le esperienze da me ideate, non è opportuno azzardare opinioni premature, tuttavia è pur lecito aspettarsi una risposta definitiva dall'esame istologico dei frammenti asportati.

Uno studio di questo genere si deve fondare *necessariamente* su rigorosi controlli, che potranno essere eseguiti, se sarà necessario, in altra e più appropriata maniera, vale a dire trapiantando il pezzo asportato e fissando l'embrione ospite dell'innesto, appena i processi cicatrizzanti abbiano raggiunto un grado tale da togliere ogni timore sulla perdita del frammento in questione.

Biologia. — *Rigenerazione e superrigenerazione di tessuto e di organo, nella coda di Urodeli adulti*⁽¹⁾. Nota di T. TERNI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. LEVI.

Nuovi risultati ottenuti colla mia tecnica delle perforazioni praticate nella coda di Urodeli⁽³⁾, mi permettono di portare un nuovo contributo allo studio dei fenomeni di superrigenerazione (Barfurth), cioè della rigenerazione in eccesso. Di tali fenomeni mi sono in passato occupato, studiando manifestazioni superrigenerative⁽⁴⁾, spontaneamente realizzate in natura (code soprannumerarie dei rettili).

Producendo perforazioni rotonde o quadrate di 3 mm. di diametro con stampini taglienti nella coda dei tritoni, si ottiene la formazione di una gemma rigenerativa in forma di semiluna o di U. Il blastema, accrescendosi, finisce per obliterare il foro. Tralasciando qui di trattare particolarmente le modalità della restituzione, mi soffermerò su uno dei punti sul quale le esperienze del 1924 avevano in parte deluso la mia attesa: quello cioè della possibilità di vivaci fenomeni superrigenerativi per parte della coda mutilata nel modo che ho detto. In quella mia Nota io ricordavo che, in due casi soli su di un centinaio, io avevo ottenuto, per effetto dell'avvenuta riparazione, una inflessione a scodella assai profonda in senso laterale della zona rigenerata, quasi che l'ampiezza del rigenerato fosse maggiore dell'ampiezza della cornice rigenerante, sì da essere costretta a far prominenza da un lato. Pensavo che ciò rappresentasse una modesta manifestazione superrigenerativa di quella singolare superficie rigenerante, molto ampia e chiusa su se stessa. La mia previsione però che le singole potenze parziali di quel blastema, attuandosi per intero, sommandosi potessero, almeno in qualche caso, portare a manifestazioni rigenerative esuberanti molto vistose, non si avverò; si determinava invece, per così dire, una regolazione armonica inibente, tale che la riparazione aveva di solito per effetto la restituzione della forma normale o quasi.

Riprese le ricerche su larghissimo materiale di *Triton (Molge) cristatus*, e, in più, di *Triton (Molge) taeniatus* adulti, ho ottenuto finalmente il risultato

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Istologia-Embriologia della R. Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1928.

(3) TERNI T., *Sui fenomeni di riparazione consecutivi a perforazioni praticate nella coda di Triton cristatus*, «Giorn. R. Acc. Med.», Torino, 1924.

(4) TERNI T., *Studio anatomico di una coda doppia di Gongylus ocell.*, «Arch. Ital. di Anat. e di Embriol.», vol. XIV, 1915.

che avevo preveduto. Tre sono soprattutto i risultati positivi e su di essi qui brevemente riferisco.

a) In un *Triton cristatus* adulto ♂ avevo prodotto nell'aprile una perforazione quadrata di 3 mm. di lato, interessante la coda a metà circa della sua lunghezza, dorsalmente alla colonna vertebrale, a limite dei muscoli vertebrali epiassiali. Dopo circa due settimane, otturatosi il foro, comparve, sporgente sulla faccia destra della coda, una piccola gemma in forma di escrescenza, che presto assunse la forma di un piccolo corno, con cute ben pigmentata, di circa 1 mm. di base. Questa piccola appendice crebbe assai lentamente, raggiungendo, dopo un mese e mezzo, la lunghezza di circa 4 mm.

b) In due *Triton taeniatus* adulti ♂ avevo prodotto nel maggio una perforazione circolare di 3 mm. di diametro, interessante la coda a circa metà della sua lunghezza, dorsalmente alla colonna vertebrale. La sede del foro era tale che il tassello di coda asportato conteneva anche i muscoli epiassiali, la porzione dorsale dell'arco vertebrale e la zona dorsale (soltanto



Fig. 1.

sforata) del midollo spinale; i corpi vertebrali non furono lesi. La perdita di sostanza, tenuti gli animali operati alla temperatura dell'ambiente interno (maggio-giugno), riparò piuttosto lentamente nello spazio di circa un mese; dopo di che cominciò a sorgere, dalla zona rigenerante, una gemma a larga base e ad apice appuntito, che ben presto assunse esattamente la forma dell'estremo terminale di una coda. La piccola coda soprannumeraria andò progressivamente allungandosi e ingrossandosi nel corso del secondo mese, talchè adesso (luglio) la nuova coda possiede, nell'uno la lunghezza di 8 mm., nell'altro di 10 mm. (fig. 1).

La coda superrigenerata sorge, nell'un esemplare dalla superficie destra, nell'altro dalla faccia sinistra della coda; in entrambi la coda stessa si dirige dorsalmente, mantenendosi nello stesso piano sagittale della coda originaria. Un lembo della cresta caudale dorsale, che corrisponde all'orlo dorsale della perforazione, è rimasto perfettamente conservato (fig. 1). Il piano della biforcazione è dunque sagittale; l'apice caudale originario è lungo nei due esemplari circa 20 mm. ed è leggermente inclinato verso il basso; l'angolo tra i due apici è di circa 50 gradi.

Concludendo, con una nuova particolar forma di mutilazione si riesce, nella coda dei tritoni adulti, ad ottenere tutta una serie continua di risultati rigenerativi, che, a seconda della specie zoologica, della particolar sede più o meno dorsale della lesione, ecc., va, dalla rigenerazione pura e semplice di tessuto, con restituzione della forma normale, fino alla superrigenerazione di un organo complesso.

La inflessione a scodella che talvolta ho ottenuto nel rigenerato conseguente a perforazione, è determinata da una lieve esuberanza di produzione di tessuti, tuttavia contenuta nei limiti di una regolazione inibente. All'esame istologico la rigenerazione dei vari tessuti (epitelio, ghiandole cutanee, connettivo, muscoli) era solo lievemente e armonicamente esaltata.

Anche nella piccola appendice conica da me recentemente ottenuta (esp. *a*), la manifestazione superrigenerativa si limitava ad una eccessiva produzione di connettivo e di epitelio, senza accenno, rivelabile allo studio delle sezioni seriali, all'organizzazione di una coda vera e propria. La rigenerazione superrigenerativa era certo più esuberante, ad es., di quelle che stanno alla base di una cicatrice ipertrofica (cheloide) o di un callo osseo esuberante, — ma certo assai meno vivaci dei fenomeni, ad es., di *ipermelia* (arti soprannumerarii) ottenuti anche sperimentalmente (P. Della Valle) negli Urodeli adulti.

Nel *Triton taeniatus* adulto ho invece ottenuto (esp. *b*), con perforazioni che interessavano anche la zona dorsale della colonna vertebrale, la vera e propria superrigenerazione di un organo così complesso quale è la coda. Un risultato analogo al mio, è stato raggiunto solo nelle larve di anfibi e non mai negli adulti. Hanno infatti ottenuto l'abbozzo di una coda soprannumeraria: Barfurth (1899)⁽¹⁾ con causticazioni termiche della notocorda in larve di *Rana*; Morgan (1907)⁽²⁾ mediante escissione di porzioni cuneiformi dalla zona epiassiale della coda in larve di *Rana*; Tornier (1900)⁽³⁾ con tagli della zona ipiassiale caudale di larve di *Axolotl*.

(1) BARFURTH D., *Die experimentelle Herstellung der Cauda bifida bei Amphibienlarven*, « Arch. f. Entwickl.-mechan. », Bd. 9, 1899.

(2) MORGAN T. H., *Regeneration*, (p. 257), Leipzig, 1907.

(3) TORNIER G., *Ueber Amphibiengabelschwänze und einige Grundgesetze der Regeneration*, « Zool. Anz. », Bd. 23, 1900.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. GARBASSO A., inizia la seduta col rivolgere un pensiero di reverente e fervido omaggio all'Augusta Persona di S. M. il Re, Presidente d'onore dell'Accademia, di cui ricorre oggi l'onomastico.

Dà quindi il benvenuto ai nuovi Soci che sono presenti e esprime il suo dolore per la perdita dei Soci LUIGI BIANCHI, ARNALDO PIUTTI e LUIGI SABBATANI, dei quali ricorda i meriti scientifici.

Il Socio NASINI manda un affettuoso saluto alla memoria del professore Piutti.

Commemora quindi il Socio straniero ARRHENIUS SVANTE e mette in rilievo l'importante contributo che portò con i suoi lavori al progresso della chimica.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio NASINI presenta la serie delle pubblicazioni apparse dal 1924 al 1927 a cura dell'Istituto di Chimica Generale di Pisa.

Presenta inoltre a nome del Gr. Uff. SERONO, del prof. PROVENZAL e dell'Associazione Italiana di Chimica un volume pubblicato per celebrare il Centenario della nascita del Bertagnini con le seguenti parole:

« Ho l'onore di offrire all'Accademia, per incarico avutone dal professore Gr. uff. Cesare Serono, dal prof. Giulio Provenzal, dalla Università di Pisa e dalla Associazione Italiana di Chimica, un volume pubblicato per celebrare il Centenario della nascita di CESARE BERTAGNINI, centenario che ricorreva nel 1927. Cesare Bertagnini, allievo prediletto del Piria e suo successore per poco più di un anno, nella cattedra di Pisa, fu chimico organico valorosissimo, e nella sua breve e dolorante vita pubblicò lavori importanti e geniali che facevano presagire che avremmo avuto in lui un vero Maestro italiano. Mi parve doveroso di rievocare la memoria di questo uomo insigne, che fu anche ammirabile per le sue virtù civili e pel suo patriottismo. Ebbi l'appoggio della Università di Pisa e della Associazione Italiana di Chimica. Il prof. Giulio Provenzal aveva raccolto un largo materiale biografico e epistolare, a lui fornito dalle famiglie congiunte a quella del Bertagnini; egli si offrì di scrivere brevemente la vita e di coordinare il materiale raccolto; e così avemmo pronto per la pubblicazione il volume che racchiude anche tutte le Memorie del Bertagnini.

« Restava la difficoltà economica e questa fu superata, mercè la illuminata generosità del prof. Cesare Serono che volle assumere su di sé la spesa non lieve della stampa. Si potè così pubblicare questo volume che viene offerto all'Accademia. Esso è corredato di *fac-simili* di lettere e di

vari ritratti di scienziati contemporanei del Bertagnini, e credo che costituisca un buon contributo alla documentazione della storia delle Scienze».

Il Socio MILLOSEVICH fa omaggio all'Accademia della pubblicazione commemorativa pel I° Centenario di Q. Sella del quale segnala i meriti verso la Patria e verso l'Accademia, e presenta una sua pubblicazione sulle meteoriti del Museo di Mineralogia dell'Università di Roma.

Il Socio ARMELLINI presenta il suo « Trattato di Astronomia Sidérale » e ne parla.

Il Socio CASTELNUOVO presenta un'opera del prof. LASAREFF intitolata: « Théorie ionique de l'excitation des tissus vivants ».

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta i libri presentati in omaggio all'Accademia e segnala le pubblicazioni dei Soci stranieri: professor BRILL sulla meccanica e del prof. CARTAN sulla geometria degli spazi di Riemann, gli « Atti del XIII Congresso Internazionale d'Agricoltura », le « Lettere di F. Berzelius », a cura della R. Accademia delle Scienze di Svezia; « L'alluminio e l'alimentazione », di E. ELLSWORTH.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un piego suggellato inviato il 22 ottobre u. s. dal sig. LUIGI LUCARINI per essere conservato nell'Archivio dell'Accademia.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Prof. PARRAVANO legge quindi la relazione dei Soci PASCAL e SEVERI con la quale si propone l'inserzione della Memoria SANSONE « Sulla risoluzione apiristica delle congruenze » negli « Atti Accademici » e l'Assemblea approva la relazione.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente rivolge anche una viva raccomandazione ai Soci affinché accompagnino ogni Nota o Memoria che presentano con un breve sunto che sarà pubblicato dalla « Bibliografia Scientifico-tecnica » edita a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell' 11 novembre 1928

- Actes de la Conférence Internationale de lutte contre la mouche de l'olive. Madrid, 1923. 8°, pp. 1-162.
- Actes du XIII^{me} Congrès Internationale de Agriculture. Rome, 26 mai-1^{er} juin 1927. Voll. I-IV. Rome, 1927. 8°, pagine 1-260; 1-206; 1-916; 1-615.
- Anales del Instituto de Neurologia. Tomo I. 1927. Montevideo, 1928. 4°, pp. 1-X, 1-514.
- ALDRICH J. M. — A Revision of the American Parasitic Flies belonging to the Genus *Belvosia*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-45.
- ARMELLINI G. — Trattato di Astronomia siderale. Vol. I. Bologna, 1928. 8°, pagine 1-XI, 1-393.
- BAILEY S. I. — The Cambridge Astronomical Society of 1854. (Reprint. from «Popular Astronomy». Vol. XXXVI). s. l. 1928. 8°, pp. 1-3.
- BELLIO G. — Sulla variabilità di alcuni caratteri in *Leucaspis Riccae* Targ. (Hemiptera: Coccidae) (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici» Vol. XXII, pp. 140-158). Portici, 1928. 8°.
- BERLESE A. — Commemorazione di Antonio Berlese. (Estr. dalle «Memorie della Società Entomologica Italiana». Vol. II, 1927, pp. 55-84). Genova, 1927. 8°.
- BERRY E. W. — Fossil Nutlets, of the Genus *Lithospermum*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8° pp. 1-3.
- BERTAGNINI C. — Cesare Bertagnini (1827-1927). Vita, opere e carteggio inedito a cura di Giulio Provenzal con prefazione del prof. R. Nasini. Roma, 1928. 8°, pp. I-VII, 1-334.
- BERTRAND P. — Etude du stipe de l'adelpyhton Jutieri. (Extr. du «Bulletin de la Société Royale de botanique de Belgique», tome XLIV, pp. 156-158). Bruxelles, 8°, 1907.
- BERZELIUS J. — Jac. Berzelius Brev. utgivna av K. Svenska Vetenskapsakademiensc genom: H. G. Söderbaum. Uppsala, 1927. 8°, pp. 1-331.
- BIANCHI L. — A Luigi Bianchi nel trigesimo della sua morte. Pisa, 1928. 8°, pp. 1-67.
- BOSCHMA H. — Two Common Species of Parasitic Crustacea (Sacculinidae) of the West Indies. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-10.
- BRILL A. — Vorlesungen über allgemeine Mechanik. München, 1928. 8°, pp. I-VIII, 1-356.
- CANU F. and BASSLER R. S. — Fossil and recent Bryozoa of the Gulf of Mexico Region. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Volume. 72). Washington, 1928. 8°, pagine 1-199.
- Cattedra di Zoologia generale e agraria. — R. Laboratorio di Entomologia agraria. (Estr. dal Volume «Il R. Istituto Superiore Agrario di Portici», 1872-1928, pp. 121-162). Spoleto, 1928. 4°.
- CESÀRO G. — Christallographie. Sur la forme des cristaux de Vivianite artificielle. (Extr. des «Bulletins de la Classe des

- Sciences ». Ser V, t. XIV, pp. 260-264). Bruxelles, 1928. 8°.
- CESÀRO G. — Sur l'ellipsoïde de Steiner du tétraèdre et sur les groupes de tétraèdres ayant leur ellipsoïde de Steiner commun. (Extr. des « Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique [Classe des Sciences] ». T. IX). Bruxelles, 1927. 8°, pp. 1-58.
- CESÀRO G. — Sur la Fraipontite, silicate basique hydrate de zinc et d'aluminium (Extr. des « Annales de la Société Géologique de Belgique ». T. L, pp. 106-110). Liège, 1927. 8°.
- CESÀRO G. — Sur les points d'égale inertie, les figures isotropes et les enveloppes d'égale inertie. (Extr. des « Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique [Classe des Sciences] ». T. X). Bruxelles, 1928. 8°, pp. 1-112.
- Chanousia. Giardino Botanico Alpino dell'ordine Mauriziano al Piccolo S. Bernardo (m. 2200 s. m.). Annuario, n. 1. Roma, 1928. 8°, pp. 1-171.
- CIFERRI R. — Segundo Informe anual de la Estación Nacional Agronómica de Moca, 1926. Santo Domingo, 1927. 4°. pp. 1-153.
- COLIZZA C. — Il moscherino delle viole (*Dasyneura affinis* Kieff. Diptera Cecydomyidae) nell'Italia meridionale. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXI, pp. 130-148). Spoleto, 1928. 8°.
- COOK O. F. and LOOMIS H. F. — Millipeds of the Order Colobognatha, with Descriptions of six new Genera and Type Species, from Arizona and California. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1928. 8°, pp. 1-26.
- CORBETTA C. — Studio critico su i principi fondamentali della termodinamica. (Estr. da « l'Industria Italiana del freddo ». Anno III). Roma, 1928. 4°, pagine 1-26.
- D'ARCY WENTWORTH TH. — On Egyptian Fish-Names used by Greek Writers. (Reprint. from the « Journal of Egyptian Archaeology ». Vol. XVI, pp. 22-23). London, 1928. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Il piano carsico dell'Arcinazzo sui monti sublacensi. (Estr. dalla « Rivista del Touring Club Italiano », (Le Grotte d'Italia). Milano, 1928. 8°, pp. 1-5.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Karte der landwirtschaftlichen Böden Italiens. (Sonderabdr. aus « Die Ernährung der Pflanze »). Berlin, 1928. 4°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — La temperatura dell'aria e del terreno agrario a Perugia, 1924-1926. (Estr. dagli « Annali di Tecnica Agraria ». 1928, pp. 27-42). Perugia, 1928. 8°.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Nuovo affioramento di lava nella tenuta Lazzaria (territorio di Velletri). (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Vol. XLIII, pp. 114-115). s. l. 1928. 8°.
- DE SAMPAIO FERRAZ. — A Previsão do Tempo baseada em Observações locais. Rio de Janeiro, 1928. 8°, pp. 1-25.
- DUNN H. L. — Arch Mechanics of the Normal Adult Foot. (Reprint. from the « American Journal of Hygiene ». Volume VIII, pp. 410-447). s. l. 1928. 8°.
- DUNN H. L. and ROCKWOOD R. — A Record System Suitable for Both Clinical and Statistical Medicine. (Reprint. from the « Archives of Internal Medicine ». Vol. 41, pp. 499-535). Chicago, 1928. 8°.
- DUNN H. L. — The Status of Statistical Medicine. (Reprint. from the « Journal of the American Medical Association ». Vol. 89). Chicago, 1927. 8°, pp. 1-5.
- EDWARDS D. L. — Note on a Correction to Spectroscopic Parallaxes. (Reprint. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Volume LXXXVIII, n. VIII, pp. 695-700). Edinburgh, 1928. 8°.
- ERRERA J. — Polarisation diélectrique. Paris, 1928. 8°, pp. 1-165.
- EWING H. E. — The Scorpions of the Western Part of the United States, with Notes on Those Occurring in Northern Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-24.
- FORBES S. A. — The Effects of Stream Pollution on Fishes and their Food. Urbana, 1928. 8°, pp. 1-13.

- GILKINET M. A. — Cinquantenaire Académique de M. Alfred Gilkinet. (Extr. des « Bulletins de l'Académie Royale de Belgique ». Bruxelles, 1925. 8°, pp. 1-7.
- GILMORE C. W. — A New Fossil Reptile from the Triassic of New Jersey. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-8.
- GORDON COLIN F. — A Laboratory Study of Nitrogen Fixation by the high Tension Arc. (Reprint. from the « Journal of Physical Chemistry ». Vol. XXXI, pp. 1539-1558). Washington, 1927. 8°.
- GRAVIS A. — Connexions anatomiques de la tige et de la racine. (Extr. des « Bulletins de l'Académie Royale de Belgique ». N° IV, pp. 227-236). Bruxelles, 1919. 8°.
- GRAVIS A. — Cours de botanique. (Conférences de la Ville de Liège). Liège, s. d. 8°, pp. 1-40.
- GRAVIS A. — De l'emploi des caractères anatomiques dans la classifications des végétaux. (Extr. du « Bulletin de la Société Royale de botanique de Belgique ». T. XXIX et XXX) (1890-1891). s. l. s. d. 8°, pp. 1-8.
- GRAVIS A. — De l'enseignement des Sciences phisique et naturelles dans les établissements d'éducation moyenne. Bruxelles, 1914. 8°, pp. 1-20.
- GRAVIS A. — De l'influence de la lumière sur la végétation. Conférence. Bruxelles, 1880. 8°, pp. 1-11.
- GRAVIS A. — Études sur la fronde des Zygoptérides. (Extr. du « Bulletin de la Société Royale de botanique de Belgique ». T. LXVI). Bruxelles, 1909. 8°, pp. 1-7.
- GRAVIS A. — Gamétophore et sporophore. Liège, s. d. 8°, pp. 1-6.
- GRAVIS A. — La Botanique en Belgique de 1830 à 1905. (Extr. du « Mouvement scientifique en Belgique »). Bruxelles, 1914. 8°, pp. 1-32.
- GRAVIS A. — La Flore du Congo. (Conférences de La Ville de Liège. I-III séances). Liège, 1908. 8°, pp. 1-11.
- GRAVIS A. — Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann. Paris, 1928. 8°, pp. 1-II, 1-273.
- GRAVIS A. — L'édification de nos connaissances et la théorie de l'adaptation. Liège, 1920. 8°. pp. 1-18.
- GRAVIS A. — L'enseignement de la Botanique. (Extr. des « Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liège. Vol. IV). Bruxelles, 1907. 8°. page 1-21.
- GRAVIS A. — L'Ethologie végétale. (Conférences de la Ville de Liège). Liège, 1914. 8°, pp. 1-3.
- GRAVIS A. — L'excitabilité des plantes. I, II Leçons. (Conférences de la Ville de Liège). Liège, 1910. 8°, pp. 1-8.
- GRAVIS A. — Notice sur Émile Laureht. (Extr. de l'« Annuaire de l'Académie Royale de Belgique ». Vol. LXXV). Bruxelles, 1909. 8°, pp. 1-78.
- GRAVIS A. — Observations de pathologie végétale faites à l'Université de Liège. (Extr. du « Compte-rendu de la Société Royale de botanique de Belgique ». T. XXXIV. pp. 9-26). Liège. 1895, 8°.
- GRAVIS A. — Quelques réflexions au sujet de l'enseignement de la Botanique. Gand. 1912. 8°, pp. 1-309.
- GRAVIS A. — Réponse à M. G. Chauveand. (Extr. de « Bulletin de la Société botanique de France ». T. LVIII). Coulommiers. 1921. 8°. pp. 1-5.
- GRAVIS A. — Recherches anatomiques et physiologiques sur le Tradescantia Virginica L. (Extr. des « Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publié par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique ». T. LVII). Bruxelles, 1898. 4°, pp. 1-304.
- GRAVIS A. — Sur les travaux botaniques (Extr. de la « Belgique Horticole ». 1884, pp. 91-97). Liège, 1884. 8°.
- GRAVIS A. — Structure de l'hypocotyle. Paris, s. d. 8°, pp. 1-4.
- HAY O. P. — Further Consideration of the Shell of Chelys and of the Constitution of the Armor of Turtles in General. Washington, 1928. 8°, pp. 1-12.
- HEDRICH A. W. — The « Normal » for Epidemic Diseases. (Reprint. from the « American Journal of Public Health ». Vol. XVII, n. VII. pp. 691-698). New York, 1927. 8°.

- HEWETT D. F. and SHANNON E. V. — Zeolites from Ritter hot Spring Grant County, Oregon. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-18.
- HRDLICKA A. — Catalogue of Human Crania in the United States National Museum Collections. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 71). Washington, 1928, 8°, pp. 1-140.
- Istruzioni pratiche per la provvista e l'uso agrario delle acque. (Biblioteca d'idraulica pratica. Vol. II). Milano, s. d. 8°. pp. I-VII, 1-221.
- ISTVÁN K. — Mért Forog a Fold? Asztrofizikai Tanulmány. Szeged, s. d. 8°, pp. 1-16.
- ITAPUAMBYRA GAMA L. — Calculo do nascer e do occaso da Lua. Rio de Janeiro, 1928. 4°, pp. 1-10.
- KELLER F. — Frammenti concernenti la Geofisica dei pressi di Roma. Spoleto, 1904. 4°, pp. 1-31.
- KRIEGER H. W. — A Prehistoric Pit House Village site on the Columbia River at Wahluke Grant County Washington. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°. pp. 1-29.
- LASAREFF P. — Théorie ionique de l'excitation des tissus vivants. Paris, 1928. 8°. pp. 1-240.
- LECAT M. — L'azéotropisme dans les système binaires alcools-esters (Extr. des «Annales de la Société scientifique de Bruxelles». T. XLVIII, 1927). Louvain, 1928. 8°, pp. 1-16.
- LECAT M. — L'azéotropisme dans les systèmes binaires alcools-hydrocarbures. (Extr. des «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles». T. XLVIII). Louvain, 1928. 8°, pp. 1-16.
- LECAT M. — Nouveaux azéotropes binaires (X-XI liste). (Extr. des «Annales de la Société scientifique de Bruxelles». T. XLVIII, pp. 13-22, 54-62). Louvain, 1928. 8°.
- LINTON E. — Notes on Trematode Parasites of Birds. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, page 1-36.
- LOCKYER W. — Further Observations of some Bright-Hydrogen-Line Stars, 1924-1927. (Reprint. from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. LXXXVIII pp. 683-695). Edinburgh, 1928. 8°.
- LOVERIDGE A. — Description of a New Species of Gecko from Tanganyika Territory, Africa. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol 72). Washington, 1928. 8°. pp. 1-2.
- LUYTEN W. J. — On the Absolute Magnitudes of the Class M Stars. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. 14, pp. 488-491). Washington, 1928. 8°.
- LUYTEN W. J. — On the Motion of the Magellanic Clouds. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XIV, pp. 241-245). s. l. 1928. 8°.
- MANFREDI F. — Ortoprospettiva. Napoli, 1928. 12°, pp. I-VIII, 1-93.
- MARVULLI A. — Metodo di soluzione delle equazioni superiori per eliminazione di radici. Altamura, 1928. 8°, pp. 1-25.
- MILLOSEVICH F. — Le meteoriti del Museo Mineralogico dell'Università di Roma. Roma, 1928. 8°, pp. 1-38.
- MORIZE H. — Abacos para a determinação de angulo e do azimuth. (Extr. da «Revista dos Cursos de Escola Polytechnica». Vol. XL). Rio de Janeiro, 1908, 8°, pp. 1-11.
- MOTTA M. — La costituzione e l'evoluzione della materia secondo gli ultimi risultati della fisico-chimica. Roma, 1928. 8°. pp. 1-153.
- PARLATORE F. — La commemorazione di Filippo Parlatore nel cinquantenario della sua morte. Firenze, 1928. 8°, pagine 1-33.
- PAYNE C. H. — On the Contours of Stellar Absorption Lines, and the Composition of Stellar Atmospheres. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Volume 14, pp. 399-406). Washington, 1928, 8°.

- PAYNE C. H. — On the Distortion of the Continuous Background by Wide Absorption Lines. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XIV. pp. 296-301). s. l., 1928. 8°.
- PEARL R. — Biometry and Vital Statistics in Relation to the Science of Medicine. (Reprint. «Nelson Loose-Leaf System». 1927, pp. 127-150). New York, 1927. 8°.
- PEARL R. — L'accroissement de la population au point de vue biologique. (Reprint. from the «Proceedings of the World Population Conference». 1927). Genève, 1927. 8°, pp. 1-25.
- PEARL R. — Report of the Director of the Institute for Biological Research. II, 1926-1927). (Reprint. from the «Johns Hopkins University Circular»). London, 1927. 8°, pp. 1-6.
- PEARL R. — The Biology of Population Growth. (Reprint. from the «Proceedings of the World Population Conference». 1927, pp. 22-37). Genève, 1927. 8°.
- PEARL R. — The Cost of Biological Books in 1927. (Reprint. from the «Quarterly Review of Biology». Vol. II, pp. 581-583). s. l. 1927. 8°.
- PEARL R. — The Growth of Populations. (Reprint. from the «Quarterly Review of Biology». Vol. II, pp. 532-548). s. l. 1927. 8°.
- PEARL R. — The Growth of Seedlings of the Canteloup Cucumis Melos, in the Absence of Exogenous Food and Light. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences», Vol. 14). Washington, 1928. 8°, pp. 1-4.
- PEARL R. — The Indigenous Native Population of Algeria in 1926. (Reprint. from «Science». Vol. LXVI, n. 1720, pages 593-594). s. l. 1927. 4°.
- PEARL R. — The Present Status of Eugenics. Liverpool, 1928. 8°, pp. 1-28.
- PEARL R. and ZATIMER BACON A. — New Data on Alcohol and Duration of Life. (Reprint from «Nature»). Edinburg, 1928. 8°, pp. 1-6.
- PRICE E. W. — New Helminth Parasites from Central American Mammals. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-7.
- Pubblicazioni dell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pisa. Anni 1924-1927. Pisa, 1927. 4°.
- PUTNAM P. — Sex Differences in Pulmonary Tuberculosis Deaths. (Reprint. from the «American Journal of Ygiene». Vol. VII, pp. 663-705). s. l. 1927. 8°.
- RATHBUN M. J. — Two New Crabs from the Eocene of Texas. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-6.
- REED L. J. — Haldane on Selection. (Reprint. from the «Quarterly Review of Biology». Vol. III, pp. 245-253). s. l. 1928. 8°.
- REED L. J. and PEARL R. — On the Summation of Logistic Curves. (Reprint. from the «Journal of the Royal Statistical Society». Vol. XC, pp. 729-746). s. l. 1927. 8°.
- REIS VARELA J. — Les communications inter-planétaires. Fara, 1928. 8°, pp. 1-12.
- REYES C. — Intorno a tre casi di sifilide ignorata e molto strana. Milano, 1928. 8°, pp. 1-10.
- RICCHELLO A. — Contributo alla conoscenza della mosca del carciofo (*Agromyza andalusica* Strobl) e dei suoi parassiti. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXII, pp. 81-147). Portici, 1928, 4°.
- ROCCATI A. — I Ghiacciai delle Alpi Marittime Orientali durante il periodo 1921-1924. (Estr. dal «Bollettino glaciologico italiano». n. 7. pp. 47-57). s. l. 1927. 8°.
- ROCCATI A. — Jorge Palmiro De Araujo Ferraz. (1883-1926). (Extr. du «Bulletin de la Société française de Mineralogie». T. XLIX). s. l. 1926. 8°. pp. 1-4.
- ROCCATI A. — L'ossido di zirconio nella regione di Caldas dello Stato di Minas Geraes (Brasile). Pinerolo, 1928. 8° pp. 1-14.
- ROCCATI A. — Notes sur la Mineralogie du Brésil par Jorge Palmiro de

- Araujo Ferraz. (Extr. du « Bulletin de la Société française de Mineralogie ». T. L). Paris, 1927. 8°, pp. 1-41.
- ROCCATI A. — Scheelite della miniera di Sache nella Valle di Eვაჟონ (Aosta). Torino, 1927. 8°, pp. 1-7.
- SCHAEFFER G. — Recherches physiologiques sur les Levains minéraux à base d'alun. (Extr. du « Bulletin de la Société scientifique d'Hygiène alimentaire ». TXVI). s. l. 1928. 8°, pp. 1-56.
- SCHLESINGER F. — General Catalogue of Stellar Parallaxes. S. d. 1924. 4°, pp. I-VII, 1-57.
- SCHLESINGER F. and POND A. H. — Ans Index to the Constellations. (Reprint. from « Popular Astronomy ». Volume XXXIII, n. II). s. l. 1925, 8°, pp. 1-17.
- SCHWARTZ B. — Two New Nematodes of the Family Strongylidae, Parasitic in the Intestines of Mammals. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-5.
- SEIWEILL H. R. — Two New Species of Commensal Copepods from the Woods Hole Region. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-5.
- SELLA Q. — In memoria di Quintino Sella nel suo primo centenario a cura del Comitato Biellese. Torino, 1928. 8°, pp. 1-206.
- SILVESTRI F. — Japygidae (Thysanura) dell'estremo Oriente. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXII, pp. 49-80). Portici, 1928. 8°.
- SMITH E. E. — Aluminum Compounds in Food. New York, 1928. 8°. pp. 1-XII, 1-378.
- SOLER E. — I lavori gravimetrici italiani e le loro deduzioni d'indole geofisica. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze ». 1926). Pavia, 1927. 8°. pp. 1-16.
- SOLER E. — Rapport sur les Mesures relatives de l'Intensité de la Pesanteur exécutées pendant les années 1922-1924. Madrid, 1924. 4°, pp. 1-8.
- UCHIDA I. — An Introduction to the Universal Dualism. Tokyo, s. d. 8°, pagine 1-72.
- WASHINGTON H. S. and REYES M. G. — Petrology of the Hawaiian Islands: VI Mani. (From « American Journal of Science ». Vol. XV. pp. 219-220). Washington, 1928. 8°.
- WASHINGTON H. S. and REYES M. G. — Rocks of the Galápagos Islands. (Reprint. from « Journal of the Washington Academy of Sciences ». Vol. 17. pp. 538-543). Washington, 1927. 8°.
- WENGER A. M. — A experiencia de Michelson. Bello Horizonte, 1928. 8°, pagine 1-31.
- WYTHE COOKE C. — New Vicksburg (Oligocene) Mollusks from Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-11.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 novembre 1928 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Trasformazioni di contatto birazionali del piano.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. GINO FANO.

1. Le trasformazioni di contatto, nel piano, nello spazio, e anche a più variabili indipendenti, costituiscono una creazione geniale di S. Lie, il quale le ha studiate quasi esclusivamente dal punto di vista differenziale, cioè nell'ipotesi che le funzioni che vi compaiono siano soggette soltanto ad avere comportamento regolare nell'intorno di un punto generico della regione considerata. Esse possono studiarsi anche nel campo algebrico o birazionale: ma non sono state finora, in questo campo, molto approfondite. Il gruppo principale di lavori in argomento è quello di L. AUTONNE, il quale in due Memorie del 1887-88⁽²⁾ ha impostato analiticamente il problema delle trasformazioni di contatto birazionali del piano, e ne ha studiati i casi più elementari: e in lavori successivi, culminanti in una Memoria del 1905⁽³⁾, ha avviata la stessa ricerca per lo spazio ordinario e per spazi a più dimensioni.

In questa Nota, e in alcune altre che seguiranno, mi propongo di porre su base geometrica il problema delle trasformazioni di contatto birazionali

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1928.

(2) « Journ. de mathém. », (4), vol. 3 (1887), p. 63; vol. 4 (1888), pp. 177, 407.

(3) *Sur les formes minées* (parte III), « Annales de l'Univ. de Lyon », Science et Méd., fasc. 16 (1905). Le varietà « primordiales », che corrispondono ai punti e agli iperpiani, possono avere, come luoghi di punti, qualunque dimensione inferiore allo spazio ambiente (possono essere cioè linee, superficie, M_3, \dots fino a M_{n-1} , se siamo in S_n); e AUTONNE distingue appunto questi vari casi.

del piano, e di mostrare come questo problema, per mezzo di una notevole rappresentazione dovuta pure a S. Lie, si muti in un problema interessante di trasformazioni cremoniane dello spazio a 3 dimensioni ⁽¹⁾.

2. Ricordo che si chiama *elemento lineare* o brevemente *elemento* del piano la figura costituita dall'insieme di un punto del piano e di una retta passante per esso. Quando il punto sia proprio, l'elemento lineare si può rappresentare analiticamente con 3 coordinate; le coordinate cartesiane x, y del punto e il coefficiente angolare p della retta ⁽²⁾. Due elementi infinitamente vicini (x, y, p) e $(x + dx, \dots)$ si dicono *in posizione unita* quando soddisfano alla condizione $dy - p dx = 0$. Chiamasi *unione* (« Verein ») ogni sistema ∞^1 di elementi, ciascuno dei quali sia in posizione unita col consecutivo. Sono unioni tutte le linee del piano, come sistemi di elementi costituiti dai singoli punti della linea colle rispettive tangenti; incluse le rette, unioni a retta fissa e punto variabile; e in più i punti, unioni a punto fisso e retta variabile passante per questo punto.

Trasformazione di contatto è ogni trasformazione di elementi, ossia delle tre variabili x, y, p :

$$(1) \quad x_1 = X(x, y, p) \quad ; \quad y_1 = Y(x, y, p) \quad ; \quad p_1 = P(x, y, p)$$

la quale conservi la relazione di posizione unita, cioè muti in sè stessa l'equazione differenziale $dy - p dx = 0$, e quindi ogni unione anche in un insieme.

Le trasformazioni puntuali del piano $x_1 = X(x, y)$, $y_1 = Y(x, y)$, quando si « estendano » agli elementi lineari uscenti dalle coppie di punti omologhi mediante la terza equazione $p_1 = \frac{Y_x + Y_y p}{X_x + X_y p}$ (dove gli indici denotano derivate), sono particolari trasformazioni di contatto. In generale però, in una trasformazione di contatto ai punti dell'un piano come particolari unioni corrispondono nell'altro ∞^2 linee, e viceversa; e eliminando dalle (1) le variabili p, p_1 si ricava un'equazione unica fra le x, y, x_1, y_1 :

$$(2) \quad \psi(x, y, x_1, y_1) = 0$$

la quale, quando si interpretino x, y come coordinate e x_1, y_1 come parametri (o viceversa), rappresenta, al variare dei parametri, le ∞^2 curve del primo piano corrispondenti ai punti x_1, y_1 del secondo (o rispettivamente le curve del secondo piano corrispondenti ai punti del primo).

3. La trasformazione di contatto (1) fra due piani si dirà *birazionale* quando la (1) è altresì una trasformazione birazionale delle 3 variabili

(1) Tale argomento fu già oggetto di una mia comunicazione sommaria al Congresso Internazionale dei Matematici in Bologna nel settembre u. s.

(2) Per elementi impropri, occorre far uso di coordinate omogenee di punto e di retta. V. p. es., CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, I (Leipzig, 1875), pp. 1023-27.

x, y, p ; ossia quando le funzioni X, Y, P che vi compaiono sono funzioni razionali delle x, y, p , e tali che dalle (1) possano ricavarsi x, y, p in funzione razionale delle x_1, y_1, p_1 .

Entrano in questa categoria: le trasformazioni cremoniane del piano punteggiato, « estese » nel senso di cui al numero precedente; le trasformazioni cremoniane del piano rigato, estese in modo duale; le reciprocità piane, rappresentabili con un'equazione del tipo (2), bilineare nelle x, y e nelle x_1, y_1 , a determinante non nullo; quindi anche tutte le trasformazioni prodotti di due o più dei tipi precedenti. Però le reciprocità piane possono ottenersi come prodotti di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato (1). E d'altra parte il prodotto di più trasformazioni cremoniane, tutte puntuali o tutte di rette, è ancora rispettivamente una trasformazione di questi due tipi. Perciò i prodotti sopra indicati devono tutti risultare da prodotti di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato alternativamente; e danno già luogo a casi abbastanza complessi.

Nelle trasformazioni cremoniane del piano punteggiato, l'interesse principale si concentra sulle così dette *reti omaloidiche*, cioè sui *sistemi lineari* ∞^2 , di grado 1, di curve (necessariamente razionali) dell'un piano che corrispondono alle rette dell'altro piano. La più generale trasformazione cremoniana si ottiene scegliendo ad arbitrio nei due piani due reti omaloidiche, una delle quali si può supporre che sia la rete delle rette, e ponendo fra queste due reti una proiettività arbitraria.

Nelle trasformazioni di contatto birazionali, i sistemi ∞^2 di curve, che chiameremo *sistemi* Ω , corrispondenti, nei singoli piani, ai punti dell'altro piano (o anche alle rette; poichè punti e rette sono ora sistemi ∞^2 di unioni, fra loro equivalenti) sono caratterizzati da due proprietà analoghe alle precedenti, e che si potrebbe dire sono ancora le stesse, limitate al campo infinitesimale:

a) Poichè ogni elemento appartiene a un unico punto è a un'unica retta, così: *In ogni sistema Ω vi sarà una e una sola curva (γ) contenente un elemento generico assegnato* (linearità nel campo infinitesimale).

b) Due punti (e così due rette) infinitamente vicini hanno a comune un solo elemento, il quale è altresì l'unico elemento dell'un punto (o retta) che sia in posizione unita con un elemento dell'altro. Ne segue che, entro un sistema Ω , una γ generica avrà con ciascuna delle sue infinitamente vicine una sola coppia di elementi *variabili* in posizione unita; quindi anche *una sola intersezione variabile, una sola tangente comune variabile*. Le intersezioni (e le tangenti comuni) di una determinata γ colle singole sue infinitamente vicine sono cioè tutte fisse, tranne una soltanto. In altri termini, adottando un noto concetto del Severi, *il sistema Ω ha come serie caratteristica una g_1^1* .

(1) E precisamente di tre trasformazioni complessivamente; valendosi di un sistema ∞^2 di curve, lineare e omaloidico, sia come luogo, sia come involucro; p. es., di un sistema di coniche fra loro osculatrici in un punto fisso.

Chiameremo d'ora in poi *sistema* Ω anche qualsiasi sistema ∞^2 di curve piane irriducibili soddisfacente alle due proprietà ora enunciate, includendo fra essi anche il sistema ∞^2 dei punti (come particolari unioni). In una trasformazione di contatto birazionale, ogni sistema Ω si muta pure in un sistema Ω . Le singole curve (γ) di un sistema Ω sono curve razionali, perchè riferite biunivocamente al sistema ∞^1 delle loro infinitamente vicine; ed è pure razionale ogni sistema Ω , come ente ∞^2 , perchè, ad es., le γ passanti per un punto fisso, o tangenti a una data retta, costituiscono altrettanti enti razionali ∞^1 contenuti in Ω .

Una trasformazione di contatto birazionale fra due piani si può individuare dando nei piani stessi due sistemi Ω arbitrari, uno dei quali si può supporre che sia il sistema ∞^2 dei punti o delle rette, e ponendo fra i due sistemi, come enti razionali ∞^2 , una trasformazione birazionale arbitraria. (Anche qui è manifesta l'analogia colle trasformazioni cremoniane). A una curva qualsiasi dell'un piano, che si può pensare come involuppo di ∞^1 curve γ del primo sistema Ω , corrisponde l'involuppo delle curve rispettivamente omologhe a questa; e le due curve, se algebriche, saranno altresì in corrispondenza birazionale.

L'*aequatio directrix* (2) del numero precedente, quando ψ sia un polinomio nelle quattro variabili indicate, definisce fra i due piani una trasformazione di contatto algebrica, ma in generale non birazionale. Perchè sia tale, occorre e basta che i due sistemi ∞^2 di curve rappresentati da $\psi = 0$ quando vi si considerino x, y come coordinate e x_t, y_t come parametri, oppure viceversa, soddisfacciano entrambi alla proprietà *a*) di cui sopra, oppure entrambi alla proprietà *b*). Invero la proprietà *a*) dell'uno equivale alla proprietà *b*) dell'altro; dire che due punti (x, y) infinitamente vicini individuano una γ passante per essi è dire che la γ' corrispondente a uno di quei punti, pensata come fissa, ha colle sue infinitamente vicine una sola intersezione $(x' y')$ variabile.

Come esempi semplici di sistemi Ω , all'infuori delle reti omaloidiche e sistemi duali, indichiamo:

1° Il sistema delle coniche tangenti a una conica fissa η in un punto fisso M e in un secondo punto variabile.

2° Il sistema delle quartiche piane aventi tre punti doppi fissi, e tangenti (in punti variabili) a tre coniche fisse passanti per quei punti.

4. Esaminiamo più da vicino di quale tipo siano le condizioni cui soddisfanno le curve γ di un sistema Ω .

Già si è detto che le γ sono curve razionali. Le C^n piane razionali, generalmente irriducibili, dipendono da $\frac{n(n+3)}{2} - \binom{n-1}{2} = 3n - 1$ parametri, e formano un unico sistema continuo, non lineare se $n > 2$, della dimensione accennata. Entro questo sistema, la curva generica ha $\binom{n-1}{2}$

punti doppi, che già assorbono $(n-1)(n-2)$ sue intersezioni con ognuna delle sue infinitamente vicine; ne rimangono perciò $3n-2$ variabili. Il detto sistema ∞^{3n-1} ha dunque come serie caratteristica una g_{3n-2}^3 (completa). Per staccare da esso un sistema ∞^2 con g_1^1 caratteristica, dobbiamo imporre alle sue curve $3(n-1)$ condizioni ulteriori, implicanti complessivamente, per ciascuna curva, un egual numero di intersezioni fisse colle sue infinitamente vicine.

Chiameremo *gruppo caratteristico principale* di una curva del sistema Ω , e più generalmente della curva generica γ di un qualsiasi sistema continuo di dimensione ≥ 2 , l'insieme dei punti comuni a questa curva e a tutte quelle ad essa infinitamente vicine. Sono certamente punti caratteristici principali i punti basi del sistema proposto; gli eventuali punti multipli variabili di una γ generica; infine, se le γ sono tutte tangenti a una curva fissa, è ancora punto caratteristico principale di ogni γ il suo punto di contatto con questa curva fissa. Ed è facile convincersi che non sono possibili altri casi ⁽¹⁾. Invero, al variare di γ entro il sistema continuo proposto, un punto caratteristico principale, il quale non sia punto base del sistema, varierà anch'esso; e sono possibili due casi:

- 1° Che questo punto descriva l'intero piano;
- 2° Che esso vari solamente sopra una linea.

Basterà dimostrare che per un punto caratteristico principale, il quale sia *semplice* per la γ (e non punto base), dovrà verificarsi sempre il secondo di questi casi ⁽²⁾; poichè allora, evidentemente, la linea luogo di questo punto caratteristico farà parte dell'involuppo di un sistema ∞^1 generico di γ , e perciò tutte le γ saranno ad essa tangenti. Supponiamo pel momento che si tratti soltanto di un sistema continuo ∞^2 di linee γ ; e che un punto caratteristico principale della γ generica, semplice per essa, descriva, se possibile, l'intero piano. Allora un punto generico P_0 del piano, che pensiamo fissato, sarà punto caratteristico principale (e punto semplice) solo per un insieme discreto di curve γ , insieme che designeremo con $|\gamma_0|$; e le tangenti a queste γ in P_0 formeranno pure un insieme discreto $|t_0|$. Consideriamo un sistema ∞^1 generico Γ di curve γ , contenente una delle $|\gamma_0|$; quel punto caratteristico principale che, per γ coincidente con questa γ_0 , cade in P_0 , al variare di γ a partire da quest'ultima posizione, entro Γ , descriverà una linea involuppo di tali γ , e perciò tangente in P_0 alla γ_0 considerata, quindi a una delle t_0 . Ne segue che, nel sistema continuo dei punti caratteristici principali cui appartiene P_0 , non vi sono punti infinitamente vicini a P_0 .

(1) È questa una proprietà notevole e interessante dei sistemi continui almeno ∞^2 di curve piane, anche indipendentemente dalla particolare applicazione che ne è fatta nella questione presente. Il prof. BENIAMINO SEGRE ne ha data un'altra dimostrazione, semplice e luminosa, che verrà pubblicata prossimamente.

(2) Invece un punto doppio variabile della γ generica descrive generalmente l'intero piano.

stesso in direzioni diverse dalle t_0 ; e rimane così escluso che P_0 , variando, possa descrivere l'intero piano. Il risultato si estende facilmente ai sistemi continui di curve di dimensione > 2 : invero un sistema così fatto può considerarsi descritto da un sistema ∞^2 variabile, obbligato a contenere sempre un sistema ∞^1 fisso generico Δ ; e allora la linea stessa descritta da P_0 al variare di γ entro Δ sarà pure luogo del punto P_0 per ogni posizione di quel sistema ∞^2 , e per conseguenza per l'intero sistema proposto.

Ritorniamo ora al nostro sistema Ω , la cui curva generica γ deve avere $3(n-1)$ punti caratteristici principali in più dei $(n-1)(n-2)$ già assorbiti dai punti doppi. Ciascuno di quei $3(n-1)$:

o cade in un punto semplice della γ , e allora o è punto base, oppure punto di contatto di tale γ con una linea fissa;

oppure cade in un punto almeno doppio per la γ . Ora, con un breve calcolo, si verifica che un punto doppio di una γ generica può assorbire più di due punti caratteristici principali solamente quando esso sia punto base, oppure una cuspide, o infine quando sia vincolato a stare su di una linea fissa alla quale inoltre uno dei rami di γ che ne escono debba essere tangente. Ma quest'ultimo caso si esclude facilmente, perchè i punti caratteristici principali che cadono in punti semplici di γ assorbono un numero di condizioni, fra le $3(n-1)$, eguale a quello dei punti stessi (non potendosi mai avere una serie caratteristica di dimensione superiore all'ordine), e altrettanto deve perciò avvenire per i punti caratteristici principali in più che cadono in punti doppi di γ ; mentre nell'ipotesi indicata due condizioni distinte portavano, per un punto doppio, l'aggiunta di un solo punto caratteristico principale in più.

Si osservi poi che un punto base k^{to} può considerarsi, anche nel caso $k=1$, come una unione, qui sostituita a una linea, colla quale le γ debbano avere k contatti; per le γ , già razionali, ciò implica solo k condizioni semplici ulteriori, e d'altra parte il punto k^{to} assorbe $\binom{k}{2}$ fra i punti doppi, quindi k^2-k dei punti caratteristici principali precedenti, ai quali se ne aggiungono appunto altri k , per formare un totale di k^2 .

Supposto pertanto che la γ generica del sistema Ω abbia $p (\geq 0)$ cuspidi, queste implicheranno un egual numero di condizioni fra le $3(n-1)$ suddette, e assorbiranno altrettanti punti caratteristici principali in più; e le altre $3(n-1)-p$ condizioni consisteranno tutte in contatti con linee algebriche assegnate, coll'intesa che si potranno avere anche più contatti con una stessa linea, contatti di ordine superiore, contatti in punti assegnati (che assorbiranno sempre un numero corrispondente di condizioni distinte); e che queste linee, come unioni, potranno altresì essere sostituite da punti ⁽¹⁾.

(1) La curva generica di un sistema Ω non può invece avere punti multipli variabili di ordine > 2 . Ciò si spiega col fatto che, per una curva razionale, variabile in un

Poichè la γ generica, razionale con ρ cuspidi, è di classe $v = 2(n-1) - \rho$, onde $3(n-1) - \rho = n + v - 1$, si potrà dire che Ogni sistema Ω si compone delle curve razionali di un certo ordine n e della classe v , assoggettate inoltre a $n + v - 1$ condizioni ulteriori, consistenti in altrettanti contatti con unioni algebriche assegnate (o casi particolari). Imponendo però a una curva razionale di dato ordine n e classe v di avere $n + v - 1$ contatti con unioni algebriche comunque assegnate, si ha un sistema ∞^2 soddisfacente alla condizione *b*) enunciata al numero precedente, ma in generale non alla condizione *a*). Perchè sia soddisfatta anche quest'altra condizione, dovranno le unioni cui le curve sono tangenti essere scelte con particolari criteri, che non sono per ora in grado di precisare.

Idromeccanica. — *A proposito di due recenti Note di M. Pascal e C. Ferrari.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Mi riferisco alla Nota di M. Pascal, *Sul profilo laminare rettilineo*⁽²⁾ per osservare che anche alla formola (5) da lui stabilita a p. 551, è applicabile l'osservazione che, tanto io quanto il Finzi, ebbimo a fare nei riguardi della Nota di P. Straneo, *Intorno al teorema di Kutta-Joukowski*⁽³⁾ e cioè che per il fatto che l'integrale $\int_{\gamma} w^2 d\bar{z}$ è costante quando è riferito

a un'ellisse di un sistema omofocale, non è senz'altro detto che esso debba mantenere lo stesso valore costante quando l'ellisse degenera nel segmento focale, agli estremi del quale la funzione integranda presenta singolarità.

La stessa osservazione sostanzialmente si può fare al Ferrari il quale al contorno ellittico sostituisce un contorno composto di archi di parabola⁽⁴⁾.

sistema continuo, la riunione di $\binom{k}{2}$ punti doppi in un unico punto *k*pl_o, non peranco assegnato, implica $k - 2$ condizioni semplici, cui non corrisponde alcun aumento nel numero dei punti caratteristici principali che ne sono assorbiti.

(1) Presentata nella seduta del 20 maggio 1928.

(2) Questi « Rendiconti », vol. VII, fasc. 7^o, p. 548.

(3) Questi « Rendiconti », ibidem, p. 538.

(4) Questi « Rendiconti », vol. VII, fasc. 6^o, p. 487.

Idromeccanica. — *Sulle azioni idrodinamiche in prossimità di salienti.* Nota ⁽¹⁾ del CORRISP. U. CISOTTI.

SALIENTI ANGOLOSI.

Potenziale cinetico. — Si consideri, nel piano $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$, la parte di piano determinata dalle limitazioni seguenti: $0 \leq \rho \leq +\infty$, $0 \leq \theta \leq \alpha$. Sia essa sede di un moto laminare, irrotazionale, permanente ⁽²⁾. Chiamando $f = \varphi + i\psi$ il potenziale cinetico, ove φ = potenziale di velocità e ψ = funzione di corrente, colla posizione

$$(1) \quad f = C \bar{z}^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad C = \text{costante reale},$$

risulta definita una corrente, in cui le semirette $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$ si comportano come pareti rigide; ciò è ben noto e del resto scende immediatamente. Infatti, ponendo $z = \rho e^{i\theta}$, si ricava dalla precedente:

$$(2) \quad \varphi = C \rho^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}, \quad \psi = C \rho^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha},$$

e dalla seconda di queste scende che $\psi = 0$ per $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$, dunque poichè sulle due semirette ψ è costante dello stesso valore, si tratta di

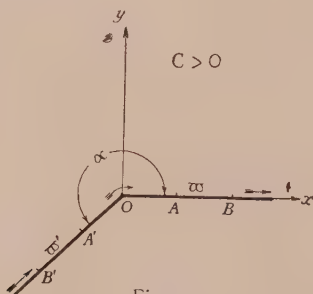


Fig. 1.

un'unica linea di flusso. Risulta ancora dalle (2) che se $C > 0$, φ varia da $-\infty$ a 0 percorrendo la semiretta $\theta = \alpha$ in senso convergente al punto $z = 0$ e da 0 a $+\infty$ percorrendo l'asse reale in senso divergente dall'origine (v. fig. 1). Se $C < 0$ la parete bilatera viene percorsa in senso opposto.

(1) Presentata nella seduta del 18 novembre 1928.

(2) Cfr. la mia *Idromeccanica piana*, Milano, Tamburini, parte prima 1921, parte seconda 1922.

Circolazione. — In quanto al significato della costante C , dalla prima delle (2) si deduce che per $\theta = 0$ è $\varphi = C\rho^{\frac{\pi}{\alpha}}$, ed essendo $\varphi = C$ per $\rho = 1$ e $\varphi = 0$ per $\rho = 0$ scende che C è la circolazione lungo il segmento unitario di parete ω a partire dal vertice O : essa è valutata positivamente nel verso positivo dell'asse reale e negativamente nel verso opposto.

Velocità. — Da (1), applicando la nota formula ⁽¹⁾

$$(3) \quad w = \frac{df}{dz},$$

si ottiene la seguente espressione complessa della velocità:

$$(4) \quad w = \frac{\pi C}{\alpha} z^{\frac{\pi}{\alpha} - 1}.$$

Se $\alpha = \pi$, le due pareti rigide sono per diritto e occupano tutto l'asse reale: si ha la corrente traslatoria uniforme di velocità $w = C$ nel semipiano delle ordinate positive. Se $\alpha < \pi$, la velocità si annulla nel vertice $z = 0$ e diviene infinita all' ∞ : in tal caso il vertice è un *rientrante* ⁽²⁾. Infine, se $\alpha > \pi$ si ha $\lim_{|z| \rightarrow \infty} w = 0$, cioè siamo in presenza di una corrente *locale* attorno al vertice, che diviene evanescente coll'allontanarsi da esso; ma la velocità diviene infinita al vertice: si tratta di un *saliente* ⁽³⁾. Noi ci riferiremo a quest'ultimo caso, supponendo

$$(5) \quad \pi < \alpha \leq 2\pi.$$

Azioni dinamiche. — Valutiamo la risultante \mathbf{R} delle azioni dinamiche della corrente sul tratto $OA = l$ di parete $\theta = 0$. Applicando la nota formula di Blasius

$$R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int_{A \rightarrow O} w^2 dz,$$

R_x = componente di \mathbf{R} secondo l'asse x , R_y = componente di \mathbf{R} secondo l'asse y , μ = densità costante del liquido, si ha per la (4):

$$(6) \quad R_y + iR_x = -\frac{\pi^2 \mu C^2}{2\alpha^2} \int_l^0 z^{\frac{2\pi}{\alpha} - 2} dz = \frac{\pi^2 \mu C^2 l^{\frac{2\pi}{\alpha} - 1}}{2\alpha(2\pi - \alpha)},$$

risultato che vale manifestamente se $\alpha < 2\pi$.

(1) Cfr. loc. cit., n. 31.

(2) Cfr. loc. cit., n. 74.

(3) Cfr. loc. cit., n. 74.

Da queste scendono:

$$(7) \quad R_x = 0, \quad R_y = \frac{\pi^2 \mu C^2 l^{\frac{2\pi}{\alpha}-1}}{2\alpha(2\pi - \alpha)}.$$

Siccome \mathbf{R} è somma di vettori paralleli equiversi, esiste tra O e A un punto ζ_0 in cui il loro momento è nullo; in tale punto si ha ⁽¹⁾:

$$\int_{A \rightarrow O} w^2 (\zeta - \zeta_0) d\zeta = 0,$$

da cui, tenendo presente la (4), si ricava

$$(8) \quad \zeta_0 = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) l.$$

Concludendo: risulta dalle (7) e (8) che il tratto OA di parete ω subisce un complesso di azioni che equivalgono ad una forza unica, applicata al punto (8), normale al segmento, diretta dalla parte del fluido e di intensità

$$(9) \quad \frac{\pi^2 \mu C^2 l^{\frac{2\pi}{\alpha}-1}}{2\alpha(2\pi - \alpha)}.$$

Insomma l'effetto complessivo sul segmento si manifesta in una tendenza della massa fluida ad *aspirare* (o *succhiare*) il segmento in discorso. Le stesse conclusioni si hanno se si prende a considerare un segmento $OA' = l'$ dell'altra parete ω' . Se si prende $OA' = OA$ la risultante delle azioni che si esercitano sul tratto $A'O$ della parete è diretta secondo la bisettrice dell'angolo α verso l'interno del campo e di intensità

$$(10) \quad \frac{\pi^2 \mu C^2 l^{\frac{2\pi}{\alpha}-1}}{\sqrt{2\alpha(2\pi - \alpha)}};$$

l'angolo predetto viene *aspirato* (o *succhiato*) dalla corrente con una intensità (10). Si noti che tale *aspirazione diviene nulla per* $l = 0$.

Caso di $\alpha = 2\pi$. - Nel caso di $\alpha = 2\pi$ (fig. 2) la funzione integranda dell'integrale che compare nella (6) è $\frac{1}{\zeta}$, che presenta un polo nel punto $\zeta = 0$. In tal caso fissato un segmento $AB = l$ di ω e il segmento contrapposto $A'B'$ di ω' , si ha per l'azione dinamica complessiva sulle due faccie del segmento:

$$R_y + iR_x = -\frac{\mu C^2}{8} \int_{\substack{B \rightarrow A \\ A' \rightarrow B'}} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

(1) Cfr. loc. cit., n. 105.

Ma, per i classici teoremi di Cauchy, si ha (v. figura 2):

$$\int_{\substack{B \rightarrow A \\ A' \rightarrow B'}} \frac{d\chi}{\chi} = - \int_{\gamma} \frac{d\chi}{\chi} + \int_{\gamma'} \frac{d\chi}{\chi} = 0, \quad \text{i sensi di integrazione essendo ovvii,}$$

per cui l'azione complessiva della massa liquida sulle due faccie del segmento è identicamente nulla e tale rimane quando γ si fa rinserrare comunque

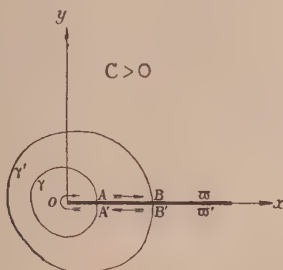


Fig. 2.

al punto $\chi = 0$. Dunque l'azione dinamica complessiva sopra le due faccie di un segmento OB qualsiasi è nulla: non vi è alcuna aspirazione (o succhiamento).

Si rilevi che se non si porge attenzione al fatto che l'espressione (10) dell'intensità dell'azione sullo spigolo è stata legittimamente dedotta soltanto per $\alpha < 2\pi$ (a cagione dell'integrale che compare nella (6)), si sarebbe tentati di passare al limite di (10) per $\alpha = 2\pi$, che è ∞ ; si sarebbe tratti erroneamente a constatare una aspirazione di intensità infinita, invece che nulla, come il calcolo diretto e ortodosso esige.

SALIENTI ROTONDI.

Potenziale cinetico. — Prendiamo ora in esame il caso di un saliente rotondo, foggiato come indica la figura 3: la parete rigida è costituita ora dai due tratti rettilinei ω e ω' ad angolo $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$, collegati ad un arco circolare γ di centro $\chi = 0$ e raggio a . La funzione

$$(11) \quad f = \frac{1}{4} C \left\{ \left(\frac{\chi}{a} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} + \left(\frac{a}{\chi} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \right\},$$

è il potenziale cinetico di una corrente liquida che scorre nella ragione A del piano $\chi = \rho e^{i\theta}$ ove $\rho \geq a$, $0 \leq \theta \leq \alpha$.

Circolazione. — Se $C > 0$ il senso della corrente è quello indicato dalle frecce nella figura 3. Da (11) scende che essendo φ il potenziale della velocità (parte reale di f), risulta:

$$(12) \quad C = \varphi_P - \varphi_{P'},$$

essendo φ_P e $\varphi_{P'}$ i valori di φ nei punti P e P' di collegamento di γ con ω e ω' : dunque C è la *circolazione sull'arco* γ , valutata positivamente nel verso orario.

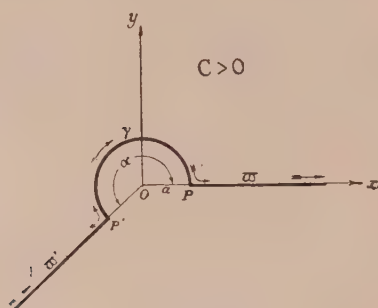


Fig. 3.

Caso di $\alpha = \pi$. - Per $\alpha = \pi$ (fig. 4) la (11) diviene:

$$(13) \quad f = \frac{1}{4} \cdot C \left(\frac{\tilde{z}}{a} + \frac{a}{\tilde{z}} \right),$$

che è la ben nota⁽¹⁾ espressione del potenziale cinetico di una corrente di velocità assintotica parallela all'asse reale e di valore

$$(14) \quad V = \frac{C}{4a},$$

che investe un profilo circolare con centro nel punto $z = 0$ e raggio a . Ciò doveva essere se si pensa che risultando da (13) che f è reale sull'asse

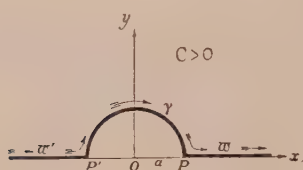


Fig. 4.

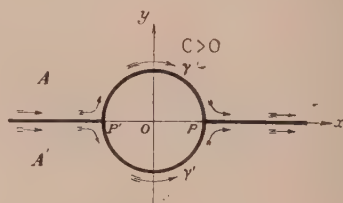


Fig. 5.

reale, la (13) continua a valere per riflessione analitica, rispetto a questo asse, anche nel campo A' simmetrico di A rispetto a quest'asse (fig. 5): il contorno γ costituisce colla sua immagine riflessa γ' il contorno completo del profilo circolare.

(1) Cfr. loc. cit., N. 72.

Velocità. — Poichè la velocità complessa è in ogni caso, per le (3) e (11), definita dalla seguente relazione:

$$(15) \quad w = \frac{\pi C}{4 \alpha \tilde{\gamma}} \left\{ \left(\frac{\tilde{\gamma}}{a} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} - \left(\frac{a}{\tilde{\gamma}} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \right\},$$

per $\alpha = \pi$, si ritrova per la velocità assintotica, $|\tilde{\gamma}| \rightarrow \infty$, il valore (14), mentre per $\pi < \alpha \leq 2\pi$ è $\lim_{|\tilde{\gamma}| \rightarrow \infty} w = 0$, si tratta cioè di una corrente locale, cioè che diviene evanescente in punti lontani dal saliente γ .

Altra espressione del potenziale cinetico. — Si rilevi ancora che l'espressione (11) del potenziale cinetico contiene, come caso particolare, l'espressione (1) del potenziale cinetico della corrente nel caso del saliente angolare. Basta infatti assumere nella (11)

$$(16) \quad C = 4ka^{\frac{\pi}{\alpha}};$$

allora la (11) diviene:

$$(17) \quad f = k \left(\tilde{\gamma}^{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{a^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{\tilde{\gamma}^{\frac{\pi}{\alpha}}} \right),$$

e, passando al limite per $a \rightarrow 0$, si ha senz'altro (1), dove la costante C è ora sostituita con k .

Azioni dinamiche su γ . — Applicando all'arco circolare γ la formula di Blasius si ha

$$R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int_{\gamma} w^2 d\tilde{\gamma},$$

l'integrazione lungo γ dovendo essere effettuata nel senso antiorario.

Ora, per la (15), si ricava sopra γ :

$$w = \frac{i\pi C}{2a\alpha} e^{-i\theta} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\alpha}, \quad d\tilde{\gamma} = iae^{i\theta} d\theta,$$

perciò si ottiene:

$$R_y + iR_x = \frac{\pi^2 \mu C^2 i}{8 a \alpha^2} \int_0^{\alpha} e^{-i\theta} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi\theta}{\alpha} d\theta = \frac{i\pi^4 \mu C^2 e^{-i\frac{\alpha}{2}} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 a \alpha^2 (4\pi^2 - \alpha^2)}.$$

Risulta da questa che le azioni dinamiche della corrente sull'arco γ equivalgono ad un'unica forza applicata ad un punto dell'asse di simmetria dell'arco, diretta verso l'interno del campo e di intensità

$$(18) \quad R = \frac{\pi^4 \mu C^2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{2 a \alpha^2 (4\pi^2 - \alpha^2)}.$$

Dunque l'arco γ subisce da parte della massa fluida una *aspirazione* (o *succhiamento*).

Caso $\alpha = 2\pi$. - Ha molto interesse il caso particolare di $\alpha = 2\pi$ (fig. 6). Le (11), (15) e (18) divengono allora:

$$(19) \quad \begin{cases} f = \frac{1}{4} C \left(\sqrt{\frac{\zeta}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\zeta}} \right), \\ w = \frac{C}{8\zeta} \left(\sqrt{\frac{\zeta}{a}} - \sqrt{\frac{a}{\zeta}} \right), \\ R = \frac{\pi\mu C^2}{64a}, \end{cases}$$

la risultante delle azioni dinamiche sul profilo circolare essendo orientata come l'asse reale negativo. Scende dalla seconda delle precedenti che nel-

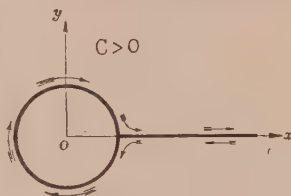


Fig. 6.

l'attraversare l'asse reale positivo, in qualunque punto $\zeta \geq a$, la velocità conserva il medesimo valore, vi è soltanto discontinuità di direzione, ciò significa che vi è continuità di pressione. Se ne deduce che, se si considera il solo profilo circolare, le (19) definiscono una corrente *locale* che avvolge, una volta sola, il profilo circolare e presenta discontinuità del verso della velocità nei punti $\zeta \geq a$ dell'asse reale. Il profilo circolare è *aspirato* (o *succhiato*) dalla corrente nel senso dell'asse reale negativo. Mi propongo di riprendere in seguito questa soluzione per mostrare il suo intervento nel problema del paradosso di d'Alembert e in un nuovo tipo di forza sustentatrice.

Osservazione. - Per $\alpha = 2\pi$, la forma (16) di C diviene $C = 4k\sqrt{a}$, per cui la terza di (19) diviene:

$$R = \frac{\pi\mu k^2}{4}.$$

Poichè tale risultato è indipendente da a si sarebbe tratti a presumere che esso continui a valere anche per $a = 0$; si è dimostrato altra volta la fallacia di un tale procedimento⁽¹⁾, qui ne facciamo un'altra constatazione diretta, poichè abbiamo visto che il calcolo diretto porta al risultato $R = 0$.

(1) Cfr. CISOTTI e FINZI, Osservazioni sulla Nota di P. Straneo: « Intorno al teorema di Kutta-Joukowski ». (Questi « Rendiconti », vol. VII, 1° sem., 1928, pp. 538-543. È in

Caso $\alpha = \pi$. — Altro caso pure interessante è quello di $\alpha = \pi$ (fig. 4); si ricava dalla (18), tenendo presente la (14):

$$(19) \quad R = \frac{\mu C^2}{6a} = \frac{8}{3} \mu a V^2.$$

Se ci riferiamo al problema del disco circolare investito dalla corrente indefinita (fig. 5) di velocità assintotica di valore V si può avere una interessante interpretazione della (19). Basta rilevare che anche il profilo γ' viene aspirato dalla corrente con intensità (19). Se in P e P' i due archi semicirculari γ e γ' non fossero rigidamente saldati fra loro, ma semplicemente appoggiati o tutt'al più leggermente saldati, essi verrebbero staccati in direzione normale alla direzione assintotica della corrente, con un complesso di azioni dinamiche equivalenti a due forze opposte della medesima intensità (19). Ciò spiega anche perchè se il disco inizialmente circolare è di materiale solido elastico (cioè suscettibile di deformazioni infinitesime), esso deve assumere forma ellittica con l'asse maggiore normale alla direzione assintotica della corrente ⁽¹⁾.

CONCLUSIONE.

Qualunque sia la forma dei salienti considerati (angolosi o rotondi) e quale si sia l'angolo α , compreso fra π e 2π (estremi inclusi) le azioni dinamiche sopra una porzione *finita* di saliente (e anche, in generale, su qualunque porzione finita di contorno) si manifestano sotto forma di aspirazione o succhiamento della porzione stessa da parte della corrente fluida, caratterizzate globalmente da una risultante⁽²⁾: il che risponde a una concezione di uso corrente tra gli aerotecnici. *Ma si noti bene, che tale azione diviene in ogni caso (qualunque sia α) evanescente col tendere a zero della porzione considerata.*

base a tale equivoco che si è adottata da alcuni idrotecnici la suaccennata espressione di R (cfr., ad es., GRAMMEL, *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges*, Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1917, 3).

(1) Ciò è conforme al caso di una corrente spaziale che investe un solido elastico sferico (cfr. CISOTTI, *Deformazione di una sfera elastica dovuta al suo moto in seno ad un liquido*, «Nuovo Cimento», serie VI, vol. II, 1911).

(2) Tale risultante è sempre nulla quando il saliente è angolosò, con angolo 2π (fig. 2).

Biologia. — *Ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina e gli acidi minerali*⁽¹⁾. Nota II⁽²⁾ del Socio straniero A. L. HERRERA.

Tecniche differenti hanno dato i risultati che vengono descritti in questa Nota. L'identificazione delle forme è approssimata e non esatta. Queste forme non si evolvono e non si muovono. Si possono colorare coll'ematossilina e si conservano nella glicerina.

FIGURA I.

Esperienza n. 6008; 28 maggio 1928. — Acido fluoridrico: parti 2,5; glicerina: 1; ovalbumina solida, polverizzata e setacciata finamente. In scatola di Petri protetta colla resina o colla cera, si agita l'albumina coll'acido. Amebe. B. F. Howit, *The cultivation of « endoameba gingivalis »*, University of California 1925, vol. 28, tav. II, fog. II. De Fromentel, *Etudes sur les Microzoaires*, Paris 1874, tav. XXIX 6 a, 6 f.

Confrontare queste figure colle artificiali.

Esperienza n. 6033; 8 giugno 1928. — Acido fluoridrico: 2; glicerina: 1; ovalbumina polverizzata finamente. Temperatura: 38° c. Capsula di piombo di 1 ccm³; amebe nucleate finamente granulari. Dimensioni: 26-52 per 10-28; 60-28 per 36 micron. Diverse.

Esperienza n. 6048; 16 giugno 1928. — Acido fluoridrico: 5 ccm³; ovalbumina finamente polverizzata. Temperatura: 38°. Capsula di piombo 1 ccm³. Durata del contatto: 50 minuti. Dimensioni: 55 per 44; 60 per 32; 55 per 15. Amebe granulari, leucociti. Confrontare coi leucociti di una stella di mare. Chatin, *La cellule*, Paris 1892, p. 112.

Esperienza n. 6054; 22 giugno 1928. — Acido fluoridrico puro. Scaglie d'ovalbumina di 4 micron di spessore. Laminette protette con la resina. Temperatura: 38°. Dimensioni: 42-22 per 6; 20 per 37; 55 per 40. Confrontare queste amebe colla *Colpoda cucullus*. Verworn, *Physiologie générale*, Paris 1900, p. 231, fig. 84 k.

Esperienza n. 6077; 28 giugno 1928. — Acido fluoridrico: 2; glicerina: 1; scaglie d'ovalbumina di dimensioni inferiori ad un micron, setacciata. Contatto: 1 secondo. Si lava. Dimensioni: 68-28-68-50-51 micron. Amebe nucleate. Confrontare colle cellule pigmentarie della corioide. Schaeffer,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio degli Alti Studi Biologici di Messico D. F.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 novembre 1928.

The essential of Hystologie, New York 1917, p. 504, fig. 669. *Anthaphysa Mulleri*. Du Jardin, « Infusoir ». Atlas, tav. 3, fig. 19.

Esperienza n. 6085; 4 luglio 1928. — Acido fluoridrico puro: 1 ccm³. Scaglie d'ovalbumina di dimensioni inferiori ad un micron: gr. 0.021. Si

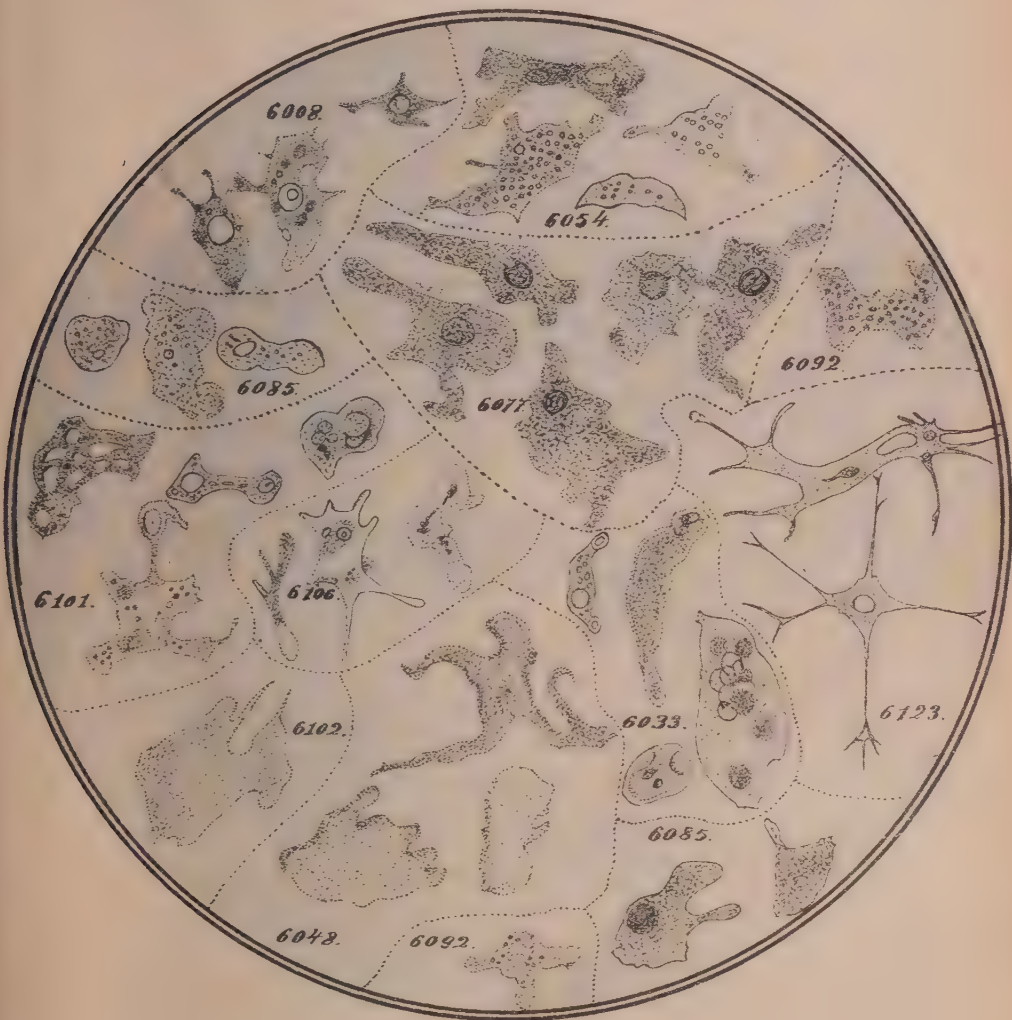


Fig. 1.

agita su laminetta protetta con resina. Contatto: 16 secondi. Dimensioni: 17-33-24-37-40 micron. Confrontare coll'*Aethalium septicum*. Verworn, *Physiologie générale*, Paris 1900, p. 85, fig. 15, e *Pelomyxa palustris*. Delage et Hérourard, *Zoologie concrète*, Paris 1896, p. 100, fig. 112.

Esperienza n. 6092; 10 luglio 1928. — Acido fluoridrico: 1; glicerina: 4; ovalbumina solida: 0.50; acqua: 10. Contatto: 10 secondi. Si lava. Dimensioni: 40 micron. Ameba granulare. Confrontare con *Protomonas*. Delage et Hérouard, loc. cit., p. 74, fig. 63 e.

Esperienza n. 6101; 11 luglio 1920. — Acido fluoridrico puro; cloruro sodico: 1; ovalbumina: 1; acqua: 10. Goccioline su laminetta protetta. Vi si versa l'acido fluoridrico. Dimensioni: 40-48-40-30 micron. Amebe vacuolizzate. Schaeffer, loc. cit., tav. 3, figg. 1-8. *Empusa muscae*. Coupin, *Atlas des champignons parassites*, Paris, Doin, tav. XIV, fig. 4.

Esperienza n. 6102; 16 giugno 1928. — Acido fluoridrico: 5 ccm³; ovalbumina solida: 1; gomma arabica: 1; acqua: 10. Goccioline su lastrina protetta. Contatto coll'acido: 10 secondi. Dimensioni: 47 micron. Amebe mostranti fili di granulazione.

Esperienza n. 6106; 13 luglio 1928. — Acido fluoridrico: 1 ccm³; bianco d'uovo liquido naturale: 5; gomma dragante: 1; acqua: 20. Contatto: 15 secondi. Goccioline su lastrina protetta colla resina. Dimensioni: 34-46-22 micron. Amebe con pseudopodi ialini. Confrontare: *Ameba (Dactylosphaera) polypodi*. Delage et Hérouard, loc. cit., tav. 96, fig. 102.

Esperienza 6123; 26 luglio 1928. — Acido fluoridrico puro; bianco d'uovo: 20; soda caustica: 0.02; acqua: 2; olio d'oliva: 22. Si agita in un mortaio e si mette in contatto coll'acido. Dimensioni: 50-80 micron. Cellule multipolari. Protoplasma vacuolizzato, pseudopodi. Confrontare: Schaeffer, loc. cit., p. 101, fig. 133 b, b. Cellule cartilaginose.

FIGURA II.

Esperienza n. 5774. — Azione dell'acido solforico. Per confrontarlo coll'acido fluoridrico. Acido solforico: 5; acqua: 5; ovalbumina finamente polverizzata proiettata sull'acido. Forme alveolari. Cellule nucleate. Confrontare coi microsporidi. Pfeiffer, *Die Protozoen als Krankheitserreger*. Jena, 1891, p. 136, fig. e.

Esperienza n. 6008; 28 maggio 1928. — Acido fluoridrico: 2.5; glicerina: 1; ovalbumina solida setacciata assai finamente. In scatola Petri protetta. Si agita con una pinza. Dimensioni: 2-8-10-12-11 micron. Cellule con due nuclei, corpi sarcodici vacuolizzati. Disegno a destra.

Esperienza n. 6032. — Acido fluoridrico: 2; glicerina: 1; ovalbumina solida polverizzata. Temperatura: 38°. Capsula di piombo da 1 ccm³. Contatto: ore 4.45'-5.35'. Dimensioni: 10 per 10; 15 per 5; 40 per 40; 32 per 16; 24 per 24 micron. Cellule vacuolizzate. Amebe. Schaeffer, loc. cit., p. 53, fig. 68. Globuli del sangue di rana.

Esperienza n. 6033; 8 giugno 1928. — Acido fluoridrico: 2; glicerina: 2; ovalbumina finamente polverizzata. Temperatura: 38°. Capsula di

piombo da 1 ccm. Dimensioni: 21 per 20; 20 per 20; 28 per 24-26 micron. Aspetto vago di spore.

Esperienza n. 6008. — Disegno a sinistra. Confrontare colle stilospore di *Uredo suaveolens*. Griffith, *The Micrographic Dictionary*, vol. 1, p. 807,



Fig. 2.

fig. 779. Sporangia di *Sphaerita*. Coupin, *Atlas des champignons parasites*. Paris, Doin, tav. IV, 4.

Esperienza n. 6018; 4 giugno 1928. — Acido fluoridrico: 2; glicerina: 1; albumina solida polverizzata. Tra due vetri protetti col balsamo

di Canada e senza copri oggetti. Temperatura: 31°. Contatto da 4^h alle 4^h e 50'; grande goccia di acido. Dimensioni: 30 per 15; 32 per 24; 32 per 22. Imitazione di Coccidi e di spore. Prendono benissimo l'ematossilina in 10 minuti. Confrontare colla spore di *Spirogyra quinina*. Griffith, loc. cit., tav. 5, fig. 21.

Esperienza n. 6054; 22 giugno 1928. — Acido fluoridrico puro. Scaglie d'albumina di 4 micron di spessore. Laminetta protetta colla resina. Temperatura: 38°. Dimensioni: 20 per 24; 30 micron. Amebe granulose.

Esperienza n. 6085 a; 4 luglio 1928. — Acido fluoridrico puro: 1 ccm³. Scaglie d'albumina inferiori ad 1 micron: gr. 0.021. Si agita su lamina protetta per 16 secondi, e si lava. Dimensioni: 60-15-12-10-25-4-13 micron. Amebe. Confrontare con: Amebe. Verworn, loc. cit., p. 365, fig. 142 B.

Esperienza n. 6085 b. — Dimensioni: 59-26-29 micron. Tessuto parenchimatico. Confrontare con *Peridinium ovatum*. Delage et Hérouard, loc. cit., p. 375, fig. 639. Infusorio: *Loxodes rostrum*. Claparède et Lachmann, *Etudes sur les infusoires et les rhyzopodes*, Genève 1859, tav. 17, fig. 2.

Esperienza n. 6101 a; 11 luglio 1928. — Acido fluoridrico puro; cloruro sodico: 1; ovalbumina: 1; acqua: 10; goccioline su lamina protetta. Vi si versa l'acido fluoridrico. Dimensioni: 45-28 micron. Forme di amebe.

Esperienza n. 6101 b. — Le stesse sostanze. Aspetto di cellule con membrana. Foglia di *Hypnum decipiens*. Griffith, loc. cit., tav. 38, fig. 20.

Esperienza n. 6106; 13 luglio 1928. — Acido fluoridrico: 1; ovalbumina: 35; gomma dragante: 5; acqua: 20. Contatto: 45 secondi. Dimensioni: 43 micron. Aspetto di cellule poliedriche.

FIGURA III.

Esperienza n. 6107; 19 luglio 1928. — Io ho cercato di imitare presso a poco la composizione tanto complessa del protoplasma, aggiungendo al bianco d'uovo grassi, zuccheri, gomme che rappresentano i biocolloidi, il gonfiamento dei quali dà origine all'accrescimento secondo Mac Dougal e Fischer. Ecco la formula:

Sapone secco: 1; lattosio: 1; gomma arabica: 1; gomma dragante: 1; acqua: 20. Si tritura in un mortaio. Vi si aggiunge: bianco d'uovo: 22; olio d'oliva: 1. Si mescola ancora in un mortaio, e si sponde in piccola quantità su una lamina protetta colla resina. Vi si aggiunge acido fluoridrico puro: 1. Si lascia agire durante 30 secondi. Questa formula, ancora assai imperfetta, e che dovrà essere sostituita con un miscuglio dei componenti del protoplasma secondo le ultime analisi, dà un bell'aspetto di protoplasma con piccole bande di punti e vacuoli. Confrontare colla cellula vivente. Belzug, *Anatomie e Physiologie végétales*, Paris 1900, p. 15, fig. 17. Baillon, *Anatomie et physiologie végétales*, Paris 1882, p. 7, fig. 5; fitoblasti. Fig. 3,

Myxomyceti. Coupin, *Atlas de Botanique microscopique*, Paris 1908, tav. I.
Cellula della cipolla.

6197.

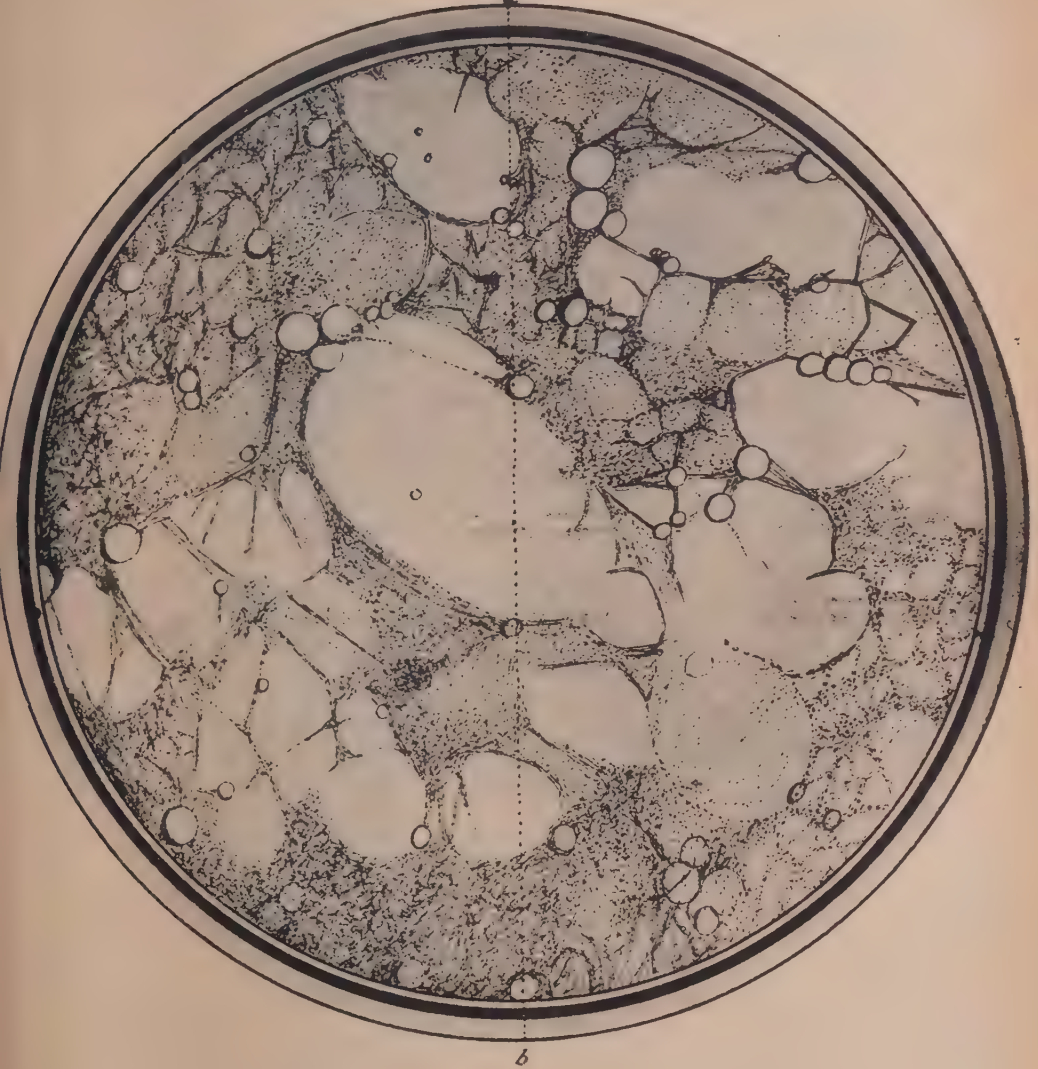


Fig. 3.

CONCLUSIONI.

Questi risultati mostrano la grande varietà delle forme prodotte, variando anche di pochissimo la tecnica, e le analogie crescenti colle strutture viventi.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Intorno ad una trasformazione delle superficie R.* Nota ¹⁾ di R. CALAPSO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Nella presente Nota è studiato il passaggio da una superficie R ad un'altra tale superficie R_1 nell'ipotesi in cui R ed R_1 siano deducibili da una stessa superficie \bar{R} mediante trasformazioni per congruenze (R) aderenti alla stessa.

Riferendomi alla nota osservazione con cui la determinazione delle superficie R si riduce alla ricerca delle superficie isoterme di uno spazio a quattro dimensioni, ho ottenuto il passaggio da R ad R_1 come trasformazione delle superficie isoterme; un'analisi accurata del problema prova che la detta trasformazione si identifica con la D_{11} da me stabilita nella Nota precedente ²⁾.

E assai notevole come la teoria delle superficie R sia anche occasione di scoprire nuove trasformazioni delle superficie isoterme che non difficilmente sarebbero state trovate direttamente.

§ 1. — LE CONGRUENZE (R) ADERENTI AD UNA STESSA SUPERFICIE \bar{R} E LE CORRISPONDENTI SUPERFICIE ISOTERME.

Adottiamo per una data superficie \bar{R} le notazioni usate al § 1 della mia Nota: *Riduzione della deformazione proiettiva di una superficie R ecc.* [questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 8, 1928] per il che le coordinate di un qualunque punto di \bar{R} sono soluzioni del sistema:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right.$$

in cui

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ b = i \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad p = -i \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} \end{array} \right. \quad (i = \sqrt{-1}).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1928.

(2) V. R. CALAPSO. Una nuova trasformazione delle superficie isoterme, questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6^a, 2^o sem., fascicoli 7-8, 1928.

Una congruenza (R) aderente alla data superficie si ottiene conducendo per il punto (x, y, z) la retta di parametri direttori

$$(3) \quad X = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y = \frac{\partial y}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z = \frac{\partial z}{\partial u} + i \frac{\partial z}{\partial v};$$

l'altra [che diremo coniugata alla (R)] si ottiene conducendo per lo stesso punto la retta di parametri direttori

$$(4) \quad X_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y_1 = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z_1 = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v}.$$

2. Dalle (3) per derivazione si ha

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} + i \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} = ip \frac{\partial x}{\partial u} + iq \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \end{cases}$$

donde si desume che X, Y, Z sono soluzioni dell'equazione di Laplace

$$(6) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = q \frac{\partial X}{\partial u} + a \frac{\partial X}{\partial v} + \left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp + i \frac{\partial p}{\partial u} - aq \right) X$$

a cui, per un teorema di Darboux, soddisfano anche le altre tre coordinate della retta che indichiamo con X', Y', Z' .

Similmente si ha dalle (4)

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} - i \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} = -ip \frac{\partial x}{\partial u} - iq \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \end{cases}$$

donde si deduce che X_1, Y_1, Z_1 sono soluzioni dell'equazione

$$(8) \quad \frac{\partial^2 X_1}{\partial u \partial v} = q \frac{\partial X_1}{\partial u} + a \frac{\partial X_1}{\partial v} + \left(\frac{\partial q}{\partial u} - bp - i \frac{\partial p}{\partial u} - aq \right) X_1.$$

3. Qui importa notare, il che si verifica col calcolo diretto, che l'equazione (6) è soddisfatta dalla funzione

$$\tau = e^{\Phi \omega};$$

ne segue che le funzioni

$$\frac{X}{\tau}, \frac{Y}{\tau}, \frac{Z}{\tau}, \quad \frac{X'}{\tau}, \frac{Y'}{\tau}, \frac{Z'}{\tau}$$

soddisfano ad un'equazione di Laplace mancante dell'ultimo termine.

Ponendo allora

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 + ix_2 = \frac{X}{\tau} & , & x_3 + ix_4 = \frac{Y}{\tau} & , & x_5 + ix_6 = \frac{Z}{\tau} \\ x_1 - ix_2 = \frac{X'}{\tau} & , & x_3 - ix_4 = \frac{Y'}{\tau} & , & x_5 - ix_6 = \frac{Z}{\tau} \end{cases}$$

ed interpretando le x_i come coordinate cartesiane di punto in uno spazio euclideo S_6 (a 6 dimensioni), il punto x_i descrive una rete di questo spazio.

A causa della relazione

$$XX' + YY' + ZZ' = 0$$

che lega le sei coordinate della retta, la rete descritta dal punto (x_i) è situata sull'ipercono isotropo

$$(10) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 0.$$

Si verifica senza difficoltà che la detta rete è *ortogonale isoterma e riferita ai parametri isometrici*.

L'altra congruenza (R) dà luogo ad una nuova tale rete; essa si ottiene osservando che la (8) è soddisfatta dalla funzione

$$\tau_1 = \frac{e^{\Phi}}{\omega},$$

dopo di che le coordinate x'_i del punto che descrive la rete trasformata sono date da

$$(11) \quad \begin{cases} x'_1 + ix'_2 = \frac{X_1}{\tau_1} & , & x'_3 + ix'_4 = \frac{Y_1}{\tau_1} & , & x'_5 + ix'_6 = \frac{Z_1}{\tau_1} \\ x'_1 - ix'_2 = \frac{X'_1}{\tau_1} & , & x'_3 - ix'_4 = \frac{Y'_1}{\tau_1} & , & x'_5 - ix'_6 = \frac{Z'_1}{\tau_1} \end{cases}$$

Il procedimento esposto riduce le due congruenze (R) aderenti alla stessa superficie \bar{R} a due reti ortogonali isoterme dell'ipercono isotropo nell' S_6 ; oppure, interpretando le x_i e le x'_i come *coordinate pentasferiche* di punto in un S_4 , si può dire che il procedimento esposto riduce le due congruenze (R) a due superficie isoterme S ed S_1 dello spazio a quattro dimensioni.

§ 2. — LA TRASFORMAZIONE DELLA SUPERFICIE R IN R_1 COME TRASFORMAZIONE DELLE SUPERFICIE ISOTERME.

4. Siamo ora in grado di caratterizzare la trasformazione della superficie R in R_1 [o ciò che è lo stesso della congruenza (R) nella sua coniugata] come trasformazione della superficie isoterma S nella S_1 . Dimostre-

remo che S ed S_1 sono legate dalla trasformazione $D_{m,1}$ da me stabilita nella Nota: *Una nuova trasformazione delle superficie isoterme*, questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6^a, 2^o sem., fascicoli 7-8, 1928.

Allo scopo basta provare che le reti (9) ed (11) dell'ipercono isotropo sono in trasformazione di Cristoffel.

Anzitutto osserviamo che le espressioni di τ e τ_1 precedentemente introdotte danno

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \tau(a - ib) \quad , \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = \tau(q + ip), \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial u} &= \tau_1(a + ib) \quad , \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial v} = \tau_1(q - ip); \end{aligned}$$

indi poniamo per brevità di calcolo

$$l = \frac{X}{\tau} \quad , \quad m = \frac{Y}{\tau} \quad , \quad n = \frac{Z}{\tau} \quad , \quad L = \frac{X'}{\tau} \quad , \quad M = \frac{Y'}{\tau} \quad , \quad N = \frac{Z'}{\tau}$$

ed analogamente

$$l' = \frac{X_1}{\tau_1} \quad , \quad m' = \frac{Y_1}{\tau_1} \quad , \quad n' = \frac{Z_1}{\tau_1} \quad , \quad L' = \frac{X'_1}{\tau_1} \quad , \quad M' = \frac{Y'_1}{\tau_1} \quad , \quad N' = \frac{Z'_1}{\tau_1}.$$

Si ha per derivazione rispetto ad u

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= \frac{i}{\tau} \left(b \frac{\partial x}{\partial u} - a \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) \\ \frac{\partial l'}{\partial u} &= - \frac{i}{\tau_1} \left(b \frac{\partial x}{\partial u} - a \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial l'}{\partial u} = - \frac{\tau}{\tau_1} \frac{\partial l}{\partial u}$$

con le analoghe in m ed n ; di più si trova senza difficoltà

$$\frac{\partial L'}{\partial u} = - \frac{\tau}{\tau_1} \frac{\partial L}{\partial u}$$

e le analoghe in M ed N .

Analogamente, derivando rispetto a v si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial v} &= - \frac{1}{\tau} \left(q \frac{\partial x}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) \\ \frac{\partial l'}{\partial v} &= - \frac{1}{\tau_1} \left(q \frac{\partial x}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial l'}{\partial v} = \frac{\tau}{\tau_1} \frac{\partial l}{\partial v}$$

e sussistono le analoghe in m, n, L, M, N .

Dopo ciò avendosi

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \omega^2$$

e tenendo presenti le (9) e le (11), si potrà scrivere

$$\frac{\partial x'_r}{\partial u} = -\omega^2 \frac{\partial x_r}{\partial u}, \quad \frac{\partial x'_r}{\partial v} = \omega^2 \frac{\partial x_r}{\partial v},$$

le quali mostrano che le reti ortogonali isoterme dell'ipercono isotropo dell' S_6 sono in trasformazione di Christoffel, e la proposizione è stabilita.

Matematica. — *Sull'espressione dell'area di una superficie mediante un integrale doppio.* Nota di R. CACCIOPPOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

1. Data una curva rettificabile $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($a \leq t \leq b$), la lunghezza di una sua porzione variabile risulta funzione additiva dell'insieme base, variabile nell'intervallo (a, b) . Affinchè questa funzione sia assolutamente continua occorre e basta che siano assolutamente continue le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$, ed in tal caso la lunghezza della curva è espressa dall'integrale consueto

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2} dt^{(2)}.$$

Questo risultato non si estende per intero alle superficie quadrabili, potendo non esistere il classico integrale doppio, eppure l'area della superficie risultare assolutamente continua. Basti l'esempio semplicissimo della superficie piana $x = u$, $y = f(u) + v$, $z = 0$, $f(u)$ essendo una funzione continua non derivabile; per cui l'area si identifica con la misura del dominio base, mentre l'integrale doppio $\iint \sqrt{EG - F^2} du dv$ manca, mancando

(1) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(2) Vedi TONELLI, *Sulla rettificazione delle curve*. « Atti R. Acc. Torino », t. 43 (1908).

la derivata parziale $\frac{\partial y}{\partial u}$. Ma come per le curve si dimostra che, essendo

$$(I) \quad x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v)$$

le equazioni di una superficie quadrabile S , condizione necessaria e sufficiente perchè l'area di una porzione variabile di S sia funzione assolutamente continua dell'insieme base, è che le tre coppie (φ, ψ) , (ψ, χ) , (χ, φ) siano « assolutamente continue ».

All'integrale doppio che rappresenta allora l'area di S può darsi sempre la forma

$$(2) \quad \iint V \left[\left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)} \right]^2 \right] du dv,$$

senonchè il significato dei simboli di determinante funzionale va ampliato, rappresentando essi in generale le derivate delle coppie (φ, ψ) , (ψ, χ) , (χ, φ) .

Su questi risultati generali, come sulle definizioni di *coppia assolutamente continua* e di *derivata di una coppia* non mi soffermerò qui, e rimanderò ai miei lavori precedenti ⁽¹⁾. Mi propongo soltanto qui di completare il teorema enunciato con l'esame di casi particolari estesi, caratterizzati da condizioni analitiche semplici; nei quali casi, praticamente generalissimi, l'espressione dell'area è data appunto dall'integrale $\iint \sqrt{EG - F^2} du dv$.

2. Supponiamo le funzioni φ, ψ, χ assolutamente continue nelle due variabili u e v separatamente ⁽²⁾. In questo caso acquistano forma semplicissima le condizioni di assoluta continuità delle tre coppie (φ, ψ) , (ψ, χ) , (χ, φ) .

Senza supporre previamente la coppia (φ, ψ) a *variazione limitata*, si può definire per un dominio rettangolare del piano uv la variazione di (φ, ψ) , mediante uno degli integrali curvilinei $\int \varphi d\psi$, $-\int \psi d\varphi$, $\frac{1}{2} \int (\varphi d\psi - \psi d\varphi)$. Si definisce così nel dominio base D della superficie S una funzione additiva di dominio rettangolare, associata alla funzione di punto

$$F_3(u, v) = \frac{1}{2} \int \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial u} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right] du - \frac{1}{2} \int \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right] dv.$$

Se questa risulta a *variazione limitata*, anche la coppia (φ, ψ) è a *variazione limitata*; se assolutamente continua (rispetto al complesso uv), anche (φ, ψ) è assolutamente continua.

(1) Questi « Rendiconti »: settembre 1927, 20 novembre 1927, 20 maggio 1928, 1° giugno 1928. « Rend. Acc. Napoli », aprile e maggio 1928. « Atti del Congresso internazionale dei Matematici », Bologna, settembre 1928.

(2) Più generalmente, in u per quasi ogni valore di v , e in v per quasi ogni valore di u .

Come $F_3(u, v)$ si definiscono due altre funzioni $F_1(u, v)$ e $F_2(u, v)$ ponendo

$$F_1(u, v) = \frac{1}{2} \int \left[\psi \frac{\partial \chi}{\partial u} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] du - \frac{1}{2} \int \left[\psi \frac{\partial \chi}{\partial v} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] dv,$$

$$F_2(u, v) = \frac{1}{2} \int \left[\chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial u} \right] du - \frac{1}{2} \int \left[\chi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial v} \right] dv.$$

Perchè S sia quadrabile occorre e basta che le tre funzioni F_1, F_2, F_3 siano a variazione limitata (essendo sempre per ipotesi φ, ψ, χ assolutamente continue rispetto a u ed a v); perchè poi l'area di una porzione variabile di S sia funzione assolutamente continua dell'insieme base su D occorre e basta che F_1, F_2, F_3 siano assolutamente continue (rispetto al complesso uv).

3. Fra le superficie che soddisfano le precedenti condizioni di quadrabilità e di assoluta continuità sono comprese in particolare:

- a) le superficie rettificabili⁽¹⁾;
- b) le superficie i cui due sistemi coordinati ammettono due « linee maggoranti » assolutamente continue⁽²⁾;
- c) le superficie di equazione $\chi = f(x, y)$, essendo f assolutamente continua in x come in y , e le derivate di f superficialmente sommabili⁽³⁾;
- d) le superficie semirettificabili⁽⁴⁾ di equazioni (1), per cui φ e ψ sono uniformemente lipschitziane, e χ ha le proprietà della f precedente (queste comprendono le superficie a) e c) come casi particolari);
- e) le superficie di equazioni (1) per cui, essendo sempre φ, ψ e χ assolutamente continue in u e in v separatamente, le tre derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u}$ sono limitate e le tre altre superficialmente sommabili, o inversamente⁽⁵⁾.

4. In quanto precede ho adottata implicitamente la mia definizione dell'area di una superficie, definizione sostanzialmente identica a quella di Lebesgue. Ma per tutti i casi indicati si può provare direttamente la quadrabilità secondo Lebesgue non solo, ma anche l'identità fra l'integrale (2)

(1) V. su queste la recente Memoria di RADÒ *Ueber das Flächenmass rektifizierbarer Flächen* (« Math. Ann. », t. 100, pp. 445-479).

(2) V. la mia Nota *Una classe di superficie quadrabili* (questi « Rendiconti », 20 novembre 1927). Ogni siffatta superficie può rendersi rettificabile cambiando opportunamente la rappresentazione parametrica. Se le (1) ne sono le equazioni, le tre derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u}$ sono maggiorate da una funzione sommabile di sola u , le tre altre da una funzione sommabile di sola v .

(3) Sono queste le condizioni di assoluta continuità di TONELLI (*Sulla quadratura delle superficie*, III, questi « Rendiconti », 2 maggio 1926).

(4) V. la mia Nota *Sulla definizione dell'area di una superficie*, (questi « Rendiconti », 1° giugno 1928).

(5) Cfr. con le condizioni date da YOUNG per la validità della formola delle aree piane. (« Lond. M. S. Proc. », (2), t. XXI, pp. 75-94).

e quello classico $\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$. Basterà approssimare S mediante una successione di superficie regolari $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ tali che l'integrale $\iint_D \sqrt{E_n G_n - F_n^2} du dv$, che dà l'area di S_n , tenda a $\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$; si otterrà così la disuguaglianza aerea $S \leq \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$, e si concluderà all'eguaglianza invocando il seguente

¹TEOREMA: Per ogni superficie S di equazioni (I) supposte le funzioni φ, ψ, χ quasi ovunque derivabili si ha

$$\text{area } S \cong \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

l'area essendo definita secondo Lebesgue ⁽¹⁾.

La successione S_1, S_2, \dots , potrà costruirsi in infiniti modi, caso per caso. Per es., per le superficie rettificabili *a)* si prenderanno superficie poliedriche iscritte tali che gli angoli dei triangoli base sul piano uv non scendano al di sotto di un limite positivo fisso. Analogamente si potrà trattare il caso *b)*; mentre che per gli altri gioverà ricorrere ad approssimazioni polinomiali, secondo le note formole ⁽²⁾ per cui già nel caso *c)* Tonelli ha provato l'equiassoluta continuità degli integrali $\iint_D \sqrt{E_n G_n - F_n^2} du dv$ ⁽³⁾.

5. I casi indicati nel n. 3 sono praticamente generalissimi, e le condizioni di agevole verifica in pratica. Ma un risultato ancor più generale si potrebbe ottenere, dimostrando come sotto le sole condizioni del n. 2 (assoluta continuità delle funzioni F_1, F_2, F_3) le derivate delle coppie $(\varphi, \psi), (\psi, \chi), (\chi, \varphi)$ coincidano quasi ovunque con i determinanti funzionali, sicchè

$$\text{area } S = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)} \right]^2} du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Tornerò su quest'argomento in un prossimo lavoro più completo.

(1) Ho da tempo una dimostrazione di questo teorema fondamentale, come è a conoscenza dei proff. Hadamard e Lebesgue. La pubblicherò in una Memoria dedicata ad un'esposizione completa della teoria.

(2) Vedi LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse infinitésimale*, II, Ch. IV, § 2 (2^{me} éd.).

(3) *Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione*. (Questi « Rendiconti », 16 maggio 1926).

Matematica. — *Calcolo del logaritmo di una matrice di secondo ordine, e sua applicazione allo studio dei gruppi a un parametro contenenti una sostituzione data.* Nota ⁽¹⁾ di SILVIA MARTIS in BIDDAU, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

1. Servendomi delle stesse notazioni usate in un precedente lavoro ⁽²⁾, indico con

$$(1) \quad D(\rho) \equiv \begin{vmatrix} \varphi_{11} - \rho & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

l'equazione fondamentale di una matrice del secondo ordine

$$(2) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$$

Se

$$(3) \quad 2\theta = \varphi_{11} + \varphi_{22} \quad \delta = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}$$

sono gli invarianti di Φ , e se

$$(4) \quad R = \frac{(\varphi_{11} - \varphi_{22})^2 - 4\varphi_{12}\varphi_{21}}{4}$$

è il discriminante dell'equazione (1), le radici, che indico con ρ_1 e ρ_2 , della stessa equazione, saranno date dalle espressioni

$$(5) \quad \rho_1 = \theta + \sqrt{R} \quad \rho_2 = \theta - \sqrt{R}$$

da cui

$$(6) \quad \rho_1 - \rho_2 = 2\sqrt{R}.$$

Anche qui prendo come punto di partenza la formola del prof. Fantappiè ⁽³⁾, che applico, nel caso di $n = 2$, alla sostituzione $\log \Phi$, la cui matrice

$$(7) \quad \Psi = \log \Phi = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix}$$

è coordinata alla funzione $\log \rho$.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1928.

(2) *Sugli esponenziali delle matrici di secondo ordine e loro applicazione alla teoria dei gruppi*. In corso di pubblicazione presso questi « Rendiconti ».

(3) L. FANTAPPIÉ, *Le calcul des matrices*, « Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences », t. 186, p. 619, séance du 5 mars 1928.

Se le radici ρ_1 e ρ_2 dell'equazione (1) sono distinte, la suindicata formula dà

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{11} &= \frac{\rho_1 \log \rho_1 - \rho_2 \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} - \varphi_{22} \frac{\log \rho_1 - \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \\ \psi_{12} &= \varphi_{12} \frac{\log \rho_1 - \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \\ \psi_{21} &= \varphi_{21} \frac{\log \rho_1 - \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \\ \psi_{22} &= \frac{\rho_1 \log \rho_1 - \rho_2 \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} - \varphi_{11} \frac{\log \rho_1 - \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \end{aligned} \right.$$

Il rapporto che figura nel secondo termine di ψ_{11} , per le formole (5) e (6) diventa, dopo facili trasformazioni:

$$(9) \quad \frac{\log \rho_1 - \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{\sqrt{R}}{\theta} \right) - \frac{1}{\theta} \log \left(1 - \frac{\sqrt{R}}{\theta} \right)}{2 \frac{\sqrt{R}}{\theta}}.$$

Se introduciamo ora la trascendente polidroma $\lambda(u)$, definita da

$$(10) \quad \lambda(u) = \frac{\log \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}}}{2 \sqrt{u}}$$

di cui un ramo è rappresentato entro il cerchio di raggio 1 e centro nell'origine, dalla serie di potenze

$$(11) \quad \lambda(u) = 1 + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{5} + \dots + \frac{u^n}{2n+1} + \dots$$

si ottiene

$$(12) \quad \frac{\log \rho_1 - \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{1}{\theta} \lambda \left(\frac{R}{\theta^2} \right).$$

Trasformando in modo analogo il primo termine di ψ_{11} , si ha

$$(13) \quad \frac{\rho_1 \log \rho_1 - \rho_2 \log \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \lambda \left(\frac{R}{\theta^2} \right) + \log \theta + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{R}{\theta^2} \right).$$

2. La serie (11) rappresenta quell'elemento della funzione $\lambda(u)$ con centro nell'origine e raggio 1 che, nei punti interni del segmento reale $0 - 1$ prende i valori dati dalla formola (10) quando per \sqrt{u} si prenda la determinazione positiva e per il logaritmo la determinazione principale (pu-

ramente reale). Dall'elemento (11) si può, con prolungamenti analitici, estendere la determinazione considerata della funzione $\lambda(u)$ a tutto il piano complesso tagliato lungo la semiretta reale che va da 1 a ∞ . Il ramo che così si ottiene si chiamerà la *determinazione principale* $\lambda_0(u)$ della funzione $\lambda(u)$. I due punti 1 e ∞ , estremi del taglio, sono infatti punti di diramazione, poichè, se si immagina di superare questo taglio passando dal bordo inferiore al bordo superiore, cioè se si gira nel verso positivo intorno al punto 1 (il che equivale a un giro nel verso negativo intorno al punto ∞) si trova per la funzione $\lambda(u)$ una determinazione diversa, $\lambda_1(u)$, data da

$$(14) \quad \lambda_1(u) = \lambda_0(u) - \frac{\pi i}{\sqrt{u}}.$$

Più generalmente, facendo n giri intorno al punto 1 avremo la determinazione

$$(15) \quad \lambda_n(u) = \lambda_0(u) - \frac{n\pi i}{\sqrt{u}}$$

essendo n un'intero qualunque.

Per $n \neq 0$, però, questi altri rami della funzione λ avranno per punti singolari (di diramazione) oltre i punti 1 e ∞ , anche il punto $u = 0$. Girando intorno a questo punto, che è un punto di diramazione di natura algebrica, il termine $-\frac{n\pi i}{\sqrt{u}}$ cambia di segno, ma tutte le determinazioni della funzione λ che così si ottengono rientrano però sempre nella formola precedente, quando in essa si prenda, in luogo di n , il numero intero opposto.

3. Poichè gli elementi della matrice $\Psi = \log \Phi$ si esprimono mediante le funzioni polidrome \log e λ , essa avrà diverse determinazioni secondo che si scelga una determinazione o l'altra di queste funzioni polidrome. Per trovarle esprimiamone esplicitamente gli elementi per mezzo delle funzioni \log e λ . Avremo:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{11} = \log \theta + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{R}{\theta^2} \right) + \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \lambda \left(\frac{R}{\theta^2} \right) \\ \psi_{12} = \frac{2\varphi_{12}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \lambda \left(\frac{R}{\theta^2} \right) \\ \psi_{21} = \frac{2\varphi_{21}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \lambda \left(\frac{R}{\theta^2} \right) \\ \psi_{22} = \log \theta + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{R}{\theta^2} \right) - \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \lambda \left(\frac{R}{\theta^2} \right) \end{array} \right.$$

oppure, ricordando che

$$(17) \quad R = \theta^2 - \varepsilon \quad \frac{R}{\theta^2} = 1 - \frac{\varepsilon}{\theta^2}$$

le altre espressioni

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{11} = \frac{1}{2} \log \delta + \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \lambda \left(1 - \frac{\delta}{\theta^2} \right) \\ \psi_{12} = \frac{2\varphi_{12}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \lambda \left(1 - \frac{\delta}{\theta^2} \right) \\ \psi_{21} = \frac{2\varphi_{21}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \lambda \left(1 - \frac{\delta}{\theta^2} \right) \\ \psi_{22} = \frac{1}{2} \log \delta - \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \lambda \left(1 - \frac{\delta}{\theta^2} \right) \end{array} \right.$$

in cui gli argomenti delle funzioni \log e λ sono tutte espressioni razionali invarianti θ e δ della matrice Φ .

4. Supponiamo ora di far variare la matrice Φ con continuità in modo che l'invariante θ faccia un giro intorno allo zero, mentre invece $\frac{R}{\theta^2}$ resti costante o, per lo meno, non giri nè intorno al punto 1, nè intorno al punto ∞ .

Se indichiamo con Ψ_0 la determinazione iniziale della matrice $\Psi = \log \Phi$, e con $\psi_{rs,0}$ i suoi elementi, dopo questo giro di θ intorno allo zero avremo una nuova determinazione Ψ_1 di Ψ i cui elementi $\psi_{rs,1}$ si ricavano facilmente dalle (16) in funzione di quelli iniziali $\psi_{rs,0}$. Poichè infatti, nelle (16), gli unici termini che variano, dopo questo giro, sono quelli che contengono il $\log \theta$, si ha:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{rs,1} = \psi_{rs,0} \quad \text{per } r \neq s \\ \psi_{rr,1} = \psi_{rr,0} + 2\pi i \end{array} \right.$$

da cui: segue

$$(20) \quad \Psi_1 = \Psi_0 + 2\pi i \Psi^0$$

dove Ψ^0 è la matrice identica, cioè $\Psi^0 = I$.

Dunque: per ogni giro dell'invariante θ intorno all'origine, fermo restando $\frac{R}{\theta^2}$, la matrice variabile $\Psi = \log \Phi$ aumenta sempre della matrice identica moltiplicata per $2\pi i$.

D'altra parte, in base al mio precedente lavoro, è

$$e^{\Psi} = \Phi \quad e^{2\pi i \Psi^0} = \Phi^0 = I$$

com'è facile verificare, e quindi si ha identicamente, qualunque sia Ψ

$$(21) \quad e^{\Psi + 2\pi i \Psi^0} = e^{\Psi}.$$

Possiamo dire perciò che la matrice unitaria, moltiplicata per $2\pi i$, è un periodo della matrice e^{Ψ} , funzione di Ψ .

Se invece facciamo variare con continuità la matrice Φ , in modo che l'altro invariante δ ruoti intorno all'origine, θ restando fisso, avremo che $1 - \frac{\delta}{\theta^2}$ ruoterà intorno al punto 1. Le formole (18), tenendo presente la (14), ed essendo

$$(22) \quad -\frac{\pi i}{\sqrt{u}} = -\frac{\pi i}{\sqrt{\frac{R}{\theta^2}}} = -\frac{\pi i \theta}{\sqrt{R}}$$

danno allora per gli elementi $\psi_{r,i}$ della nuova determinazione Ψ_i della matrice $\log \Phi$ le espressioni

$$(23) \quad \begin{cases} \psi_{11,i} = \psi_{11,0} + \pi i - \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2\sqrt{R}} \pi i \\ \psi_{12,i} = \psi_{12,0} - \pi i \frac{\varphi_{12}}{\sqrt{R}} \\ \psi_{21,i} = \psi_{21,0} - \pi i \frac{\varphi_{21}}{\sqrt{R}} \\ \psi_{22,i} = \psi_{22,0} + \pi i + \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2\sqrt{R}} \pi i. \end{cases}$$

Se poniamo

$$(24) \quad \Omega = \pi i \begin{vmatrix} 1 - \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2\sqrt{R}} & -\frac{\varphi_{12}}{\sqrt{R}} \\ -\frac{\varphi_{21}}{\sqrt{R}} & 1 + \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2\sqrt{R}} \end{vmatrix}$$

avremo dunque

$$(25) \quad \Psi_i = \Psi_0 + \pi i \Omega.$$

E infatti, sempre in base al mio precedente lavoro, si verifica che

$$(26) \quad e^{\Psi_0} = e^{\Psi_0 + \pi i \Omega} = \Phi.$$

In questo caso, però, la matrice $\pi i \Omega$ non è indipendente da Ψ , o, ciò che è lo stesso, dalla $\Phi = e^{\Psi}$, come risulta dalla espressione (24) e quindi $\pi i \Omega$ non può dirsi un periodo della funzione esponenziale e^{Ψ} .

Riassumendo possiamo dunque dire che la determinazione generale della matrice $\Psi = \log \Phi$ sarà data da

$$(27) \quad \Psi = \Psi_0 + 2m\pi i \Phi^0 + \pi n i \Omega$$

essendo Ψ_0 una determinazione particolare, e dipenderà dai due numeri interi arbitrari m ed n .

Più precisamente la matrice $\Psi = \log \Phi$ aumenta del periodo $2\pi i \Psi^0 = 2\pi i$, della funzione esponenziale e^Ψ , per ogni giro dell'invariante θ intorno all'origine, e di $\pi i \Omega$ per ogni giro dell'altro invariante δ , pure intorno all'origine.

Risulta dunque chiaro che la *polidromia della matrice* $\Psi = \log \Phi$ *si manifesta soltanto col variare degli invarianti* θ *e* δ *della matrici* Φ ; se, pur variando Φ , queste quantità restano costanti, la matrice $\log \Phi$ conserva sempre la stessa determinazione.

5. Nel caso che le due radici dell'equazione caratteristica (1) della Φ , siano uguali, se cioè $R = 0$, dalle (16), prendendo la determinazione principale delle funzioni \log e λ , e osservando che, dalla serie (11) risulta $\lambda_0(0) = 1$, si hanno le formole più semplici

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{11} = \log \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2} + \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \\ \psi_{12} = \varphi_{12} \frac{2}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \\ \psi_{21} = \varphi_{21} \frac{2}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \\ \psi_{22} = \log \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2} - \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{\varphi_{11} + \varphi_{22}} \end{array} \right.$$

che danno dunque gli elementi ψ_{rs} della matrice $\Psi = \log \Phi$ nel caso parabolico.

Se la matrice Φ varia, restando sempre parabolica, cioè in modo che sia sempre $R = 0$, vediamo, dalle formole precedenti, che si ottengono più determinazioni per la matrice $\Psi = \log \Phi$, ma tutte della forma

$$(29) \quad \Psi = \Psi_0 + 2m\pi i \Phi^0$$

le quali dipendono dunque da *un solo* numero intero arbitrario m , se è Ψ_0 la determinazione iniziale, corrispondente alle determinazioni principali delle funzioni \log e λ .

Questo risultato del resto poteva prevedersi anche osservando l'espressione generale (27). In questa, infatti, la matrice Ω , data dalla (24), diventa ∞ , se $R = 0$; perchè la formola stessa conservi un significato bisogna dunque prendere sempre $n = 0$, e per Ψ_0 la determinazione di $\log \Phi$ corrispondente alle determinazioni principali di \log e λ . Con ciò la (27) si riduce alle (29).

6. Fissata una qualunque delle determinazioni della matrice $\Psi = \log \Phi$, avremo, sempre in base al mio precedente lavoro, che il gruppo a un parametro di sostituzioni lineari $e^{t\Psi}$ contiene certamente, per $t = 1$, la sostituzione $\Psi = \log \Phi$; avremo dunque, in corrispondenza, a ognuna di queste

determinazioni un gruppo a un parametro di sostituzioni lineari contenente la sostituzione fondamentale Φ .

Essendo questi gruppi dati dall'espressione

$$e^{t\Psi} = e^{t \log \Phi}$$

che, quando t è uguale a un intero m , dà le potenze emmesime della Φ

$$\Phi^m = e^{m \log \Phi}$$

potremo, anche per analogia a quanto si fa nel campo dei numeri complessi, definire la potenza di esponente qualunque t di una matrice Φ appunto con la formola

$$\Phi^t = e^{t \log \Phi}.$$

Come accade per i numeri, anche per queste potenze, avremo più determinazioni, corrispondenti ognuna alle diverse determinazioni della matrice $\log \Phi$.

Matematica. — *Sur les valeurs probables de fonctions.* Nota ⁽¹⁾ di V. GLIVENKO, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. La définition de la valeur probable (espérance mathématique) d'une fonction présente une certaine ambiguïté. Habituellement, on y procède comme il suit: étant déterminée une fonction

$$y = f(x)$$

de la variable éventuelle x dont la fonction des probabilités totales (fonction intégrale de répartition) est $U(x)$, on prend pour la valeur probable de y l'intégrale

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dU(x),$$

tandis que, conformément à la définition générale de la valeur probable d'une quantité éventuelle on devrait y prendre l'intégrale

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y dV(y),$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.

où la fonction $V(y)$ des probabilités totales de y est définie par l'identité :

$$(3) \quad V(y) = \int_{E \{ f(x) \leq y \}} dU(x)$$

(nous supposons toujours que les intégrales sont prises au sens de M. Lebesgue et que la fonction $f(x)$ est mesurable B).

Nous voulons établir ici que la définition (1) n'est pas complètement équivalente à la (2). Plus précisément, on aura :

Pour que l'intégrale (2) ait un sens, il faut et il suffit que l'intégrale (1) soit absolument convergente. Si tous les deux intégrales (1) et (2) ont un sens, elles sont égales entre elles.

En effet, écrivons successivement les intégrales (1) et (2) d'une manière plus détaillée :

$$(1^*) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{a_p}^{b_p} f(x) dU(x),$$

$$(2^*) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{c_p}^{d_p} y dV(y),$$

où l'on suppose que les nombres a_p, c_p et b_p, d_p tendent, les uns en décroissant, les autres en croissant, vers l'infini avec p , et cela d'une manière quelconque.

Examinons maintenant l'intégrale (2*). La fonction à intégrer y coïncidant avec la variable indépendante elle-même, cette intégrale peut être prise au sens classique,

$$\int_{c_p}^{d_p} y dV(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=m} \eta_i [V(\eta_{i+1}) - V(\eta_i)],$$

où l'on pose, comme d'habitude :

$$c_p = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_m < \eta_{m+1} = d_p$$

(toutes les différences $\eta_{i+1} - \eta_i$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$).

Or, de l'identité (3) on tire tout de suite :

$$V(\eta_{i+1}) - V(\eta_i) = \int_{E \{ \eta_i < f(x) \leq \eta_{i+1} \}} dU(x),$$

ce qui nous donne :

$$\int_{c_p}^{d_p} y dV(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=m} \eta_i \int_{E \{ \eta_i < f(x) \leq \eta_{i+1} \}} dU(x).$$

Mais la seconde partie de cette dernière formule est l'intégrale de M. Lebesgue, de la fonction $f(x)$ par rapport à la fonction $U(x)$, cette intégrale étant étendue à l'ensemble des points où l'on a :

$$c_p < f(x) \leq d_p.$$

Donc, l'expression (2*) peut être écrite comme il suit :

$$(2^{**}) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{E\{c_p < f(x) \leq d_p\}} f(x) dU(x).$$

De la comparaisons des expressions (1*) et (2**) qui expriment respectivement les intégrales (1) et (2), on en obtient aisément les propositions à démontrer, en se servant de la théorie bien connue des intégrales généralisées.

2. Des circonstances analogues se présentent dans la théorie des probabilités à plusieurs variables indépendantes.

Considérons un système de n quantités éventuelles x_1, x_2, \dots, x_n , et soit $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la fonction des probabilités totales de ce système, de sorte que les quantités en question aient pour ses fonctions des probabilités totales les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} U_1(x_1) &= U(x_1, \infty, \dots, \infty), \\ U_2(x_2) &= U(\infty, x_2, \dots, \infty), \\ &\dots \dots \dots \\ U_n(x_n) &= U(\infty, \infty, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Nous nous demandons si la valeur probable d'une fonction

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

peut, ou non, être définie sans ambiguïté par les n intégrations successives :

$$(1 \text{ bis}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dU_1(x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} dU_2(x_2) \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dU_n(x_n),$$

ayant en vue que la seule définition conforme à la définition générale de la valeur probable d'une quantité éventuelle y serait la suivante :

$$(2 \text{ bis}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y dV(y),$$

où la fonction $V(y)$ des probabilités totales de y est définie par l'identité :

$$(3 \text{ bis}) \quad V(y) = \int_{E\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq y\}} dU(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

On aura, comme plus haut, que, pour que l'intégrale (2 bis) ait un sens, il faut et il suffit que l'intégrale (1 bis) soit absolument convergente; si tous les deux intégrales (1 bis) et (2 bis) ont un sens, elles sont égales entre elles.

La démonstration s'appuie sur les deux remarques suivantes:

1) Les quantités éventuelles x_1, x_2, \dots, x_n , nous les appelons indépendantes si l'on a toujours:

$$\int_E dU(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{E_1} dU_1(x_1) \int_{E_2} dU_2(x_2) \dots \int_{E_n} dU_n(x_n),$$

E_1, E_2, \dots, E_n étant des ensembles mesurables B linéaires, d'ailleurs quelconques, et E le produit n -dimensionnel de ces ensembles⁽¹⁾. De là, on déduirait sans peine que l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_E |f(x_1, x_2, \dots, x_n)| dU(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \int_{E_1} dU_1(x_1) \int_{E_2} dU_2(x_2) \dots \int_{E_n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)| dU_n(x_n). \end{aligned}$$

est toujours valable.

2) Contrairement à ce qui a lieu pour les intégrales simples, l'intégrale multiple, étendue à tout l'espace (x_1, x_2, \dots, x_n) ,

$$(1 \text{ ter}) \quad \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dU(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

n'a un sens que si elle est absolument convergente. Or, dans ce cas, et dans ce cas seulement, l'intégrale (2 bis) a un sens lui-aussi, et les intégrales (2 bis) et (1 ter) sont égales entre elles; la démonstration de laquelle nous avons nous servi dans le cas des intégrales simples s'y applique sans modifications.

Cela posé, soit l'intégrale (1 bis) absolument convergente: alors, en vertu de 1), il en est de même pour l'intégrale (1 ter), et ces deux intégrales sont égales entre elles. En vertu de 2), l'intégrale (2 bis) a un sens et est égale aux intégrales précédentes.

Réciproquement, si l'intégrale (1 bis) n'est pas absolument convergente, il en est de même, en vertu de 1), pour l'intégrale (1 ter). En vertu de 2), l'intégrale (2 bis) n'a aucun sens.

(1) Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U_1(x_1) U_2(x_2) \dots U_n(x_n)$.

Geometria. — *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces.* Nota ⁽¹⁾ di E. ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Soit A un point commun à deux courbes C et Γ qui ont en A la même tangente et le même plan osculateur. Soient c, γ les courbures de C et Γ au point A. Alors le rapport $\gamma : c$ est un invariant projectif ⁽²⁾ que j'indiquerai, pour abréger, par

$$J(C, \Gamma; A).$$

2. Soient maintenant S_1, S_2 deux surfaces non réglées en correspondance asymptotique. Choisissons arbitrairement un point A de la surface S_1 . On peut (d'une infinité de manières) remplacer S_2 par une surface homographique S'_2 telle que les surfaces S_1 et S'_2 aient un *contact analytique du premier ordre* ⁽³⁾ au point A. Soient maintenant C_1, C_2 les deux asymptotiques de S_1 passant par A, et soient Γ_1, Γ_2 les asymptotiques correspondantes de S'_2 . Bien que la surface S'_2 ne soit pas entièrement déterminée, les deux invariants

$$r = J(C_1, \Gamma_1; A),$$

$$s = J(C_2, \Gamma_2; A)$$

ont des valeurs bien déterminées.

3. Soient (u, v) des paramètres asymptotiques des surfaces S_1, S_2 . Soient

$$\frac{\beta_1 du^3 + \gamma_1 dv^3}{2 du dv}, \quad \frac{\beta_2 du^3 + \gamma_2 dv^3}{2 du dv}$$

les éléments linéaires projectifs ⁽⁴⁾ de S_1 et S_2 .

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.

(2) Ce théorème a été énoncé par R. MEHMKE en 1891 avec plusieurs théorèmes semblables (« Zeitschrift f. Math. u. Phys. », t. 36). Il est cependant implicitement contenu dans une proposition donnée en 1880 par L. GEISENHEIMER (même Journal, t. 25). V. aussi C. SEGREGÈ, ces « Rendiconti », 1897. M. BOMPIANI a proposé d'appeler $J(C, \Gamma; A)$ l'invariant de Segre. Je proposerais de l'appeler l'invariant de Geisenheimer-Mehmke.

(3) Pour la notion (due à M. Fubini) du contact analytique, v. FUBINI-ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, § 3.

(4) Op. cit., § 12.

Supposons, pour fixer la notation, que l'invariant r se rapporte aux asymptotiques $v = \text{const.}$ Alors

$$r = r(u, v) = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad , \quad s = s(u, v) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} .$$

On en voit en particulier que les invariants r, s changent de signe si l'on remplace une des deux surfaces par sa surface corrélatrice.

4. Nous pouvons maintenant partager les correspondances asymptotiques entre deux surfaces non réglées en trois espèces: 1° pour la première espèce (c'est le cas général) r et s sont deux fonctions indépendantes de u et v ; 2° pour la seconde espèce, r et s sont dépendantes, mais une au moins n'est pas constante; 3° pour la troisième espèce, r et s sont des constantes.

Parmi les correspondances de troisième espèce ce trouve le cas remarquable de $r = s = 1$; c'est le cas de la *déformation projective* de M. Fubini ⁽¹⁾ dont on a ainsi une définition géométrique nouvelle. Parmi les correspondances de seconde espèce, trois cas sont remarquables: 1° $r = s$, correspondances qui conservent les lignes de Darboux; 2° $rs = 1$, correspondances qui conservent la forme normale $\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv$ de M. Fubini; 3° $r = 1$ (ou $s = 1$); ce cas est caractérisé par la circonstance que, à chaque point A de S_1 , les asymptotiques $v = \text{const.}$ de S_1 et de S_2 ont un contact du second ordre.

5. Choisissons une relation arbitraire $f(r, s) = 0$ entre r et s . La surface S_1 étant donnée arbitrairement, les correspondances de seconde espèce appartenant à la relation $f(r, s) = 0$ existent toujours et dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument ⁽²⁾.

6. Passons aux correspondances de troisième espèce. Quatre cas sont à distinguer: 1° $r = s = 1$. Ce cas est possible de deux manières distinctes: ou la correspondance se réduit à une homographie (ce cas dépend évidemment d'une fonction arbitraire de deux arguments) ou bien la correspondance est une déformation projective proprement dite (ce cas dépend ⁽³⁾ de six fonctions arbitraires d'un argument). 2° $r = s = -1$. Ce cas se réduit au précédent d'après la remarque faite à la fin de § 3. 3° $r = s = c$, où la constante c est différente de 0, 1 — 1. Ces correspondances dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument. La surface S_1 étant donnée, la correspondance existe alors et alors seulement si l'on a, en choisissant convenablement les paramètres u, v ,

$$\frac{\partial^3 \beta_1}{\partial v^3} = \frac{\partial^3 \gamma_1}{\partial u^3} ;$$

(1) Op. cit., § 20 et Chap. VII, VIII.

(2) Ce résultat est connue dans deux cas particuliers: 1° $r = s$; 2° $rs = 1$. V. E. CARTAN, *Sur la déformation projective des surfaces* (« Ann. de l'Ec. Norm. », 37 (3), 1920), § 31 et 33.

(3) E. CARTAN, loc. cit., § 11 et 18.

s'il en est ainsi, la correspondance existe pour *chaque* valeur de c . 4° $r = c_1$, $s = c_2$, où $c_1 \neq c_2$. Ces correspondances dépendent de huit fonctions arbitraires d'un argument.

7. Dans ce qui précède, j'ai considéré une correspondance entre deux surfaces. On peut étudier analoguement une correspondance entre deux congruences de droites; au lieu des asymptotiques, on a alors à considérer les arêtes de rebroussement des développables de la congruence.

Meccanica. — *Ancora sul teorema di Kutta-Joukowski nel caso della lastra piana.* (Complemento alla Nota del luglio 1928, fascicoli 1-2). Nota ⁽¹⁾ di E. PISTOLESI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

A complemento e chiarimento della mia Nota, pubblicata nel fascicolo 1-2, 2° semestre c. a. di questi « Rendiconti », ritengo opportuno aggiungere le seguenti osservazioni:

1. Il prodotto $(p_1 - p_2) \Delta\psi$ al quale si riduce la $\frac{dT}{dt}$ quando il punto singolare si escluda con un circuito formato da una porzione di linea di corrente e da due tratti affacciati di linee equipotenziali, si può far tendere a zero impiccolendo il circuito in maniera opportuna; ma può anche farsi tendere a quel limite che più ci piace.

Infatti, se indichiamo con v_0 la componente della velocità parallela alla lastra e con v_1 la componente normale, con Γ la circuitazione, supposto che la lastra occupi l'asse reale da -1 a $+1$, si ha:

$$(1) \quad v_x - iv_y = v_0 + iv_1 \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Sulle due facce della lastra avremo perciò:

$$(2) \quad v = v_x = v_0 \pm \left(v_1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$$

valendo il $+$ su una delle facce, il segno $-$ sull'altra.

La differenza di pressione $p_1 - p_2$ per due punti affacciati della lastra risulta quindi:

$$(3) \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = 2\rho v_0 \left(v_1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1928.

Quando il punto x tende ad 1 (o a -1), posta uguale ad ε^2 la distanza, si vede che $p_1 - p_2$ tende all' ∞ come

$$(4) \quad \sqrt{2} \rho v_0 \left(v_1 + \frac{\Gamma}{2\pi} \right) \frac{1}{\varepsilon}.$$

Se adunque, mentre $\varepsilon \rightarrow 0$, si fa tendere $\Delta\psi$ a zero come ε^α , il prodotto $(p_1 - p_2) \Delta\psi$ tenderà a zero, ad un limite finito (qualsivoglia) o all'infinito, secondochè $\alpha \equiv 1$.

2. Non è difficile, in base a considerazioni gentilmente suggeritemi dal prof. T. Levi-Civita, accordare il risultato da me trovato (essere nullo il risultante delle pressioni sopra un circoletto di raggio ε^2 col centro nel punto singolare) col risultato trovato dal Signorini nella Nota pubblicata nel fascicolo 10 c. a. (1° sem.) di questi « Rendiconti ».

Invero se il circuito l da me considerato nel piano ζ (i due circoletti attorno ai punti singolari e il doppio contorno della lamina g compreso fra i punti d'intersezione di questa con i due circoletti) si rappresenta sul piano ζ in un circuito λ , mediante la rappresentazione conforme:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

che trasforma la lamina g in una circonferenza γ di raggio 1, col centro nell'origine, si vede che il circoletto di equazione:

$$\zeta = 1 + \varepsilon^2 e^{i\theta}$$

si trasforma in un semicircoletto di equazione

$$(5) \quad \zeta = 1 + \sqrt{2} \varepsilon e^{i\theta/2}.$$

Lo stesso accade per il circoletto attorno all'altro punto singolare, mentre il doppio contorno della lamina si trasforma nei due archi della circonferenza γ necessari a completare il circuito λ . Questo allora risulta tale che la condizione 2^a delle (15) della Nota di Signorini, e cioè:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \gamma} \frac{\rho_{\max} - 1}{\rho_{\min} - 1} = 1$$

non può essere soddisfatta, essendo il denominatore sempre uguale allo zero.

Anzi questa condizione non può essere mai soddisfatta se del circuito fa parte un arco dei circoletti di cui sopra, compreso, ad es., fra $\theta = \beta$ e $\theta = -\beta$, essendo β comunque piccolo, purchè finito. Ed infatti, poichè al punto $1 + \varepsilon^2 e^{i\theta}$ corrisponde il punto $1 + \sqrt{2} \varepsilon e^{i\theta/2}$, all'arco del cerchio di raggio ε^2 compreso fra β e $-\beta$ corrisponderà un arco del circoletto di

raggio $\sqrt{2}\epsilon$ compreso fra $\beta/2$ e $-\beta/2$ e quindi $\frac{\rho_{\max}-1}{\rho_{\min}-1}$ non potrà mai essere inferiore a $\cos \frac{\beta}{2}$.

Ciò spiega perchè calcolando il risultante delle pressioni sull'arco di raggio ϵ^2 e di apertura 2β non si ottiene mai la cosiddetta *aspirazione allo spigolo*, qualunque sia β .

Dalla (1) infatti, posto $z - 1 = \epsilon^2 e^{i\theta}$, a meno di infinitesimi, si ottiene:

$$(6) \quad v_x - iv_y = v_0 + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(v_1 + \frac{\Gamma}{2\pi} \right) \frac{e^{-i\theta/2}}{\epsilon}$$

e quindi:

$$(7) \quad v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 + \frac{\left(v_1 + \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2}{2\epsilon^2} + \sqrt{2} v_0 \left(v_1 + \frac{\Gamma}{2\pi} \right) \frac{e^{-i\theta/2}}{\epsilon}.$$

La differenza di pressione $p - p_\infty$ fra la pressione p nel punto considerato e la pressione p_∞ della corrente indisturbata tende dunque all'infinito come

$$-\rho \frac{\left(v_1 + \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2}{4\epsilon^2}.$$

Il risultante di tale differenza di pressione sull'arco $(-\beta, \beta)$ è un'aspirazione diretta parallelamente alla lastra, di grandezza

$$\frac{\rho}{2} \left(v_1 + \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \sin \beta.$$

Il suo valor massimo è dunque:

$$\frac{\rho}{2} \left(v_1 + \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2$$

mentre l'aspirazione allo spigolo, qual'è richiesta dal teorema di Kutta-Joukowski, è uguale al valore precedente moltiplicato per π .

3. Le considerazioni di cui sopra permettono di precisare un altro punto della mia precedente Nota.

In quella ho considerato il caso in cui il circuito l attorno alla lastra sia costituito da due linee ω circondanti i punti singolari, del tipo già indicato all'osservazione 1^a della presente Nota, e dal doppio contorno della lastra compreso fra le intersezioni di questa con le linee ω . Per concludere che in questo caso il risultato non può differire da quello di Ferrari⁽¹⁾

(1) *La lastra piana e la legge di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », 1928, 1° sem.; fasc. 6.

occorre al solito precisare il modo con cui si fanno impiccolire le linee ω . Ed invero, poichè la depressione $p - p_\infty$ diviene ∞ dell'ordine di ϵ^{-2} , se con ϵ^2 si indica qui la distanza del punto d'intersezione di ω dal punto singolare corrispondente e con h la lunghezza complessiva dei due tratti di linea equipotenziale che fanno parte di ω , la differenza fra il caso considerato e il caso Ferrari sarà rappresentato da $\lim (p - p_\infty) h$, che potrà esser nullo, finito (qualunque) o infinito secondochè, tendendo h a zero come $\epsilon^{2\alpha}$, sarà $\alpha \equiv 1$.

È appena necessario avvertire che queste osservazioni non mutano, anzi confermano, le conclusioni generali della mia precedente Nota.

Astronomia. — *Elementi ellittici del sistema di « U Ophiuchi ».*
Nota del dott. G. VIOLA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Del sistema di « U Ophiuchi » si posseggono già gli elementi orbitali dedotti dal prof. H. Shapley ⁽²⁾ nella ipotesi di un'orbita circolare. A p. 5 dell'accennata opera l'A. accusa che 28 osservazioni isolate del prof. Wendell pongono in luce la eccentricità del sistema. Avendo avuto a mia disposizione, per gentile concessione del prof. A. Bemporad, il materiale da lui raccolto fra il 1918 e il 1921 su questa variabile, ho creduto che valesse la pena di tentare la deduzione dell'eccentricità e degli elementi orbitali, coi metodi esposti dal prof. H. N. Russell nelle note memorie sulle variabili ad eclisse ⁽³⁾ nelle due ipotesi:

- a) che i dischi delle due componenti siano uniformemente illuminati;
- b) che come avviene per il Sole, i dischi siano oscurati verso il lembo.

Ammesso come periodo 1^d.6773476 (Shapley), le 234 osservazioni sono state ridotte tutte all'intervallo D. J. 2422166-2422167, 677476 ed ordinate secondo la fase in gruppi di 10 per le prime 190, ed in gruppi di 6 per le ultime 54.

La differenza fra la massima luce raggiunta al periastro e quella raggiunta all'apoaastro, (dedotta dalla curva di luce) in generale nasce dall'insieme di cause le quali sono connesse con l'eccentricità dell'orbita, ritenendosi che possa aumentare la ellitticità delle stelle, quando sono molto vicine, per effetto della mutua attrazione e per gli effetti di marea.

Ammesso che la massima luce raggiunta nel punto di mezzo fra i due minimi, rappresentando i valori medi di $1 - l^2$ (ipotesi a) e di $1 - l$ (ipotesi b) presi come ordinate ad intervalli equidistanti, di 0^d.0200

(1) Nella seduta del 18 novembre 1928.

(2) *A Study of the Orbits Eclipsing Binaries*, « Princeton Univ. Obs. », n. 3, 1915.

(3) *Astrophysical Journal*, voll. 35 e 36.

rispetto a $\cos^2 \theta$ preso come ascissa, si ha che gli ultimi punti di queste due serie sono situati su due linee rette le cui equazioni sono:

$$1 - l^2 = 0.120 \cos^2 \theta$$

$$1 - l = 0.055 \cos^2 \theta$$

dalle quali abbiamo per i valori della *elettricità apparente*, rispettivamente $\bar{\kappa} = 0.120$, $Z = 0.055$.

I valori normali e le grandezze, rettificate dagli errori sopra indicati, con i relativi residui sono riportati in fine.

Dalle grandezze ricavate (per fasi equidistanti) dalla curva di luce, col procedimento delle differenze finite abbiamo determinato l'epoca del minimo principale dall'annullarsi dell'espressione

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \left(f^I(x) - \frac{1}{6} f^{III}(x) + \dots \right),$$

ottenendo

$$Mp = D. J. 2422166.4005 \quad (\text{Bemporad})$$

e quindi dal confronto con

$$Mp = D. J. 2418026.7030 \quad (\text{Shapley})$$

dividendo per il numero (2468) dei periodi compresi fra le due epoche abbiamo ottenuto come valore del periodo

$$P = 1^d.6773488$$

in accordo molto soddisfacente col valore precedentemente dedotto dal prof. Shapley. Con procedimento analogo, per il minimo secondario si ottiene:

$$Ms = D. J. 2422167.1440.$$

Dalla curva di luce si ha: (fig. 1)

- a) I rami ascendenti sono meno ripidi dei discendenti.
- b) I due minimi hanno profondità diverse, precisamente l'amplitudine $(m - m_0)$ raggiunge il valore di $0^m.81$ nel principale, $0^m.65$ nel secondario.
- c) La massima luce raggiunta tra i due minimi non ha valore costante, ma tende al valore limite $5^m.66$ per valori di θ prossimi a 80° ; ed al valore limite $5^m.675$ per θ prossimo a 260° .
- d) In entrambi i casi, la curva durante il periodo della massima luce è convessa.

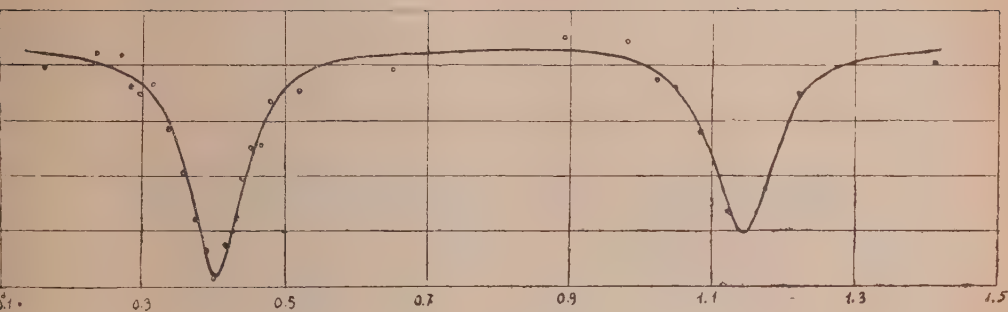


Fig. 1.

Fig. 1
Curva di luce osservata

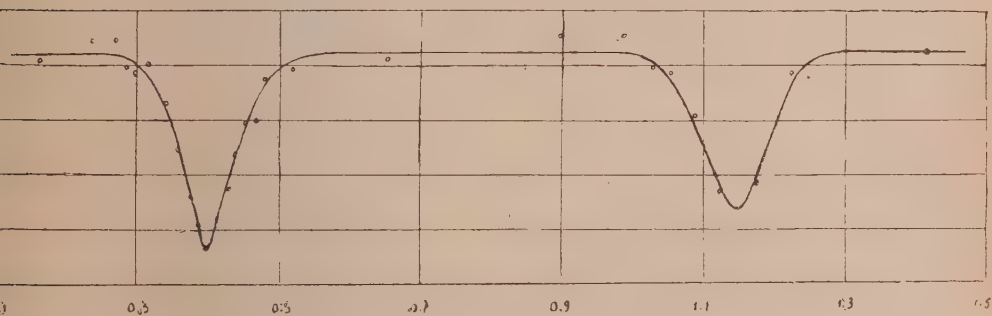


Fig. 2.

Fig. 2
Curva di luce ipotetica
(ipotesi a)

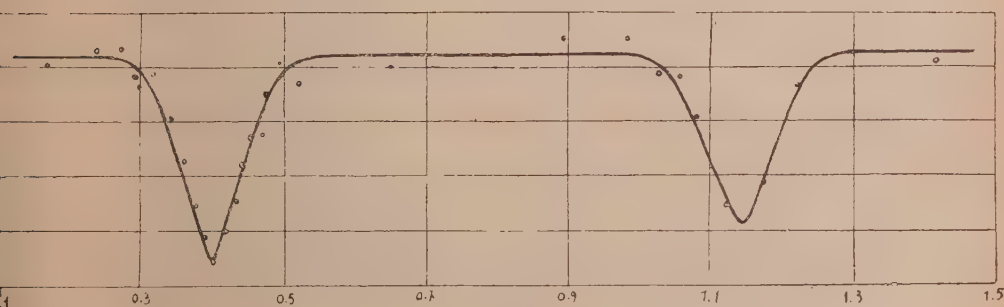


Fig. 3.

Fig. 3
Curva di luce rettificata
(ipotesi b)

e) Indicando con t_1 e t_2 le epoche dei minimi si ha:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= 0^d.7435 \\ \frac{P}{2} &= 0^d.8367 \\ t_2 - t_1 - \frac{P}{2} &= -0^d.0952. \end{aligned}$$

L'anticipo di $0^d.0952$ del minimo secondario, rilevato dalla curva di luce dimostra che l'orbita della variabile in quistione è molto eccentrica. In base a questa importantissima conclusione, la quale conferma l'ipotesi già avanzata da Shapley nella discussione della curva di luce costruita con le 28 osservazioni di Wendell, circa l'eccentricità dell'orbita, noi classifichiamo la « U Ophiuchi » come variabile del tipo « RT Persei », con massima luce non costante ed un'orbita ellittica.

Dalle curve di luce rettificata si hanno nei due minimi, per la diminuzione della luminosità in grandezze stellari ΔG e per il rapporto di luminosità $1 - \lambda$ rispetto alla luminosità complessiva del sistema presa come unità, i valori seguenti: (figg. 2 e 3)

	ipotesi a)	ipotesi b)
Mp	$\Delta G = 0^m.73 \quad 1 - \lambda = 0.4895$	$\Delta G = 0^m.76 \quad 1 - \lambda = 0.5034$
Ms	$\Delta G = 0^m.58 \quad 1 - \lambda = 0.4139$	$\Delta G = 0^m.62 \quad 1 - \lambda = 0.4351$

Calcoliamo i valori di $\text{sen}^2 \theta$ per determinati valori di n (essendo n la frazione di oscuramento massimo α_0). Le costanti $C = \text{sen}^2 \theta_{(1)} = 0.0681$, $D = \text{sen}^2 \theta_{(2)} = 0.0313$, sono state determinate direttamente. Supposto che il valore di D sia esatto, con l'equazione ⁽¹⁾

$$Cw_{2(n)} = \text{sen}^2 \theta_{(n)} - Dw_{1(n)}$$

calcoliamo i valori di C .

Per la funzione

$$\chi\left(k, \alpha_0, \frac{1}{4}\right) = \frac{C \left[1 - \tilde{\gamma} \cos^2 \theta \left(\frac{1}{4} \right) \right]}{D \left[1 - \tilde{\gamma} \cos^2 \theta \left(\frac{1}{2} \right) \right]}$$

si ha:

$$\chi\left(k, \alpha_0, \frac{1}{4}\right) = 2.215.$$

Deducendo i valori di α_0 , corrispondenti a determinati valori di k , abbiamo:

$$\begin{array}{ll} k = 0.92 & \alpha_0 = 0.978 \\ k = 0.95 & \alpha_0 = 0.948 \\ k = 1.00 & \alpha_0 = 0.900 . \end{array}$$

Si rileva dalla tavola III che il valore di $\chi\left(k, \alpha_0, \frac{1}{4}\right) = 2.215$ è soddisfatto per $k = 1, \alpha_0 = 0.900$.

Per la seconda ipotesi, seguendo analogo procedimento, otteniamo:

$$\chi\left(k, \alpha'_0, \frac{1}{4}\right) = 2.021 .$$

Calcolando con le equazioni empiriche

$$\begin{aligned} \chi(k, \alpha'_0, 0) &= 4.10 \chi\left(k, \alpha'_0, \frac{1}{4}\right) - 3.94 \\ \chi\left(k, \alpha'_0, \frac{3}{4}\right) &= 0.973 - 0.300 \chi\left(k, \alpha'_0, \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

i valori delle funzioni:

$$\chi(k, \alpha'_0, 0) \quad \text{e} \quad \chi\left(k, \alpha'_0, \frac{3}{4}\right)$$

si ha:

$$\chi(k, \alpha'_0, 0) = 4.346 \quad , \quad \chi\left(k, \alpha'_0, \frac{3}{4}\right) = 0.367 .$$

Deduciamo il valore delle funzioni $Q(k, \alpha'_0)$ nell'ipotesi che la stella più piccola sia eclissata dalla più grande, o viceversa.

Ammetto che nel minimo principale sia di fronte la stella più grande, si ha:

$$Q(k, \alpha'_0) = \frac{0.435}{\alpha'_0 - 0.503} .$$

Invece, nell'ipotesi che la stella più piccola sia di fronte, risulta:

$$Q(k, \alpha'_0) = \frac{0.503}{\alpha'_0 - 0.435} .$$

Per determinati valori di α'_0 , si ha dopo successive approssimazioni che il valore di $\alpha'_0 = 0.938$ sostituito nelle precedenti dà: $Q(k, \alpha'_0) = 1$.

Dalla tavola V per $Q(k, \alpha'_0) = 1$, $\alpha'_0 = 0.938$, si ricava: $k = 1$.

(1) Le funzioni $w_{1(n)}$ e $w_{2(n)}$ che compaiono come coefficienti in questa equazione empirica sono state calcolate e tabulate da RUSSELL, «A. J.», vol. 36.

$\alpha' = 0.938$, $k = 1$ sono i valori che meglio soddisfano le funzioni χ .
Gli elementi orbitali calcolati nelle due ipotesi, sono riportati nella tabella I.

Da un semplice esame notiamo che le stelle componenti risultano in entrambi i casi di raggio eguale e poco differenti in luminosità. Questo risultato è d'accordo con le soluzioni ammesse da Shapley nel discutere gli elementi orbitali da lui ricavati in base alle osservazioni di Pickering e Wendell.

Possiamo quindi concludere: le osservazioni del prof. A. Bemporad sono per ora le uniche che ci permettono di determinare l'eccentricità dell'orbita; gli elementi orbitali dedotti da esse pienamente confermano quanto l'astronomo Shapley dice nella discussione generale del sistema di « U Ophiuchi ».

TABELLA I.

Elementi		Ipotesi del disco	
		Uniforme	Oscurato
Raggio della stella più luminosa	ab	0.225	0.211
Raggio della stella meno luminosa	af	0.225	0.211
Rapporto dei raggi delle due stelle	k	1.00	1.00
Rapporto degli assi equatoriali	$\frac{b}{a}$	0.958	0.960
Rapporto dell'asse polare all'asse equatoriale maggiore	$\frac{c}{a}$	0.935	0.939
Distanza apparente dei centri	$\cos i$	0.034	0.039
Inclinazione del piano dell'orbita	i	88° 3'	87° 32'
Eccentricità dell'orbita	e	0.288	0.288
Longitudine del periastro.	ω	10° 44'.5	10° 44'.5
Luce della stella più luminosa	L_b	0.544	0.535
Luce della stella meno luminosa	L_f	0.456	0.465
Densità superficiale	$\frac{J_b}{J_f}$	1.19	1.15
Densità della stella più luminosa e meno luminosa	$\bar{\rho}_b$	0.215	0.256
nella ipotesi di componenti di massa uguale . . .	$\bar{\rho}_f$	0.215	0.256
Raggi delle stelle nella ipotesi che le componenti	\bar{a}_b	1.679	1.575
siano di massa eguale a quella del sole	\bar{a}_f	1.679	1.575

Fisica. — *Sulla teoria della fluorescenza sensibilizzata.* Nota ⁽¹⁾ di A. CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Le importanti esperienze di Cario ⁽²⁾ e di Cario e Franck ⁽³⁾ hanno dimostrato che atomi di tipo diverso (per es. Hg e Na, Hg e Tl) possono scambiare fra di loro energia di eccitazione mediante urti di natura speciale. Si supponga infatti che un atomo di tipo a , sotto l'azione della radiazione incidente la cui frequenza uguagli una di quelle caratteristiche di esso, passi dallo stato normale zero allo stato di eccitazione 1; tale cambiamento sarà accompagnato dall'assorbimento di un quanto dato da $h\nu = W_0 - W_1$. Ora questo atomo eccitato venendo nelle vicinanze di un atomo del tipo diverso b può passare dallo stato 1 allo stato zero ma senza emettere il quanto $h\nu$ precedentemente assorbito. La quantità d'energia $h\nu$ in questi urti di tipo speciale viene ceduta all'atomo b ; una parte di questa viene utilizzata per portare l'atomo b dallo stato normale ad uno stato eccitato, l'altra parte viene comunicata all'atomo b sotto forma d'energia cinetica. La condizione essenziale per l'avverarsi di tale fenomeno è evidentemente che il quanto assorbito alla radiazione incidente dall'atomo a sia maggiore di quello necessario per portare il secondo atomo dallo stato normale allo stato eccitato. Questo alla fine ritorna nello stato primitivo con l'emissione d'una frequenza caratteristica, quindi in un recipiente che contenga atomi dei due tipi dove arriva radiazione di risonanza per l'atomo a si osserva anche emissione di righe caratteristiche dell'atomo b , e però gli atomi di questo tipo sono portati all'emissione da un'eccitazione indiretta: tale fenomeno ha ricevuto il nome di *fluorescenza sensibilizzata*. Ricerche ulteriori condotte su tale questione hanno mostrato particolarità interessanti. Si abbia infatti questa condizione: il quanto d'eccitazione dell'atomo a sia maggiore non di una ma di numerose espressioni del tipo $W_1 - W_m$, $W_{1'} - W_m$, $W_{1''} - W_m$ dove W_1 rappresentano le energie di stati di eccitazioni e W_m l'energia dello stato normale dell'atomo b . Dato che i passaggi $m \rightarrow l$, $m \rightarrow l'$, $m \rightarrow l''$ avvengono per azione di urti non è necessario che siano corrispondenti a righe possibili in assorbimento o in emissione. Quale fra questi stati l sarà particolarmente eccitato? Esperienze condotte da Beutler e da Joseph ⁽⁴⁾ su miscugli di Hg e Na hanno mostrato che fra tutti gli stati stazionari dell'atomo di Na, eccitato per questa via

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.

(2) CARIO, «Zeit. für Phys.», Bd. 10, S. 185, 1922.

(3) CARIO und FRANCK, «Zeit. für Phys.», Bd. 17, S. 202, 1923.

(4) BENTLER und JOSEPH, «Naturwiss.», Bd. 15, S. 549.

da un atomo di Hg che abbia assorbito un quanto relativo alla riga di risonanza ($\lambda = 2537 \text{ \AA}$), viene eccitato quello che richiede la quantità di energia che meno si differenzia dal quanto liberato dall'atomo di Hg.

Lo scopo di questa Nota è di trattare il fenomeno della fluorescenza sensibilizzata in base alla meccanica ondulatoria, cercando di spiegare tale interessante comportamento.

*
* *

Tratteremo la questione secondo il metodo che ha permesso al Born ⁽¹⁾ di edificare la teoria dell'urto anelastico fra l'elettrone e l'atomo materiale (esperienze di Franck e Herz). Si abbia dunque l'atomo a costituito da N_a elettroni ($x_1^a, y_1^a, z_1^a \dots x_N^a \dots z_N^a$) e l'atomo b costituito da N_b elettroni.

L'equazione di Schrödinger relativa al problema di questi due atomi sarà:

$$(1) \quad \sum_{s_a}^{N_a} \Delta u + \sum_{s_b}^{N_b} \Delta u + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} (W - V) u = 0.$$

Le condizioni al contorno per u sono quelle solite relative al problema di Schrödinger. La funzione potenziale V che compare in (1) può considerarsi data da tre termini; uno di questi V^a dipende dalla posizione degli elettroni di a rispetto al loro nucleo $V^a = V^a(x_1^a \dots z_{N_a}^a)$ l'altro V^b dipende dalla posizione degli elettroni di b $V^b = V^b(x_1^b \dots z_{N_b}^b)$ ed un terzo termine V^1 dipende dalle distanze mutue degli elettroni dei due atomi $V^1 = V^1(x_1^a \dots z_{N_a}^a, x_1^b \dots z_{N_b}^b)$.

In V^1 comparirà evidentemente la distanza mutua dei due nuclei e quindi supponendo tale distanza costante la soluzione che otterremo per (1) sarà relativa ad una determinata posizione reciproca dei due atomi.

Per risolvere la (1) seguendo il metodo di Born e cioè mediante approssimazioni successive supporremo in primo tempo che V^1 sia trascurabile rispetto a $V^a + V^b$, in tal modo potremo trovare una soluzione u^0 della (1) ponendo

$$u^0 = u_m^a u_n^b$$

dove u_m^a e u_n^b sono soluzioni delle due equazioni

$$\sum_{s_a} \Delta u_m^a + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} (W_m^a - V^a) u_m^a = 0$$

$$\sum_{s_b} \Delta u_n^b + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} (W_n^b - V^b) u_n^b = 0$$

(1) BORN, «Zeit. für Phys.», 38-803, 1926.

qualora le quantità d'energia ceduta dall'atomo a non sia perfettamente uguale a quella dell'atomo b . Escluso dalle nostre considerazioni il caso ⁽¹⁾

$$W_n^a - W_p^a - (W_l^b - W_p^b) = 0$$

e ponendo

$$\int \dots \int \dots \int d\tau_1 \dots d\tau_{N_a} d\tau_1 \dots d\tau_{N_b} V^1 u^a u^b = k_{lp}^a,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} c_{lp}^a &= \frac{k_{lp}^a}{W_n^a - W_p^a - (W_l^b - W_m^b)} \\ f_l^a &= \sum_p \frac{k_{lp}^a u_p^a}{W_n^a - W_p^a - (W_l^b - W_m^b)} \\ u^a &= \sum_l \sum_p \frac{k_{lp}^a u_p^a u_l^b}{W_n^a - W_p^a - (W_l^b - W_m^b)}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora più particolarmente la soluzione ottenuta nel caso della fluorescenza sensibilizzata. Supponiamo quindi che lo stato normale dell'atomo a sia lo stato p e che lo stato n sia lo stato eccitato dove si trova l'atomo per effetto dell'assorbimento della radiazione incidente di frequenza

$$\nu = \frac{W_n^a - W_p^a}{h}.$$

Lo stato normale dell'atomo b sia lo stato m , e che inoltre quest'atomo abbia un certo numero di stati stazionari l per i quali sussista la disegualianza

$$W_n^a - W_p^a > W_l^b - W_m^b$$

e cioè tali da poter essere eccitati dalla quantità d'energia che si libera per il passaggio dell'atomo a dallo stato n allo stato p . Se non ci fosse interazione fra i due atomi ($V^1 = 0$) la soluzione del problema sarebbe data da

$$u^0 = u_n^a u_m^b$$

ma per effetto dell'interazione si ha un altro valore per u : limitiamoci alla prima approssimazione, per quanto sopra si è detto la sommatoria rispetto p si riduce ad un unico termine, e quindi si ha

$$u = u^0 + u^1 = u_n^a u_m^b + \sum_l \frac{k_{lp}^1}{W_n^a - W_p^a - (W_l^b - W_m^b)} u_p^a u_l^b$$

(1) Tale caso corrisponde a quello importantissimo della *risuonanza* che come vedesi non può trattarsi con il metodo di Born.

è cioè per effetto dell'interazione incominciano a comparire lo stato p dell'atomo a e gli stati l dell'atomo b , cioè si hanno le variazioni

$$a : n \rightarrow p \quad ; \quad b : m \rightarrow l$$

e di tutte le variazioni sarà più probabile quella il cui coefficiente dato da

$$\frac{k_{rp}^1}{W_n^a - W_p^a - (W_l^b - W_m^b)} = A_{ml, np}$$

è più grande. Ora abbiamo già visto che k_{rp}^1 risulta funzione della distanza a cui si trovano gli atomi, ma a parità di distanza è funzione anche dei vari stati l , ma oltre questa dipendenza il coefficiente A dipende dalla quantità che trovasi a denominatore e il passaggio $m \rightarrow l$, $n \rightarrow p$ è tanto più probabile quanto più piccolo è il valore della differenza $W_n^a - W_p^a - (W_l^b - W_m^b)$ conformemente ai risultati ottenuti da Beutler.

Fisica. — *Sul teorema di Gibbs — regola delle fasi — per gli equilibri eterogenei* ⁽¹⁾. Nota di V. POLARA, presentata ⁽²⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

Si abbia un sistema di N fasi in equilibrio e sia n il numero di componenti indipendenti di ogni fase: supporremo che gli n componenti siano rappresentati in tutte le fasi. Se non ha luogo variazione alcuna nella quantità di materia che compone una fase qualunque, ad esempio la fase *resima*, indicando con U_r l'energia della fase considerata, con Q_r il calore assorbito, con L_r il lavoro compiuto, il primo principio della Termodinamica darà:

$$dU_r = dQ_r - dL_r.$$

E poichè, indicando con T_r la temperatura assoluta, e con p_r , v_r ed S_r rispettivamente la pressione, il volume e l'entropia della fase, si ha:

$$dQ_r = T_r dS_r$$

$$dL_r = p_r dv_r,$$

si potrà anche scrivere

$$(I) \quad dU_r = T_r dS_r - p_r dv_r.$$

Abbiamo così considerato l'energia U_r della fase come dipendente solo dalle due variabili indipendenti S_r e v_r , entropia e volume.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 18 novembre 1928.

Ripetendo analogo ragionamento per le N fasi e considerando che nelle condizioni di equilibrio del sistema, dovrà intanto sussistere l'equilibrio termico e meccanico fra le varie fasi e quindi

$$T_1 = T_2 = \dots = T_n = T$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p,$$

si avrà dalla (8) sommando rispetto ad r da 1 ad N

$$(9) \quad \sum_1^N dU_r = T \sum_1^N dS_r - p \sum_1^N dv_r + \sum_1^N \mu_{1r} dm_{1r} +$$

$$+ \sum_1^N \mu_{2r} dm_{2r} + \dots + \sum_1^N \mu_{nr} dm_{nr}.$$

D'altra parte, indicando con U , v ed S rispettivamente l'energia, il volume e l'entropia del sistema, sarà

$$U = \sum_1^N U_r, \quad v = \sum_1^N v_r, \quad S = \sum_1^N S_r,$$

da cui differenziando

$$(10) \quad dU = \sum_1^N dU_r, \quad dv = \sum_1^N dv_r, \quad dS = \sum_1^N dS_r$$

e sostituendo in (9)

$$(11) \quad dU = TdS - pdv + \sum_1^N \mu_{1r} dm_{1r} + \sum_1^N \mu_{2r} dm_{2r} + \dots + \sum_1^N \mu_{nr} dm_{nr}.$$

Ricordiamo ora che le condizioni d'equilibrio d'un sistema a temperatura e pressione costante si esprimono eguagliando a zero il differenziale del potenziale termodinamico a pressione costante $U - TS + pv$.

Si avrà quindi per T e p costanti

$$(12) \quad dU - TdS + pdv = 0.$$

Confrontando (11) con (12) si avrà:

$$(13) \quad \sum_1^N \mu_{1r} dm_{1r} + \sum_1^N \mu_{2r} dm_{2r} + \dots + \sum_1^N \mu_{nr} dm_{nr} = 0.$$

Osserviamo che $m_{1r}, m_{2r}, \dots, m_{nr}$ (per $r = 1, 2, \dots, N$) possono solo variare in guisa che la somma delle quantità di uno stesso componente nelle diverse fasi si conservi costante. Dovrà quindi essere:

$$\sum_1^N m_{ir} = \text{costante} \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

E differenziando:

$$(14) \quad \sum_{i=1}^N dm_{ir} = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

La relazione (13) dovrà quindi essere soddisfatta per tutti i valori di dm_{ir} che soddisfano alle (14). Ma le (14) sono manifestamente soddisfatte facendo le dm_{ir} tutte nulle tranne le dm_{ih} e dm_{ik} per cui sia

$$dm_{ih} = -dm_{ik} \quad \text{per } \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ h \neq k = 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

Le (13) daranno allora manifestamente

$$\mu_{ih} = \mu_{ik} \quad \text{per } \begin{cases} h \neq k = 1, 2, 3, \dots, N \\ i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

e potremo anche scrivere

$$(15) \quad \mu_{i1} = \mu_{i2} = \mu_{i3} = \dots = \mu_{iN} \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Tali relazioni, in numero di $(N-1)n$, esprimono che nelle condizioni di equilibrio del sistema i potenziali d'uno stesso componente — derivata dell'energia rispetto alla massa di quel componente — devono essere eguali nelle diverse fasi.

Abbiamo visto che l'energia U_r della fase *resima* ha la forma

$$U_r = TS_r - pv_r + \mu_{1r} m_{1r} + \mu_{2r} m_{2r} + \dots + \mu_{nr} m_{nr};$$

essa è stata fino ad ora considerata come funzione delle variabili

$$S_r, v_r, m_{1r}, m_{2r}, \dots, m_{nr}.$$

Ma la sua forma ci suggerisce di considerarla come funzione di tutte le variabili

$$S_r, v_r, T, p, \mu_{1r}, \mu_{2r}, \mu_{3r}, \dots, \mu_{nr}, m_{1r}, m_{2r}, m_{3r}, \dots, m_{nr}.$$

Operando in tal guisa arriveremo in fondo a stabilire delle relazioni fra tali variabili, non essendo esse fra loro tutte indipendenti.

Differenziando tale funzione, supposta espressa da tutte le variabili, si avrà:

$$dU_r = TdS_r - pdv_r + \mu_{1r} dm_{1r} + \mu_{2r} dm_{2r} + \dots + \mu_{nr} dm_{nr} + \\ + S_r dT - v_r dp + m_{1r} d\mu_{1r} + m_{2r} d\mu_{2r} + \dots + m_{nr} d\mu_{nr}.$$

E tenendo presente la (8) nella quale sia posto $T_r = T, p_r = p$, si ha

$$(16) \quad S_r dT - v_r dp + m_{1r} d\mu_{1r} + m_{2r} d\mu_{2r} + \dots + m_{nr} d\mu_{nr} = 0.$$

Ma tali variabili, in numero di $nN + 2$, oltre che dalle N relazioni (21) sono anche collegate dalle $(N - 1)n$ relazioni (15)

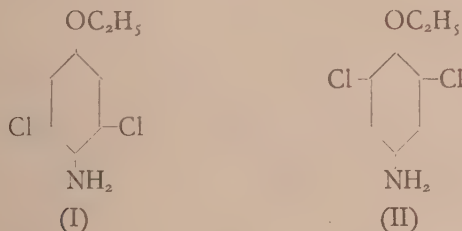
$$\mu_{i1} = \mu_{i2} = \dots = \mu_{iN} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n.$$

In complesso quindi le $nN + 2$ variabili sono collegate da $(N - 1)n + N$ relazioni: di tali variabili se ne possono quindi assumere ad arbitrio r - grado di libertà o varianza del sistema - essendo r espresso da

$$r = nN + 2 - \{ (N - 1)n + N \} = nN + 2 - nN + n - N = n - N + 2.$$

Chimica. — *Sulla 2-6-bicloro-fenetidina*⁽¹⁾. Nota di G. BARGELLINI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

In una Nota precedente⁽³⁾ sono state descritte le esperienze eseguite per stabilire la costituzione della bicloro-fenetidina che Jaeger⁽⁴⁾ aveva preparata facendo passare una corrente di HCl gassoso attraverso ad una soluzione alcoolica di para-nitroso-fenolo. Queste esperienze hanno portato alla conclusione che la bicloro-fenetidina di Jaeger deve corrispondere alla formula (I) di 3-5-bicloro-fenetidina, ma potrebbero anche lasciare il dubbio che ad essa sia invece da attribuire la formula (II) di 2-6-bicloro-fenetidina:



Per eliminare questo dubbio ho voluto preparare una sostanza che corrispondesse veramente alla formula (II) di 2-6-bicloro-fenetidina.

A questo scopo ho preso come prodotto di partenza il bicloro-amminofenolo che Kollrepp⁽⁵⁾ aveva ottenuto clorurando il paranitro-fenolo e riducendo poi il composto clorurato che si forma dapprima. Poichè, come è noto, il cloro entrando nell'anello benzenico ha tendenza ad occupare la

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

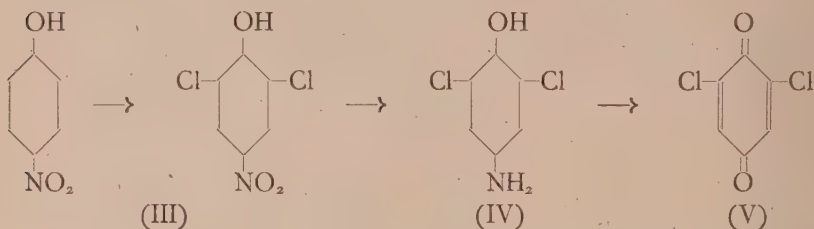
(2) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(3) G. BARGELLINI e P. LEONE. Questi « Rendiconti », 1928, 2° Sem., fas. 9, p. 399.

(4) JAEGER, « Ber. », 8, 895 (1875).

(5) KOLLREPP, « A. », 234, 7 (1886).

posizione orto rispetto al — OH presente e la posizione meta rispetto al gruppo — NO₂ e poichè, come osservò anche Kollrepp, dal suo bicloro-ammino-fenolo si forma per ossidazione con acido cromico il 2-6-bicloro-chinone, ai composti di Kollrepp devono essere assegnate le formule seguenti:



Io preparai prima di tutto alcuni derivati del bicloro-ammino-fenolo di Kollrepp (che saranno descritti nella parte sperimentale) e fra questi il prodotto di condensazione con la benzaldeide. Etilando questo con ioduro di etile e KOH e idrolizzando infine il composto ottenuto, ebbi una nuova bicloro-fenetidina che deve corrispondere alla formula (II) di 2-6-bicloro-fenetidina, della quale preparai pure alcuni derivati fra i quali anche la bicloro-fenacetina corrispondente.

Poichè la 2-6-bicloro-fenetidina (formula (II)) così preparata è differente da quella di Jaeger, si deve a quest'ultima assegnare la formula (I) di 2-5-bicloro-fenetidina come fu ad essa attribuita nella mia Nota precedente sopracitata.

PARTE SPERIMENTALE

2-6-BICLORO-4-NITRO-FENOLO. (Formula (III)). — Fu preparato nella maniera indicata da Kollrepp (loc. cit., [5]) disciogliendo a caldo gr. 25 di p-nitrofenolo in 800-900 cc. di acido cloridrico concentrato, facendo poi raffreddare la soluzione in modo che il p-nitrofenolo precipiti in cristallini minuti e versando infine nel liquido raffreddato una soluzione di gr. 14 di KClO₃ in 200 cc. di acqua. Agitando la mescolanza, il p-nitrofenolo passa prima in soluzione e dopo poco tempo dal liquido, che è diventato rosso, comincia a separarsi il prodotto della reazione. Si lascia stare la mescolanza per qualche ora a temperatura ordinaria, agitando spesso, finchè nel recipiente chiuso non si sente più odore di cloro. Si filtra, si lava bene con acqua e si cristallizza dall'acido acetico bollente. Si ha così il 2-6-bicloro-4-nitrofenolo che fonde a 125° e corrisponde in tutti i caratteri al composto descritto da Kollrepp.

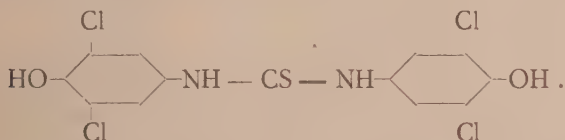
2-6-BICLORO-4-AMMINO-FENOLO. (Formula (IV)). — La riduzione del bicloro-p-nitrofenolo per trasformarlo in bicloro-p-amminofenolo, si può

fare con SnCl_2 e HCl concentrato come indicò Kollrepp oppure con ferro e acido solforico come descrisse Hollemann ⁽¹⁾. La riduzione si può anche più comodamente eseguire con idrosolfito di sodio. Il bicloro-p-nitrofenolo si scioglie in una soluzione diluita di idrato sodico, e scaldando a bagnomaria si aggiunge poco a poco idrosolfito di sodio alla soluzione alcalina gialla finchè il liquido è diventato incolore. Allora si raffredda e si neutralizza con acido acetico. Così si deposita il bicloro-p-amminofenolo che, cristallizzato dal benzolo, fonde a 167° e presenta tutti i caratteri descritti da Kollrepp.

Se si scioglie in acido solforico diluito e si aggiunge una soluzione di bicromato di potassio, si forma il 2-6-bicloro-chinone che, cristallizzato dall'alcool, si ha in aghetti gialli fusibili a 120° come indicò Weselski ⁽²⁾. Lo stesso chinone si forma (come osservò Kollrepp) anche semplicemente riscaldando il bicloro-p-nitro-fenolo sopra il suo punto di fusione.

DERIVATI DEL 2-6-BICLORO-P-AMMINO-FENOLO.

Condensazione col solfuro di carbonio

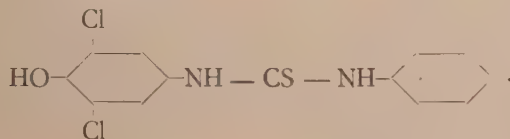


Gr. 3 di bicloro-p-ammino-fenolo e gr. 5 di CS_2 si sciolgono in alcool aggiungendo qualche cristallino di zolfo. Si riscalda su bagnomaria a ricadere per 5 ore e si fa poi distillare l'alcool e il solfuro di carbonio in eccesso. Il residuo si fa cristallizzare dall'alcool diluito. Si ottiene così la tetra-cloro-diossi-difenil-tiourea in cristallini bianchi minutissimi che prima di 200° cominciano a rammollirsi e a decomporsi. Intorno a 210° la fusione e la decomposizione sono complete.

	Trovato	N %	7.09	S %	8.25
per $\text{C}_{13}\text{H}_8\text{Cl}_4\text{O}_2\text{SN}_2$	Calcolato	N %	7.03	S %	8.04

È facilmente solubile nell'alcool e nell'acido acetico, poco nel benzolo.

Condensazione con fenil-senfolo-



(1) HOLLEMANN, « Rec », 37, 99 (1918).

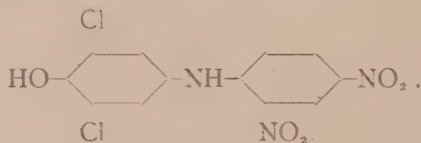
(2) WESELSKI, « Ber. », 3, 646 (1870).

Una miscela di gr. 2.5 di bicloro-p-ammino fenolo, e gr. 2.5 di fenil-senfolo, in soluzione alcoolica si riscaldano su bagnomaria a ricadere per 2-3 ore. Per raffreddamento si deposita il prodotto di condensazione che si filtra, si lava e si fa cristallizzare di nuovo dall'alcool bollente. Si ottiene così la bicloro-p-ossi-difenil-tiourea, in laminette bianche che fondono a 138-140°.

	Trovato	N %	9.20	S %	10.08
per $C_{13}H_{10}Cl_2OSN_2$	Calcolato	N %	8.94	S %	10.22

Si scioglie facilmente nell'alcool e nell'acido acetico, meno nel benzolo.

Condensazione con cloro-2-4-dinitrobenzolo-

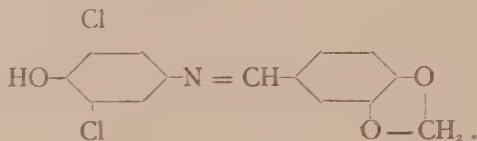


Gr. 2 di bicloro-p-ammino-fenolo insieme con gr. 2.2 di cloro-dinitrobenzolo, gr. 1 di acetato sodico e 20 cc. di alcool, si riscaldano su bagnomaria con refrigerante a ricadere. Dopo 4 ore di riscaldamento, lasciando raffreddare il liquido, si deposita il prodotto di condensazione che si filtra e si fa cristallizzare dall'acido acetico. Aghetti rossi che fondono a 208-210°.

	Trovato	N %	12.34
per $C_{12}H_7Cl_2O_3N_3$	Calcolato	N %	12.20

Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo bollente.

Condensazione con piperonalio-

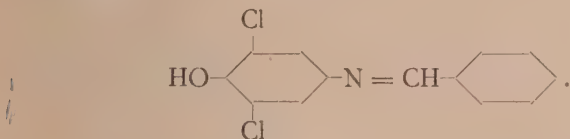


Gr. 9.3 di bicloro-p-ammino-fenolo, e gr. 7.6 di piperonalio si disciolgono in 50 cc. di alcool, e la soluzione si riscalda su bagnomaria con refrigerante a ricadere. Dopo 3 ore di riscaldamento si lascia raffreddare e si filtra poi il prodotto di condensazione che si è depositato. Si cristallizza di nuovo dall'alcool diluito. Fonde a 151-153°.

	Trovato	N %	4.42	Cl %	22.66
per $C_{14}H_9Cl_2O_3N$	Calcolato	N %	4.51	Cl %	22.90

È facilmente solubile nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo anche a freddo.

Condensazione con aldeide benzoica



Il bicloro-p-ammino-fenolo sopra descritto si condensa facilmente con aldeide benzoica quando si riscaldano per 2-3 ore in soluzione alcoolica quantità equimolecolari dei componenti. Dopo aver fatto distillare l'alcool, resta un residuo oleoso che poco a poco si solidifica. Cristallizzato dall'etere di petrolio si ottiene in cristallini gialli fusibili a 99-101°.

	Trovato N %	5.44
per $C_{13}H_9Cl_2ON$	Calcolato N %	5.26

Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico, nell'etere e nel benzolo.

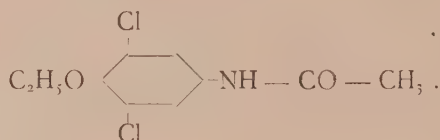
2-6-BICLORO-FENETIDINA. (Formula (II)). — Il benziliden-derivato sopradescritto (gr. 6.7) si fa disciogliere in una soluzione alcoolica di KOH (gr. 6 in 30 di alcool) si aggiunge gr. 10 di ioduro di etile e si riscalda su bagnomaria con refrigerante a ricadere. Dopo 3-4 ore di ebollizione si fa distillare l'alcool e si riprende il residuo con acqua. Il liquido alcalino si estrae con etere che asporta il benziliden-derivato della bicloro-fenetidina il quale, dopo distillazione dell'etere, rimane come residuo oleoso. Questo prodotto greggio è stato direttamente idrolizzato riscaldandolo all'ebollizione con acido cloridrico diluito (1 : 1). Dopo 2-3 ore di ebollizione si diluisce con acqua e si lascia raffreddare: poi si estrae con etere. Aggiungendo ammoniacca al liquido acquoso, si precipita la bicloro-p-fenetidina come un olio che a freddo si solidifica. Si cristallizza da etere di petrolio. Aghetti bianchi che fondono a 105-107°.

	Trovato N %	7.07	Cl %	34.29
per $C_8H_9Cl_2ON$	Calcolato N %	6.80	Cl %	34.46

Si scioglie facilmente nell'alcool, etere, benzolo, acido acetico. Nell'acido solforico concentrato si scioglie senza dare colorazione. Il cloridrato e il solfato di questa bicloro-fenetidina si possono ottenere ben cristallizzati lasciando raffreddare le soluzioni acide bollenti della base.

DERIVATI DELLA 2-6-BICLORO-FENETIDINA.

Acetil-derivato (2-6-bicloro-fenacetina)



Gr. 2 di bicloro-fenetidina si sospendono in 5 cc. di acqua, si aggiungono 5 cc. di anidride acetica e si agita. Il liquido si riscalda spontaneamente, la fenetidina si discioglie e dopo pochi minuti si deposita la bicloro-fenacetina solida cristallina. Si aggiunge acqua; si filtra, si lava e si fa cristallizzare dall'alcool bollente. Aghetti bianchi fusibili a 176-178°.

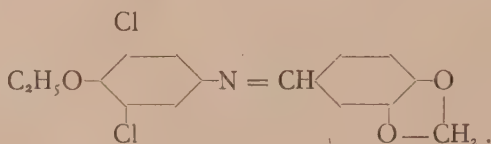
	Trovato	N %	5.73	Cl %	28.90
per $\text{C}_{10}\text{H}_{11}\text{Cl}_2\text{O}_2\text{N}$	Calcolato	N %	5.64	Cl %	28.62

Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico, nel benzolo; poco nell'etere di petrolio.

Azoderivati. — La bicloro-fenetidina si può diazotare facilmente aggiungendo poco a poco nella maniera solita una soluzione di nitrito di sodio alla sua soluzione in un miscuglio di acido cloridrico diluito e acido acetico (per mantenerla in soluzione). Il diazo-composto che si forma si copula facilmente coi fenoli e con le ammine aromatiche. Versando, per es., la soluzione del diazo-composto in una soluzione alcalina di β -naftalo, si ha un precipitato rosso vivo che viene raccolto, lavato e cristallizzato dall'alcool. Fonde a 171-173°.

	Trovato	N %	7.85
per $\text{C}_{18}\text{H}_{14}\text{Cl}_2\text{O}_2\text{N}_2$	Calcolato	N %	7.75

Condensazione con piperonalio



Gr. 2 di bicloro-fenetidina e gr. 1.6 di piperonalio, sciolti in alcool si riscaldano su bagnomaria a ricadere per 4 ore. Per raffreddamento si

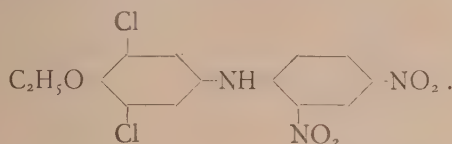
deposita il prodotto della reazione in minutissimi aghetti di color bianco giallognolo. Si purifica cristallizzandolo dall'alcool. Fonde a 133-135°.

	Trovato	N %	4.46	Cl %	20.68
per $C_{16}H_{13}Cl_2O_3N$	Calcolato	N %	4.14	Cl %	21.00

Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo.

Condensazione con cloro-2-4-dinitro-benzolo-

f



Gr. 2 di bicloro-fenetidina e gr. 2 di cloro-dinitro-benzolo, sciolti in alcool si riscaldano su bagnomaria a ricadere. Per raffreddamento si deposita il prodotto della reazione in cristallini brillanti di colore giallo oro. Si cristallizza di nuovo dall'alcool. Fonde a 160-162°.

	Trovato	N %	11.49	Cl %	19.01
per $C_{14}H_{11}Cl_2O_3N_3$	Calcolato	N %	11.29	Cl %	19.08

È facilmente solubile nell'alcool, nell'acido acetico e anche nel benzolo.

Chimica. — *Influenza del magnesio metallico sulla formazione di aldeide formica e di zuccheri, per azione dei raggi ultravioletti sulle soluzioni di bicarbonato di calcio.* Nota ⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Corrisp. M. G. LEVI.

In una Nota precedente ⁽²⁾, fu messa in evidenza la formazione di aldeide formica e di zuccheri, per azione dei raggi ultravioletti sulle soluzioni di bicarbonati alcalini ed alcalino-terrosi.

Diamo ora relazione dei risultati ottenuti, in questo senso, esponendo all'azione dei raggi ultravioletti, soluzioni di bicarbonato di calcio, di data concentrazione, in presenza di magnesio metallico.

La tecnica seguita nelle nostre esperienze, è pressochè la stessa citata nella Memoria precedente, aggiungendovi anche esposizioni in recipienti chiusi, di quarzo trasparente.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1928.

(2) G. MEZZADROLI e G. GARDANO, «Rend. della R. Accademia dei Lincei», vol. VI, fasc. 5-6, 1927.

Nelle nostre prime esperienze abbiamo potuto constatare la formazione di aldeide formica e di glucidi complessi, esponendo soluzioni di bicarbonati alcalini e alcalino-terrosi, all'azione dei raggi ultravioletti.

Tra i diversi bicarbonati, quello di calcio si presenta adatto allo scopo.

Sappiamo come una alcalinità troppo alta, o una acidità troppo forte, nuociano alle reazioni di fotosintesi, che avvengono bene in ambiente debolmente alcalino ⁽¹⁾.

La variazione del PH si mantiene durante la decomposizione del bicarbonato di calcio (decomposizione molto rapida), attorno a $PH = 7.6$, che corrisponde al PH caratteristico di una soluzione satura di carbonato di calcio in quelle condizioni ambiente.

Il bicarbonato di calcio ebbe inoltre la nostra preferenza per il fatto che si decompone completamente sotto l'azione dei raggi e dà un carbonato poco solubile, che precipita.

Il rendimento della reazione è scarso: il potere riducente acquisito dalle soluzioni si perde assai presto, appena toccato il massimo (come si fece notare). Questo, probabilmente, per l'azione ossidante esercitata dall'ozono e dall'ossigeno attivo nell'ambiente alcalino, creato nelle soluzioni, col procedere della decomposizione dei bicarbonati.

Per aumentare il rendimento ed impedire le cause nocive, ricorremmo a differenti catalizzatori atti a mantenere intatto l'*optimum* delle condizioni della fotosintesi.

Abbiamo scelto come catalizzatore il magnesio metallico in polvere finissima, perchè oltre ad esercitare un'azione di catalisi sulla fotosintesi della formaldeide dall'anidride carbonica, ha azione di antiossigeno e azione catalitica sulle ulteriori reazioni di fotosintesi.

La fotosintesi della formaldeide dalla anidride carbonica viene catalizzata positivamente dalla presenza di colloidi inorganici ⁽²⁾.

Il piombo, il magnesio, lo zinco, sottoposti all'azione dei raggi ultravioletti, nell'acqua o in altri mezzi disperdenti, subiscono una trasformazione colloidale ⁽³⁾.

Il magnesio metallico agisce in questo senso come catalizzatore.

Inoltre in presenza di acqua, sotto l'azione del calore e delle radiazioni, svolge idrogeno, creando un ambiente riducente favorevole alle reazioni ⁽⁴⁾.

Le piccole quantità di magnesio che passano in soluzione come idrato promuovono la formazione di CaO , che assieme al carbonato di calcio ed al magnesio stesso, catalizzano direttamente la polimerizzazione dell'aldeide formica ad esosì ⁽⁵⁾.

(1) B. BALY, «End. and. Eng. Chem.», 1924, 16, 1018.

(2) M. MOORE e WEBSTER, «Chem. Abst.», 1918, 12, 1992.

(3) THE SWEDBERG, «Berich. Deutsch. Chem. Gesellschaft», 1911, 4375.

(4) FELTON, «Journ. Chem. Soc.», 81, 426 (1902); 87-817 (1905); 91-687 (1907).

(5) O. LOEW, «Zeitsch. für angew. Chem.», 1927, 48.

Notiamo ancora come il magnesio metallico provochi la formazione di aldeide glicolica, dall'aldeide formica, e permetta pure, per questa via, la formazione di esosi riducenti ⁽¹⁾.

Nelle nostre esperienze abbiamo potuto constatare come il magnesio metallico implichi già nel primo tempo, nelle soluzioni di bicarbonato di calcio esposte all'azione dei raggi ultravioletti, la reazione del iodoformio (reazione che risulta fortissima dopo due ore di esposizione ai raggi, e in soluzione concentrata, quando già il potere riducente totale della soluzione è diminuito).

Senza l'azione del magnesio metallico, la reazione compare solo dopo lungo tempo, e resta debole.

Esaminando il liquido alla distillazione frazionata, abbiamo potuto constatare nelle ultime frazioni, la presenza di un'aldeide complessa.

Diamo qui sotto i risultati sperimentali ottenuti.

POTERE RIDUCENTE DELLE SOLUZIONI DI BICARBONATO DI CALCIO
ESPOSTO SOLO IN BACINELLE APERTE.

Durata dell'esposizione in minuti	ccm. I N/10 consumato
10	presenza di formaldeide
20	0.6 ccm.
30	1.2 ccm.
45	0.04 ccm.
60	—

POTERE RIDUCENTE DELLE SOLUZIONI DI BICARBONATO DI CALCIO
ESPOSTO IN PRESENZA DI MAGNESIO METALLICO IN BACINELLE APERTE.

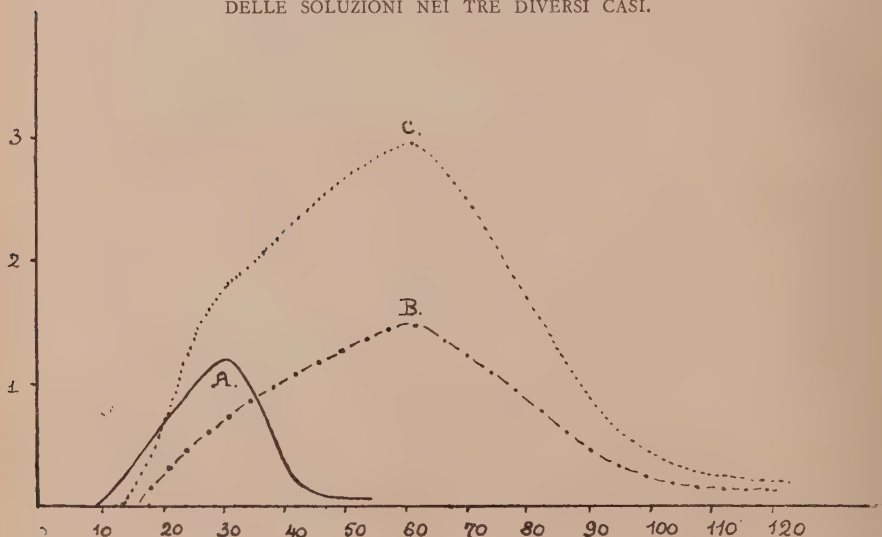
Durata dell'esposizione in minuti	ccm. I N/10 consumato
10	—
20	presenza di formaldeide
30	0.8 ccm.
45	1 ccm.
60	1.5 ccm.
90	0.2 ccm.
120	0.2 ccm.

(1) EULER, « Berich. Chem. Gesellsch. », 39, 43 (1906).

POTERE RIDUCENTE DELLE SOLUZIONI DI BICARBONATO DI CALCIO, ESPOSTE IN PRESENZA DI MAGNESIO METALLICO, IN RECIPIENTI CHIUSI DI QUARZO TRASPARENTI.

Durata dell'esposizione in minuti	ccm. I N/10 consumato
10	—
20	—
30	—
45	presenza di formaldeide
60	1.8 ccm.
90	2.48 ccm.
120	2.96 ccm.
	0.5 ccm.
	minimo

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA VARIAZIONE DEL POTERE RIDUCENTE DELLE SOLUZIONI NEI TRE DIVERSI CASI.



- A. - Soluzione di bicarbonato di calcio, esposta sola in bacinelle aperte.
 B. - Soluzione di bicarbonato di calcio, esposta in presenza di magnesio metallico, in bacinelle aperte.
 C. - Soluzione di bicarbonato di calcio, esposta in presenza di magnesio metallico, in recipienti chiusi di quarzo trasparenti.

CONCLUSIONI:

1. Nelle soluzioni di bicarbonato di calcio il potere riducente aumenta gradatamente con l'esposizione ai raggi fino a raggiungere un massimo, dopo 30 minuti per l'esposizione in bacinelle aperte, dopo un'ora per l'esposizione in recipiente chiuso di quarzo, trasparente.

2. La presenza di magnesio metallico nelle soluzioni di bicarbonato di calcio esposto all'azione dei raggi ultravioletti, aumenta la quantità totale di sostanze riducenti, formate.

3. Il rendimento in sostanze riducenti, è più elevato quando le esposizioni si fanno in recipienti chiusi di quarzo trasparenti.

4. La presenza di magnesio metallico induce la formazione di zuccheri riducenti nel liquido, il residuo della distillazione della soluzione di bicarbonato di calcio, che ha subito l'azione dei raggi ultravioletti, riduce il Fehling e dà un osazone.

Ci riserviamo di dare, in altra Nota, relazione di esperienze condotte con altri catalitici.

Farmacologia. — *Esperienze sulla fissazione di colloidi provocata dal cloroformio.* Nota di G. SPAGNOL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio L. SABBATANI.

A nome del prof. Spagnol ed a seguito di una Nota già presentata, ho il piacere di mostrare alcune esperienze sulla fissazione di colloidi minerali ed organici provocata dall'applicazione del cloroformio.

1^a Esperienza: Ad un coniglio si iniettano nella vena auricolare centigr. 15 di solfuro di mercurio colloidale.

Contemporaneamente per 15 secondi soli si applica sulla cute del fianco un batuffolo di cotone bagnato con cloroformio.

Dopo due ore si uccide l'animale e nel connettivo sottocutaneo, là dove s'era applicato il cloroformio, si trova una bella e netta macchia nera di solfuro di mercurio, fissato, mentre nel resto del sottocutaneo non ve n'è traccia.

2^a Esperienza: Ad un coniglio si inietta nella vena auricolare del solfuro di mercurio colloidale.

Contemporaneamente per 15 secondi si applica sulla cute del fianco un po' di cloroformio con un batuffolo di cotone.

Dopo otto giorni si uccide il coniglio e dove era stato applicato il cloroformio si trova una bella macchia nera da solfuro mercurico fissato nel connettivo sottocutaneo.

3^a Esperienza: Ad una cavia si inietta nella vena giugulare un milligrammo di Trypanblau e contemporaneamente sulla pelle del fianco per 30 secondi un po' di cloroformio con un batuffolo di cotone.

Dopo un'ora si uccide la cavia e nel connettivo sottocutaneo, dove s'era applicato il cloroformio, vi è una bella, netta macchia bleu da Trypanblau fissato.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

Geologia. — *Sulla presenza del Miocene nella Sirtica.* Nota di A. DESIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. DAL PIAZ.

Se poteva essere supposta l'esistenza del Miocene nella Sirtica in base alla natura geologica delle regioni confinanti e all'esistenza di notevoli depositi di solfo e gesso ⁽²⁾, fino a oggi mancava una prova positiva, fondata, cioè, su determinazioni paleontologiche. Il prezioso dono fatto in questi giorni dal maggiore Italo Girola di Milano al Museo Civico di Storia Naturale della sua città di un certo numero di fossili e di campioni di rocce raccolti in Sirtica, permette finalmente di sciogliere il dubbio e di riconoscere con sicurezza l'esistenza del Miocene in una vasta plaga della Sirtica ⁽³⁾.

Il materiale raccolto dal Magg. Girola proviene in massima parte dal triangolo compreso fra l'Oasi di Augila, il pozzo di Zaggùt, 140 km. più ad oriente, e Maaten Risàm, 120 km. a NNO di Augila. La zona che ha fornito maggiore numero di fossili è quella compresa fra Augila e Ain Zaggùt e specialmente i dintorni dell'Ain Sidi Mohammed. Ciò probabilmente deriva dal fatto che lungo tale itinerario la carovaniera segue le pendici della scarpata di un altipiano e perciò i fossili, che le azioni eoliche isolano dalla roccia, precipitano in basso e talora si accumulano — come ho avuto occasione di osservare nell'Oasi di Giarabùb — in notevole quantità ai piedi della scarpata stessa.

Le specie riconosciute nel tratto sopra ricordato sono le seguenti:

Orbicella Ellisiana (Defr.)

Pecten cfr. *benedictus* Lam.

» *Tournali* var. *syrtica* Cossm., Peyr.

» sp. ind.

Ostrea edulis var. cfr. *Boblayei* Desh.

» (*Cubitostrea*) *frondosa* var. *Rohlfsi* Fuchs.

» (*Saccostrea*) *sacellus* Duj.

(1) Nella seduta del 18 novembre 1928.

(2) A. DESIO, *La missione scientifica della Reale Società Geografica Italiana a Giarabùb. Parte I, Relazione Geo-idrologica*, «Atti del X Congr. Geografico It.», Milano 1927, vol. I, p. 157.

(3) Un alto elogio va fatto al Magg. Girola che malgrado gli impegni militari, ha trovato il modo di raccogliere con grande perspicacia del materiale paleontologico e che ha avuto la pazienza e la costanza di portarselo dietro per lungo tempo per consegnarlo a un istituto scientifico.

Gryphaea (*Crassostrea*) *gryphoides* (Schloth).
 » » » var. *gingensis* (Schloth.).
Conus sp. ind.
Scutella *Ammonis* Fuchs.
Tretodiscus *Fuchsi* (Fourt.)
Clypeaster *altus* var. *alticostatus* Mich.

L'età di questa fauna è facilmente determinabile per la presenza di specie molto significative del Miocene. Per i confronti converrà riferirci all'Oasi di Giarabùb con cui esistono le seguenti forme in comune:

Orbicella *Ellisiana* (DeFr.).
Pecten *benedictus* Lam.
Ostrea *edulis* var. *Boblayei* Desh.
 » (*Cubitostrea*) *frondosa* var. *Rohlfsi* Fuchs.
Gryphaea (*Crassostrea*) *gryphoides* (Schloth.).
 » » » var. *gingensis* (Schloth.).
Tretodiscus *Fuchsi* (Fourt.).

Come nell'Oasi di Giarabùb anche qui troviamo una certa promiscuità di forme prevalentemente elvezie e prevalentemente langhiane. Fra quelle rimanenti, il *Pecten Tournali* var. *syrtica* Cossm. Peyr. è una forma elveziana dell'Aquitania; l'*Ostrea* (*Saccostrea*) *sacellus* Duj. è una specie caratteristica della facies pontileviana dei Faluns (Vindoboniano); il *Clypeaster altus* var. *alticostatus* Mich. non appartiene ad un livello ben definito del Miocene.

In complesso si può dire che anche nella regione compresa fra Augila e Ain Zaggùt i livelli più bassi della serie stratigrafica appartengono alla zona più alta del Langhiano, quelli più elevati, che costituiscono il ciglione e probabilmente una parte della superficie dell'altipiano, all'Elveziano. Riguardo all'ambiente batometrico e climatico valgono le stesse considerazioni fatte per la fauna di Giarabùb: è manifesto un ambiente litorale e un clima subtropicale⁽¹⁾.

Dalla regione a nord di Augila il Magg. Girola ha riportato dei frammenti di tronchi d'albero silicizzato, di cui alcuni mi sembrano appartenere al gen. *Palmoxylon*. Questi tronchi provengono dal tratto compreso fra la Hatiet Bedaffar e l'Ain en-Naga, nell'Uadi el-Faregh e la maggior parte è stata raccolta nei dintorni di Maaten Risàm. Sull'età di questi tronchi è difficile pronunciarsi, ma si possono ben supporre delle strette analogie di giacitura e d'età con quelli dei dintorni di Giarabùb⁽²⁾. Tanto più, poi,

(1) A. DESIO, *Resultati scientifici della missione all'Oasi di Giarabùb*. Parte II, *La Geologia*, «R. Soc. Geogr. Ital.», Roma 1928, p. 123.

(2) A. DESIO, *Result. scient.*, op. cit., p. 137.

che anche nella Sirtica, insieme con le piante silicizzate, si trovano dei noduli di selce bruna e gialla del tutto simili a quelli che accompagnano i legni fossili della Marmarica.

Lungo lo stesso itinerario furono pure raccolti dei campioni di gesso in grandi cristalli tabulari. Per quanto tale minerale non possa servire ad una determinazione cronologica sicura dei terreni che lo contengono, va, tuttavia, tenuto presente che anche nella serie miocenica della Marmarica i livelli gessiferi sono abbastanza frequenti. Non mi pare, perciò, fuori di luogo pensare che lungo tale itinerario il suolo sia costituito da Miocene, tanto più richiamando quanto è stato detto precedentemente a proposito della fauna fossile. Altri campioni di gesso dello stesso tipo, provengono da una zona al di fuori del triangolo Augila-Ain Zaggūt-Maaten Risām, e precisamente da Maaten Burruei, una cinquantina di chilometri a sud di Marsa el-Brega. Anche in questa regione è da supporre la presenza del Miocene.

In conclusione la collezione riportata in patria dal Magg. Girola attesta la grande diffusione del Miocene nella Sirtica orientale e lascia supporre con fondatezza che la zona miocenica della Marmarica si continui verso occidente sino alla Sirtica passando a mezzogiorno del Gebel centrale, o, in altre parole, che tutta la regione predesertica e in parte desertica della Cirenaica fra il 29° e il 31° parallelo sia costituita da Miocene inferiore e medio marino.

Biologia. — *Intorno all'epoca di riproduzione dei Delfini.*
Nota di G. BRUNELLI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Per quanto i Delfini siano mammiferi interessanti sotto ogni riguardo, sia dal punto di vista biologico che da quello economico della pesca, pei notevoli danni che essi arrecano alle reti, tuttavia sono assai scarse le notizie circa i loro costumi. Ciò dipende senza dubbio dalla grande difficoltà che si presenta a compiere tali osservazioni in mare, data la grande sveltezza e agilità dei Delfini nello sfuggire ad ogni inseguimento, e a rendere rara la cattura, ma dipende senza dubbio anche dal fatto che i pescatori, gli unici che potrebbero dare notevoli ragguagli su questi problemi, per difetto di coltura e trascuranza non hanno evidentemente dato sufficienti ed esatte notizie.

In seguito alla cattura del *Mesoplodon* nel Tirreno, mi convinsi della opportunità di proporre la regolamentazione di tutta questa materia riguardante la cattura dei Cetacei e l'utilizzazione di tali dati pel progresso delle

(1) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

scienze biologiche; in seguito a ciò il Ministero per l'Economia Nazionale nello stesso ordine di idee con apposita circolare richiamava le Capitanerie sulla opportunità di inviare al R. Laboratorio centrale di Idrobiologia gli embrioni catturati colle femmine in gestazione.

Si riuniva così già fin dal primo anno un certo numero di osservazioni che è quello sul quale si richiama l'attenzione.

Del materiale pervenuto, misurati gli esemplari, con una misura convenzionale tirando una linea dal vertice del capo alla base della coda, risultarono, sulla fine dell'inverno e nell'inizio della primavera del 1928, i seguenti dati per le quattro catture qui sotto elencate:

Rimini 17 aprile 1928	esemplare di cm. 32.5
Siracusa 30 maggio 1928	» » » 42
Porto Empedocle 15 marzo 1928	» » » 39.5
» » 11 aprile » » » »	» » » 64

La notevole differenza di accrescimento dell'ultimo esemplare, è forse in relazione col fatto che a differenza dei tre primi embrioni si tratti invece probabilmente del *Delphinus tursio*.

Nel Mediterraneo vivono due specie di Delfini, il Delfino comune (*Delphinus delphis* L.) e il Delfino maggiore (*Tursiops tursio* Fabr.), il primo si riscontra più frequentemente del secondo ed è di minori dimensioni. Poco dicono i trattati intorno alla riproduzione dei Delfini.

Nello stesso libro di Haacke-Mazzarelli (*La vita animale nel mare*) mancano i dati del mese di riproduzione del Delfino comune.

La confusione aumenta leggendo in un libro esatto come il Cavanna⁽¹⁾: « Partoriscono in autunno, dopo una gestazione di dieci mesi, uno o due figli ». Il Legendre ha trattato questo argomento in una sua Nota interessante⁽²⁾, rileva anche egli il difetto e la contraddizione dei dati. Egli ricorda che alcuni autori come Cuvier, Brandt ammettono che i Delfini si accoppino nel mese di marzo e che le femmine partoriscono alla fine d'autunno. Però Fischer avrebbe osservato in marzo una femmina pregna. Si domanda quindi se l'abbondanza delle femmine di Delfino in inverno è in relazione con un periodo di gestazione o di allattamento.

Contraddicendo Cuvier pertanto le mie osservazioni confermano quella isolata e incompleta di Fischer, e indicano come frequente il periodo di gestazione avanzata verso l'inizio della primavera. Maggiore accordo vi è tra gli autori nell'ammettere per i piccoli Odontoceti una gestazione di dieci mesi⁽³⁾ e ciò è senza dubbio in relazione colla difficoltà di allattamento e

(1) CAVANNA G., *Doni di Nettuno*, Carnesecchi, Firenze, 1913.

(2) R. LEGENDRE, *Note biologique sur le Dauphin commun (Delphinus delphis)*, « Bulletin Soc. Zoologique de France », 47, 1922.

(3) MAX WEBER, *Die Saugtiere*, 2, Fischer, Jena 1928.

la breve durata di esso. Molto importante mi sembra che verificando nell'inizio della primavera l'epoca del parto dei Delfini, esso viene naturalmente a coincidere col periodo di apparizione dei grandi banchi di pesce turchino migratorio (sardelle, alici ecc.) alla superficie del mare, perciò detto fenomeno rientra in quella norma che può assumere il valore di una legge generale, secondo la quale i giovani nati quando la prole è atta tendono a svilupparsi nel periodo in cui è più facile per essi ritrovare l'alimento necessario.

Zoologia. — *Studi sulla fisiologia degli insetti (sistema nervoso)* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di M. TIRELLI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Si sono studiate da tempo le reazioni che gli insetti presentano agli stimoli esterni, mutando le loro condizioni ricettive. (Illuminazione asimmetrica, copertura di una superficie corneale, mutilazione di un'antenna, asportazione di un occhio ecc.) ⁽³⁾ e si è cercato di stabilire con asportazioni e lesioni la funzione dei singoli gangli ⁽⁴⁾, con risultati invero molto contraddittori. Baldi ha concluso che, per la conservazione della facoltà locomotoria, è necessaria la presenza del ganglio sottoesofageo; che l'asportazione del solo ganglio sopraesofageo determina una deambulazione *asensoria*; che la decapitazione paralizza totalmente l'insetto e che per ottenere i movimenti di maneggio è necessaria una lesione unilaterale del ganglio sopraesofageo, in seguito alla quale l'insetto cammina nel senso del lato illeso. Egli immagina la funzione del ganglio sottoesofageo come « un passaggio obbligato degli archi riflessi destati dalle attività dei singoli arti, e per sè teoricamente sufficienti ad assicurare la coordinazione e la continuità della deambulazione ».

Per meglio determinare la funzione precisa dei gangli sopra e sotto esofagei, e per dare più ampia spiegazione della meccanica e del determinismo del maneggio, ho esteso le ricerche ad un gran numero di insetti, usando in parte la tecnica già usata da Bethe, da Comes, da Baldi, (tagli, punture con aghi freddi o roventi) ma nella maggioranza dei casi valendomi di un metodo nuovo (avvelenamento, con soluzione di cianuro di potassio, del lobo ottico e delle parti adiacenti, ottenuto asportando una

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma, e nella R. Stazione Bacologica Sperimentale di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1928.

(3) Bohn (1905); Dewitz; Radl (1901); Parker (1912); Dolley (1916); Dubois (1886); Kafka (1914), etc.

(4) Bethe (1897), (1905); Bethe e Yung (1878); Wagner (1896); Minckiewicz (1910); Comes (1912), (1921); Steiner (1898); Uexhull (1908); Baldi (1921, 22, 24), etc.

superficie corneale, ed introducendo nella ferita un batuffolo di ovatta imbevuto della soluzione velenosa).

Movimenti di maneggio ⁽¹⁾. — I movimenti di maneggio sono simili in tutti gli insetti presi in esame nelle esperienze. Vi sono naturalmente differenze inevitabili dovute alla diversa costituzione morfologica dell'apparato deambulatorio delle varie specie studiate. (*Carabus*, *Gymnopleurus*, *Otiorrhynchus*, *Scaurus*, *Zonabris*, *Pentodon*, *Capnodis*, *Formica*, *Camponotus*), differenze però non maggiormente accentuate di quelle che si possono già osservare nei reogrammi rettilinei.

Lo schema fondamentale del movimento di maneggio è dunque identico per tutti gli insetti. Si possono distinguere tre tipi o meglio tre gradazioni di maneggio. Il primo tipo, più frequente, si ha dopo un avvelenamento poco profondo; l'asse di rotazione cade fuori del corpo dell'insetto. Nel secondo tipo l'asse cade in un punto del corpo stesso dell'insetto (margine esterno del corpo, una zampa tesa e fissa al suolo, estremità dell'addome o della testa piegata in basso e fissa a terra). Il terzo si ha quando l'asse di rotazione coincide o quasi con l'asse verticale passante per il centro di gravità dell'insetto (*maneggio a ruota*).

Per ottenere il secondo e terzo tipo di maneggio occorrono avvelenamenti più spinti. Nel maneggio di primo tipo che è il più caratteristico, poichè negli altri due tipi intervengono altri fenomeni e moti riflessi che descriverò più avanti e che alterano l'aspetto schematico del maneggio puro e semplice, si hanno azioni locomotorie esattamente simili a quelle che intervengono nella deambulazione normale rettilinea. Le zampe vengono sollevate ed abbassate con il medesimo ritmo, ed i gruppi di impronte che si osservano sono identici a quelli che si notano sui reogrammi rettilinei.

Gli insetti girano, apparentemente, come se si trattasse di un movimento volontario e spontaneo, eseguendo atti normalmente coordinati. Si tratta invece di una deambulazione assolutamente obbligata, come è dimostrato fra l'altro dalla mancanza di quello che possiamo chiamare *aggiustamento* degli atti locomotori. In una curva a raggio molto piccolo, descritta da un insetto normale, avviene quasi sempre che, mentre una zampa che guarda il lato convesso della curva esegue tre o quattro atti locomotori, la zampa simmetrica che guarda il lato concavo, non ne esegue che uno o due. Nel maneggio invece, per quanto sia stretto il circolo descritto, ad ogni impronta di una zampa esterna corrisponde simmetricamente un'impronta della corrispondente zampa interna.

Nel maneggio, gli arti del lato leso sono abnormemente distesi, e flessi invece quelli del lato illeso. Il movimento circolare è fondamentalmente

(1) Ottenevo i reogrammi che mi servivano per lo studio della locomozione e del maneggio degli insetti, facendo semplicemente marciare gli insetti sopra una carta, affumicata sul solito cilindro di Marey.

dovuto ad una azione di attiramento del corpò esercitata in special modo dalle zampe anteriori e medie del lato illeso, e ad un movimento di spinta esercitato dalle zampe media e posteriore del lato leso. L'azione della lesione nervosa non si limita soltanto alla muscolatura degli arti, ma si estende alla muscolatura generale dell'insetto. Tutti i muscoli dell'antimero leso sono più rilasciati del normale e più contratti del normale sono tutti i muscoli dell'antimero illeso. I pezzi scheletrici del tronco (torace, addome, segmenti del torace e dell'addome) per quanto è loro concesso dalla minore o maggiore rigidità della cuticola chitinosa, appaiono piegati gli uni sugli altri, in maniera che l'insetto tutto si presenta come curvato, con la convessità della curva rivolta all'esterno del circolo di maneggio, e segna quindi, quasi come un indice, la direzione del movimento di maneggio.

Decapitando un insetto, cioè togliendogli i gangli sopra e sottoesofagei, si ha paralisi completa e totale. Identica paralisi si osserva recidendo i connettivi subito dopo il ganglio sotto esofageo; ed in genere, ledendo i gangli toracici, si osserva paralisi del paio di arti corrispondente al ganglio leso, e delle paia poste caudalmente ad esso.

Ledendo profondamente e bilateralmente il ganglio sopraesofageo o asportandolo, si ottiene una deambulazione asensoria. (L'insetto cammina sempre in avanti, non è capace di reagire ad ostacoli). Ledendo soltanto il ganglio sottoesofageo, l'insetto invece si paralizza del tutto come dopo la decapitazione. Il ganglio sottoesofageo, trovandosi fra il ganglio sopraesofageo (sede dei principali centri sensori) ed i restanti gangli della catena, riceve probabilmente dal primo gli stimoli esterni (o le sensazioni o le percezioni già elaborate), e dai secondi gli stimoli propriocettivi; dalla fusione di questo doppio ordine di stimoli sensori risulta probabilmente lo stimolo atto a generare l'impulso motorio. Io non credo che dal ganglio sottoesofageo parta l'impulso motorio stesso; perchè quasi di sicuro i centri motori diretti dei singoli arti si trovano nei gangli toracici corrispondenti. Ma affinchè i centri motori dei gangli toracici agiscano, occorre che ricevano lo stimolo necessario dal ganglio sottoesofageo.

Essendo bilaterali sia gli organi di senso che quelli di moto, si potrebbe pensare che esistesse fra loro una connessione fisiologica oltre che strutturale; in modo che, rompendo la simmetria funzionale degli uni, si rompesse anche quella degli altri. Ciò sembra realmente avvenire in quei casi in cui si ha maneggio dopo semplice asportazione o impedimento funzionale di organi di senso esterni (Kafka 1914), ma spesso non basta, per rompere la simmetria funzionale degli organi motori, rompere quella degli organi sensori esterni. Tale dissimmetria funzionale degli organi motori si produce invece, se spingiamo la lesione e l'impedimento funzionale (col cianuro di potassio) sino ai centri nervosi sensori. Così, asportando l'occhio di un Carabo, l'insetto non maneggia, mentre se avveleniamo il lobo ottico col KCN, l'insetto maneggia immediatamente. Per spiegare ciò bisogna pensare che

esistano dei chiasmi reciproci, e che essi avvengano in gran parte durante la prima tappa del circuito nervoso, cioè nel tragitto fra organi e centri di senso. Quindi gli stimoli unilaterali direttamente assunti dagli organi sensorî esterni, diventando percezioni acquisite si trasformano in bilaterali. Se i chiasmi avvenissero dopo, ad esempio tra centri sensorî e centri motori, anche colpendo i centri sensorî, uno stimolo unilaterale dovrebbe avere sempre effetto motorio bilaterale. Ho già detto come è quasi certo che i centri motori diretti risiedano nei gangli toracici, ma ammettendo che qualche centro motorio possa trovarsi nel ganglio sopraesofageo, molto ravvicinato ai centri sensorî, e che quindi venga a risentire gli effetti dell'avvelenamento, si può pensare al massimo che i chiasmi avvengano tra centri di senso e di moto, cioè nella seconda tappa del circuito nervoso.

Se in un insetto maneggiante avveleniamo il lobo ottico rimasto illeso, si possono avere due casi. O l'effetto del secondo avvelenamento supera quello del primo, ed allora si ha una inversione del maneggio, o non lo supera, ed il maneggio resta come prima. Come caso limite teorico si potrebbe avere un avvelenamento uguale con ritorno alla deambulazione rettilinea. L'effetto di un avvelenamento non troppo spinto si esaurisce dopo un certo tempo, il KCN viene lentamente eliminato, l'insetto riprende a camminare in linea retta, ed allora, avvelenando il lobo ottico ancora illeso, si ottiene una inversione del maneggio, regolare e costante. Può esaurirsi anche l'azione di questo nuovo avvelenamento, ed allora ripetendo l'inoculazione sul lobo leso la prima volta, si può tornare al maneggio primitivo.

Si può anche alcune volte (in casi di maneggi ottenuti dopo lesioni meccaniche) ottenere la deambulazione rettilinea da un insetto maneggiante, se si estende e si rende più grave il trauma primitivo. Si tratta degli effetti di due traumi unilaterali successivi che si elidono; estendendo ancora la ferita si ritorna al maneggio. Si riceve l'impressione che il maneggio risulti dal trauma successivo di più centri di azione antagonista, in modo che, togliendone uno, si inizi il maneggio, togliendone un altro si ritorni alla condizione normale, e togliendone un terzo si abbia ancora la condizione alterata. Sarebbe una vera inibizione dell'inibizione. Casi consimili ha osservato Alverdes⁽¹⁾ in larve di *Cloëon* con un occhio abbagliato.

Moti riflessi. — Gli insetti avvelenati unilateralmente nel ganglio sopraesofageo cominciano a tracciare maneggi ampi, a largo diametro; poi col progredire dell'avvelenamento, i giri diventano più stretti, si arriva infine ad un punto in cui i reogrammi non sono più regolari e netti, ma appaiono più o meno alterati, e tanto più alterati quanto più è avanzato l'avvelena-

(1) ALVERDES F., *Körperstellung und lokomotion bei insekten nach Eingriffen am Gehirn.* « Biol. Zentr. », 1923, pp. 354-364.

mento. Ho indicato genericamente come alterati questi particolari reogrammi finchè le osservazioni sulle formiche, che hanno movimenti più agili e sciolti e pertanto più facilmente distinguibili ed interpretabili, non mi hanno permesso di scindere i fenomeni dovuti al maneggio vero e proprio, dai fenomeni riflessi che vengono a sommarsi in un secondo tempo col movimento di maneggio.

Vi sono movimenti riflessi che possono presentarsi indifferentemente sia da soli sia in concomitanza col maneggio, altri che si presentano unicamente soli, altri infine soltanto in concomitanza col maneggio. I movimenti riflessi presentati dall'insetto durante il suo movimento circolare, alterano la normale meccanica del movimento stesso, e danno origine a reogrammi che si discostano in vario modo dallo schema normale. Tali reogrammi però non possono chiamarsi atipici, perchè anzi sono caratteristici per quei dati movimenti riflessi che l'insetto eseguiva mentre tracciava il reogramma. Quando l'insetto è fermo, per eseguire i movimenti riflessi ha bisogno di uno stimolo sia pur piccolo, quando cammina esegue spontaneamente i riflessi, quasi che la deambulazione con l'eventuale incontro di ostacoli ecc. costituisca uno stimolo sufficiente.

Pur trattandosi di due fenomeni differenti, dovuti probabilmente ad avvelenamento contemporaneo di centri contigui, ma non continui, maneggio e riflessi interferiscono quindi fra di loro: sino ad un certo punto, sia in ordine di tempo che in grado di avvelenamento, vi è maneggio soltanto, poi maneggio e riflessi contemporaneamente, ed infine riflessi soltanto. Per lo studio grafico dei riflessi è molto importante quel periodo di sovrapposizione, perchè l'insetto è ancora capace di maneggiare, ed imprime al suo reogramma, come ho detto, delle alterazioni diverse e tipiche secondo il riflesso che presentava in quel determinato momento.

Io distinguo i riflessi in tre categorie principali:

1. *Movimenti di grattamento.* — In questa prima categoria bisogna far rientrare i movimenti di pulizia già ampiamente descritti da Baldi (1924), i movimenti di strisciamento, in cui le zampe si flettono debolmente ed incompiutamente, ed i movimenti di grattamento propriamente detti, in cui le zampe raschiano fortemente il substrato, senza tuttavia che l'insetto riesca a progredire. Un insetto che presenti questo ultimo tipo di riflessi, e che abbia contemporaneamente delle oscillazioni angolari del corpo attorno al suo asse verticale, può tracciare un reogramma che simula un maneggio di terzo tipo.

2. *Movimenti di trepidazione.* — Tutti gli insetti con il ganglio sopraesofageo* lesa od avvelenato li presentano, ma in particolar modo le formiche. Toccando leggermente un tarso posteriore di una formica, la zampa si solleva in una posizione forzata, gli articoli tarsali presentano una vera trepidazione, i vari segmenti ondeggiando gli uni sugli altri.

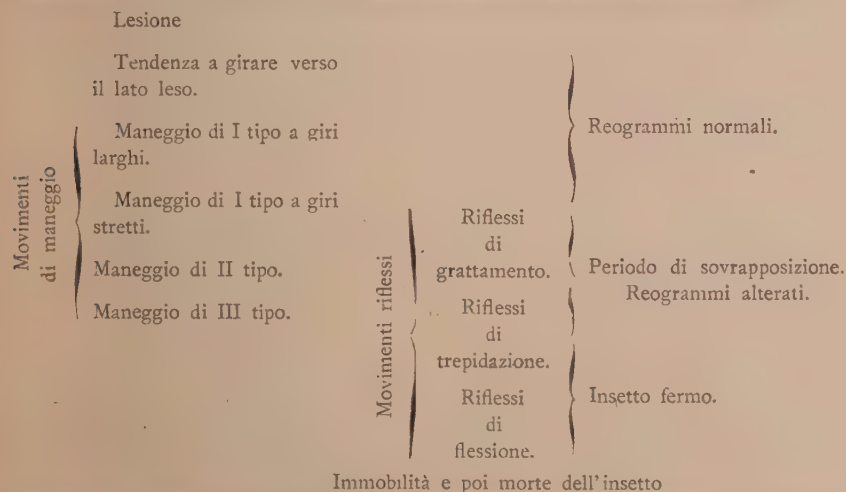
3. *Movimenti di flessione.* — Bisogna distinguere questi movimenti dall'atteggiamento flesso che assume l'antimero illeso negli insetti maneg-

gianti. Nel maneggio abbiamo visto che a questa flessione dei muscoli del lato illeso corrisponde una distensione dei muscoli simmetrici del lato leso. I riflessi flessori compaiono invece in uno stadio di avvelenamento avanzato, quando il maneggio è già scomparso, e si manifestano con una energica flessione degli arti, susseguente ad una forte pressione eseguita sul tarso. Anche l'addome può presentare movimenti riflessi in senso ventrale. I coleotteri, che hanno l'addome superiormente inguainato dalle elitre, presentano talvolta una debole flessione reciproca degli anelli addominali, paragonabile ad un opistotono.

I movimenti di pulizia, quelli di trepidazione e quelli di flessione sono presentati in maggior grado dalle zampe posteriori, meno dalle medie e meno ancora dalle anteriori; quelli di grattamento e di strisciamento sono caratteristici specialmente delle zampe anteriori, meno delle medie; quasi mai si manifestano nelle zampe posteriori.

In genere si può dire che le zampe posteriori presentano una attività motoria riflessa maggiore che le altre due paia. Questo fatto potrebbe spiegarsi con una diversa influenza esercitata dal ganglio sopraesofageo sui successivi gangli della catena.

Dal seguente semplice schema si può comprendere subito l'ordine secondo il quale si producono e si sovrappongono i movimenti riflessi ed il maneggio.



Da quello che ho detto, bisogna estendere il significato da attribuire al ganglio sopraesofageo, e non considerarlo solo come sede dei principali centri sensori; ma si deve concludere anche per una sua complessa azione inibitoria.

Tale azione inibitoria interviene quindi a modificare e inibire i movimenti, determinati in primo luogo dall'impulso partito dal ganglio sottoesofageo che desta a sua volta l'attività motrice diretta dei centri motori dei gangli toracici. In questo senso il ganglio sopraesofageo ha realmente un'azione direttiva e coordinatrice sugli altri gangli della catena.

Un altro risultato interessante è rappresentato dall'unità dei fenomeni che ho messo in evidenza in tutte le specie osservate. Sia nel maneggio che nei riflessi, appaiono delle differenze, sì, ma legate soltanto alla morfologia esterna degli apparati di deambulazione, naturalmente diversa nelle varie specie, ma lo schema fondamentale dei fenomeni nervosi e quindi motori, è lo stesso.

Si possono ottenere da specie assai lontane dello stesso ordine, od appartenenti persino ad ordini diversi, dei reogrammi di maneggio, sia normali che alterati, perfettamente paragonabili fra loro. Ciò significa che erano uguali sia la meccanica del maneggio, sia i riflessi che si sommarono ad esso.

Non è certo il caso di tentare confronti tra i fenomeni nervosi dei vertebrati e quelli degli insetti. E bene notare però che, come nei vertebrati esiste uno schema morfologico generale dell'apparato nervoso (schema che subisce complicazioni nei vertebrati superiori) al quale realmente corrisponde uno schema funzionale; che, pur potendo intrecciarsi in varia misura ed in varia maniera con i fenomeni della sfera psichica nei vertebrati superiori, resta tuttavia identico per tutti; così negli insetti allo schema morfologico del sistema nervoso, identico per tutti, corrisponde realmente uno schema fondamentale tipo dei fenomeni nervosi, schema che, pur intrecciandosi negli insetti più evoluti con fenomeni che possiamo chiamare *analoghi* a quelli della sfera psichica dei vertebrati superiori (*istinti*) resta tuttavia lo stesso.

Fisiologia. *Ricerche istofisiologiche sull'influenza delle variazioni di temperatura in alcuni organi di eterotermi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. BARCHIESI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Studiando l'influenza delle variazioni di temperatura sull'apparato digerente di eterotermi (*Emys oricularis* L.), ho trovato (1924) che durante l'ibernazione si riscontra negli elementi cellulari una riduzione volumetrica maggiore di quella che si osserva nelle cellule di esemplari tenuti a digiuno,

(1) Le presenti ricerche iniziate alcuni anni fa per consiglio del prof. G. Cotronei nell'Istituto di Anatomia e fisiologia comparata della R. Università di Roma, allora diretto dal compianto Sen. prof. B. Grassi, sono state completate nell'Istituto Nazionale Medico Farmacologico diretto dal prof. C. Serono.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1928.

sacrificati durante l'estate, dopo un periodo di inanizione corrispondente a quello di esemplari ibernanti. Così, per non citare che alcuni dati, rispetto ad esemplari normali, uccisi cioè dopo breve tempo dal pasto, ho notato, negli individui sacrificati durante l'estate, dopo quattro mesi di inanizione, per l'esofago una riduzione delle teche mucipare, delle cellule protoplasmatiche e dei nuclei, del 70 %, 24 %, 19 %, mentre negli esemplari uccisi durante l'inverno riscontrai una riduzione più accentuata: del 77 %, del 43 %, del 30 %, rispettivamente. Per l'intestino ebbi nel primo caso, nelle teche, nelle cellule protoplasmatiche e nei nuclei una riduzione del 28 %, 24 %, 22 %, nel secondo caso del 79 %, del 41 %, del 38 %. Per lo stomaco trovai, durante l'inverno, una riduzione dell'87 %, del 29 % e del 72 % nelle teche e nei nuclei degli elementi dell'epitelio superficiale e nelle cellule ghiandolari, durante l'estate rispettivamente una riduzione del 64 %, del 10 %, del 52 %.

Aumentando, durante l'inverno, la temperatura d'ambiente, riscontrai un forte aumento delle grandezze cellulari; gli elementi si allontanano dai valori trovati negli esemplari lasciati a bassa temperatura e si avvicinano ai valori osservati negli individui uccisi durante l'estate dopo breve tempo dal pasto.

Alle osservazioni allora eseguite aggiungo, con la presente Nota, alcuni dati riguardanti la tiroide, il pancreas, il fegato e i testicoli di *Emys* sacrificate durante l'inverno dopo circa due mesi di ibernazione, e di *Emys* che durante l'inverno, mentre erano nelle stesse condizioni delle precedenti, sono state messe in termostato ad una temperatura di 26° - 28° - C tenute sempre nelle vasche con acqua, adoperate per tutti gli esemplari.

Nella tiroide degli individui ibernanti ho trovato vescicole con diametri di 60-200 micron contenenti, contrariamente alle osservazioni di Piser citato dal Pende, che la nega, una colloide molto densa, omogenea, con assai rari vacuoli alla periferia; gli elementi cellulari, per lo più regolarmente appiattiti, presentano una riduzione volumetrica del 56 % rispetto alle cellule degli individui normali, uccisi dopo breve tempo dal pasto, durante l'estate.

La tiroide degli esemplari messi in termostato si differenzia in modo netto da quella dei precedenti; le vescicole presentano diametri variabilissimi, da 60 a 300 micron, e risalta la notevole vacuolizzazione della colloide specie alla periferia, nei pressi degli elementi ghiandolari, dai quali non è sempre facile distinguerla in modo netto. Le cellule, che presentano forma e struttura varia, rispetto agli elementi degli esemplari normali sono ridotte del 20.2 %, ma di essi presentano le stesse caratteristiche, tanto che se non se ne fosse eseguita un'accurata misurazione, credo non facile distinguerle da questi ultimi.

I valori trovati negli elementi cellulari del fegato e del pancreas concordano con quanto ho osservato di sopra; sebbene in minor grado negli

esemplari messi a termostato si hanno valori volumetrici maggiori. Così per il fegato, negli esemplari messi in termostato ho trovato una riduzione del 47 °, per il pancreas del 46.5 °, rispetto ai valori normali; negli individui lasciati a bassa temperatura la riduzione rispettiva è del 66 ° e del 73 °.

Nei testicoli degli esemplari ibernanti ho trovato sospensione assoluta di spermatogenesi, in quelli di animali messi in termostato una ricchezza enorme di mitosi.

In sostanza tutti gli organi osservati si mostrano influenzati dalle variazioni di temperatura e i risultati da me ottenuti concordano con quanto il Levi ha trovato in tessuti coltivati in vitro, con le ricerche di R. e A. Monti, e di altri, e con le osservazioni eseguite da numerosi AA. nei vegetali (Sachs, Matruchot e Molliard, Young, Thomas e Smith, Pantanelli); col freddo si ha una grandezza cellulare minore negli elementi esaminati. Innalzando la temperatura gli elementi riprendono a funzionare attivamente e il comportamento diverso dei tessuti potrebbe spiegarsi con la loro speciale funzione sul metabolismo organico. Così il fatto che il fegato mostra d'essere l'organo che meno raggiunge le condizioni normali, si potrebbe interpretare dovuto alla mobilitazione delle sostanze di riserva ancora possedute, richiamate dagli elementi che hanno ripreso la loro attività.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 dicembre 1928 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sulla rappresentazione di S. Lie degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato.* Nota⁽¹⁾ del Corrispondente GINO FANO.

1. S. Lie ⁽²⁾ ha data una rappresentazione del sistema degli elementi lineari di un piano sullo spazio punteggiato, la quale è algebrica e biunivoca, quindi birazionale, e può essere sfruttata per lo studio ulteriore delle trasformazioni birazionali di contatto del piano⁽³⁾.

Fra le coordinate (ξ, η, p) di un elemento lineare del piano (coordinate cartesiane del punto, e coefficiente angolare della retta costituenti l'elemento) e le coordinate cartesiane x, y, z di un punto dello spazio poniamo le relazioni:

$$(1) \quad x = \xi \quad ; \quad y = \frac{1}{2}p \quad ; \quad z = \eta - \frac{1}{2}p\xi$$

dalle quali si ricava, viceversa:

$$\xi = x \quad ; \quad \eta = z + xy \quad ; \quad p = 2y.$$

Si a così una rappresentazione birazionale della varietà ∞^3 degli elementi

1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1928.

(2) V., p. es., *Geometrie der Berührungstransformationen*, I, p. 238. La rappresentazione risale però a vecchi lavori di Lie, del 1872-74.

(3) Cfr. la mia Nota precedente, questi « Rendiconti ».

del piano sopra lo spazio. E poichè l'equazione differenziale $d\zeta - p d\bar{\zeta} = 0$ che caratterizza le unioni del piano si muta nell'equazione:

$$(2) \quad d(\zeta + xy) - 2y dx = 0 \quad \text{ossia:} \quad d\zeta + x dy - y dx = 0$$

che è l'equazione Pfaffiana di un complesso lineare non speciale, così: alle unioni del piano (linee e punti, come insiemi di elementi) corrispondono nello spazio le linee appartenenti al complesso lineare (2), cioè le cui tangenti sono rette di questo complesso; e viceversa.

In particolare a linee piane algebriche corrispondono linee del complesso lineare (2) anche algebriche, e in corrispondenza birazionale colle prime. Questo prova nel modo più semplice e ovvio che esistono curve appartenenti a un complesso lineare e di genere e moduli affatto qualunque⁽¹⁾.

Di queste curve appartenenti (cioè le cui tangenti appartengono) a un complesso lineare di rette, sono ben note alcune proprietà importanti:

Il piano osculatore a una tal curva in un suo punto qualsiasi è il piano polare del punto stesso rispetto al complesso. La curva è perciò trasformata in se stessa dalla polarità nulla determinata dal complesso lineare, in quanto questa ne scambia i punti coi piani osculatori, e ha le sue tangenti come rette unite.

I piani osculatori alla curva nelle sue intersezioni con un piano passano tutti per uno stesso punto, che appartiene pure a quel piano (ed è il polo del piano stesso).

Ogni ramo della curva ha l'ordine eguale alla classe. Dei tre soliti caratteri (α, β, γ) del ramo⁽²⁾ il primo è eguale al terzo $(\alpha = \gamma)$. In altri termini, ogni singolarità è autoduale.

Se la curva è algebrica, sono pure eguali l'ordine e la classe della curva stessa.

Nella rappresentazione (1), le trasformazioni di contatto birazionali del piano hanno per immagini le trasformazioni cremoniane dello spazio che mutano in sé l'equazione Pfaffiana (2), cioè il sistema degli elementi punto-retta, e quindi anche degli elementi punto-piano di un complesso lineare non speciale. Le chiameremo trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare (2).

Ai sistemi Ω^3 , in particolare ai punti e alle rette del piano considerati anch'essi come unioni, corrispondono nello spazio congruenze del 1° ordine (poichè un elemento generico del piano appartiene a un'unica curva di un dato sistema Ω) comprese di linee razionali del complesso.

(1) C. G. B. « Boll. Unione Matem. Ital. », 5 (1926), p. 122 (ove è pure accennata una mia comunicazione verbale al riguardo); B. Segre, « Mem. R. Accad. Sci. Lincei » (6), II, fasc. XIX, p. 587.

(2) Ordine, numero, classe, secondo HATZSCHKE: con altri autori usano denominazioni in parte diverse.

(3) V. ancora la mia Nota cit., questi « Rendiconti ».

Queste curve razionali appartenenti a un complesso lineare, se di ordine $n > 3$, sono curve particolari di questo stesso ordine. E. Picard⁽¹⁾, e anche altri in seguito hanno dimostrato ch'esse hanno $2(n-3)$ flessi, o singolarità equivalenti^{(2) (3)}; dipendono da $4n-2(n-3)=2n+6$ parametri, e da $2n+1$ parametri quelle appartenenti a un complesso lineare assegnato.

2. Riprendiamo le formole (1), e riscriviamole facendo uso di coordinate omogenee di punto, sia nel piano (ξ, η, ζ) che nello spazio (x, y, z, t) ; e nel piano anche di coordinate omogenee di retta (u, v, w) , onde $p = -\frac{u}{v}$. Avremo:

$$(1') \quad x = \xi v \quad ; \quad y = -\frac{1}{2}\zeta u \quad ; \quad z = \eta v + \frac{1}{2}\xi u \quad ; \quad t = \zeta v.$$

Ai punti del piano $\xi:\eta:\zeta$, come unioni, corrispondono le rette del complesso lineare rappresentate dalle stesse (1') nelle quali si considerino, per ogni singola retta, u, v come parametri omogenei; vale a dire, eliminando tali parametri:

$$\frac{x}{t} = \frac{\xi}{\zeta} = \cos t \quad ; \quad \frac{z}{t} = \frac{\eta}{\zeta} - \frac{y}{t} \cdot \frac{\xi}{\zeta}$$

ossia:

$$(3) \quad \zeta x - \xi t = 0 \quad ; \quad \xi y + \zeta z - \eta t = 0.$$

Queste ∞^2 rette sono tutte contenute in piani del fascio $\zeta x - \xi t = 0$ (con ζ, ξ parametri), e perciò incidenti alla retta $x = t = 0$, asse di questo fascio (che designeremo come retta p_0). Ai punti, come unioni del piano, corrispondono le rette del complesso (2) costituenti la congruenza lineare speciale di direttrice (unica) p_0 ⁽⁴⁾. Le rette di uno stesso fascio della con-

(1) « Annales Ec. Norm. Sup. », 1877; *Traité d'Analyse*, t. I, (2ª ediz., 1901, p. 385).

(2) Se la curva ha una cuspidale, il cui tipo più generale in questo caso è $(2, 1, 2)$, essa assorbe almeno 2 flessi. Ogni tangente k -punta ($k \geq 3$) assorbe $k-2$ flessi; p. es., la totalità dei flessi può essere assorbita da due tangenti $(n-1)$ -punte, e si hanno allora curve di un tipo notissimo, traiettorie di gruppi proiettivi ∞^1 , e contenute in quadriche, sulle quali uno dei due regoli si compone di rette $(n-1)$ -secanti quella curva; fra queste rette sono comprese anche le due tangenti suddette.

(3) Però, per una curva sghemba razionale di ordine $n > 6$ il possedere $2(n-3)$ flessi non è condizione sufficiente perchè la curva appartenga a un complesso lineare. (GHERARDELLI, *Sulle curve sghembe con soli rami autoduali* « Rend. R. Accad. dei Lincei » (5), vol. 33, 1924 I, p. 335).

(4) Che le rette (3), corrispondenti ai punti del piano (ξ, η, ζ) , formino una congruenza lineare speciale, si vede anche direttamente. Quelle che stanno in uno stesso piano del fascio $\zeta x - \xi t = 0$ ne tagliano l'asse $x = t = 0$ (cioè p_0) nel medesimo punto $x = t = \xi y + \zeta z = 0$; e il rapporto $\xi:\zeta$ è coordinata proiettiva tanto nel fascio p_0 , quanto sulla p_0 come punteggiata.

gruenza sono immagini delle unioni costituite da punti $\xi: \zeta = \text{cost.}$, posti cioè sopra una parallela all'asse η ; il centro del fascio, che è un punto generico P di p_0 , è punto fondamentale della rappresentazione, e immagine di tutti gli elementi che appartengono ai punti suddetti ($\xi: \zeta = \text{cost.}$) e hanno $v = 0$, cioè la loro retta parallela all'asse η . A ogni punto di p_0 corrispondono dunque tutti gli elementi di una certa retta parallela all'asse η . Fanno però eccezione, fra i punti del piano (ξ, η, ζ), i punti impropri, pensati anche come unioni; per ognuno di essi è $\zeta = 0$, e per gli elementi che gli appartengono $\frac{u}{v} = -\frac{\eta}{\xi} = \text{cost.}$; quindi $y = t = 0$, $\frac{\tilde{x}}{x} = \text{cost.}$. Agli ∞^1 elementi di uno stesso punto improprio (distinto dal punto all'infinito dall'asse η , pel quale $\xi = 0$, $v = 0$) corrisponde un unico punto della retta $y = t = 0$.

Alle rette del piano $u:v:w$, pensate anche come unioni, corrispondono le rette del complesso lineare rappresentate dalle (1'), nelle quali si considerino come parametri le ξ, η, ζ , omogenee e legate dalla

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0.$$

Le equazioni di queste rette possono ricevere la forma:

$$\frac{y}{t} = -\frac{u}{2v} = \text{cost.} \quad ; \quad ux + v\left(\chi - \frac{1}{2}x \cdot \frac{u}{v}\right) + wt = 0$$

ossia:

$$2vy + ut = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2}ux + v\chi + wt = 0.$$

Sono dunque le ∞^1 rette del complesso contenute nei piani del fascio $2vy + ut = 0$, perciò incidenti alla $y = t = 0$; esse formano una seconda congruenza lineare speciale, la cui direttrice ($y = t = 0$) indicheremo con r_0 , ed è incidente a p_0 . Le rette di uno stesso fascio della congruenza sono immagini di unioni-rette per le quali $\frac{u}{\tilde{x}} = -p = \text{cost.}$, cioè di rette parallele; al

centro del fascio ($y = t = 0$, onde $\zeta = 0$) corrisponde su ciascuna di queste rette parallele l'elemento a punto improprio. Ritroviamo così che agli elementi di uno stesso punto improprio generico corrisponde un punto unico della retta $y = t = 0$; ecc. Indicheremo per brevità con a , A rispettivamente la retta impropria del piano (ξ, η, ζ) e il punto improprio dell'asse η .

Disegneremo ancora come «rette p » e «rette r » le rette del complesso lineare (2), immagini rispettivamente delle unioni-punto e delle unioni-rette, cioè costituenti le due congruenze lineari considerate di direttrici rispettivamente p_0 e r_0 . Alle unioni costituite dai punti di una retta generica corrispondono rette p appoggiate a una stessa r , e formanti perciò un regolo P ; i vari regoli P stanno su quadriche contenenti la r_0 , e tutte

raccordate lungo p_0 . Quando la retta considerata nel piano è parallela all'asse η , il regolo \mathbf{P} si spezza nel fascio $p_0 r_0$ come parte fissa e in un secondo fascio variabile della congruenza delle p . Regoli analoghi \mathbf{R} si hanno scambiando le p colle r .

3. A una curva piana algebrica $\gamma^{n,v}$, di ordine n e classe v , non passante per A nè tangente ad a (e diremo brevemente « in posizione generale rispetto ad A ed a ») corrisponderà una curva sghemba Γ , appartenente al complesso lineare (2). Agli n elementi di γ i cui punti appartengono ad a e ai v elementi le cui rette (tangenti) passano per A corrisponderanno rispettivamente n punti di Γ appartenenti alla retta r_0 e v punti appartenenti a p_0 . Poichè Γ non ha altre intersezioni col piano $p_0 r_0$ (i cui punti non appartenenti a p_0 nè ad r_0 sono immagini dell'unico elemento Aa), essa sarà di ordine $n + v$.

A una curva piana algebrica di ordine n e classe v , in posizione generale, corrisponde una curva sghemba di ordine $n + v$, appartenente al complesso lineare (2), avente le rette r_0 e p_0 come corde, l'una n^{pla} , l'altra v^{pla} . Es.: alle rette ($n = 1$, $v = 0$) corrispondono anche rette, appoggiate a r_0 ; alle ∞^5 coniche, le ∞^5 quartiche di 2^a specie (razionali) appartenenti al complesso e aventi p_0 e r_0 come corde; ecc. Queste curve hanno n intersezioni variabili colle quadriche \mathbf{P} , e v colle \mathbf{R} .

Una curva $\gamma^{n,v}$ passante (semplicemente) per A con tangente generica (cioè distinta da a) si può pensare come posizione limite della precedente, facendo avvicinare indefinitamente due dei v elementi la cui tangente passava per A ; la curva Γ immagine in S_3 sarà perciò tangente a p_0 (in un punto distinto da $p_0 r_0$) e avrà a comune con essa $v - 2$ punti ulteriori. Con r_0 essa avrà a comune solo più $n - 1$ punti; sarà dunque di ordine $n + v - 1$. Il passaggio per continuità dalla precedente Γ^{n+v} alla curva attuale di ordine $n + v - 1$ va concepito nel modo seguente. Uno degli n punti di Γ^{n+v} appartenenti alla retta r_0 tende a portarsi nel punto $p_0 r_0$. In pari tempo la p_0 , corda principale di Γ (cioè corda appartenente al complesso lineare (2)) tende a diventare tangente a Γ stessa. Ora, sopra una curva di ordine m appartenente a un complesso lineare, fra i due estremi di una stessa corda principale intercede una corrispondenza simmetrica d'indice $m - 3$, i cui punti uniti sono caratterizzati dal fatto che il relativo piano osculatore vi ha colla curva incontro almeno 4-punto; e questi punti nel caso presente, non sono altro che i flessi (cioè i punti $[1, 2, 1]$) e loro casi particolari ⁽¹⁾. Una corda principale che diventa, come caso limite,

(1) Se la curva del complesso è razionale, la corrispondenza considerata ha $2(m - 3)$ punti uniti; ed è questo appunto il numero dei flessi. Se la curva è di genere $p > 0$, la corrispondenza ha valenza 3, e perciò $2(m - 3) + 6p$ elementi uniti; ed è questo pure il numero dei flessi.

tangente, acquista dunque di conseguenza un'intersezione ulteriore *in più* colla curva, coincidente col suo punto di contatto. Pertanto al limite, Γ dovrebbe avere a comune con p_0 , in tutto, $\nu + 2$ punti, conservandone altri $n - 1$ variabili nei singoli piani passanti per p_0 stessa; essa viene così a spezzarsi nella retta p_0 e in una $\Gamma^{n+\nu-1}$ residua, ancora tangente (semplicemente) a p_0 e appoggiata ad essa in altri $\nu - 2$ punti.

Considerazioni analoghe valgono, scambiati i caratteri n e ν , se la curva γ è tangente ad a in un punto distinto da A .

Se poi la curva piana $\gamma^{n,\nu}$ contiene (semplicemente) l'elemento Aa , la sua immagine Γ si appoggerà a p_0 solo più in $\nu - 2$ punti e a r_0 in $n - 2$ punti, e avrà ancora un altro punto, immagine dell'elemento Aa , nel piano $p_0 r_0$, fuori delle due rette p_0 e r_0 ; sarà quindi di ordine $n + \nu - 3$. Per esempio: alle ∞^3 coniche tangenti ad a nel punto A corrispondono le ∞^3 del complesso lineare ⁽¹⁾.

Questi risultati si estendono facilmente alle curve piane aventi A ed a come elementi multipli.

4. Viceversa, a una sghemba Γ^m appartenente al complesso lineare (2), non appoggiata a p_0 nè ad r_0 , corrisponde nel piano una curva γ di ordine e classe $2m$, avente l'elemento Aa come m^{plo} (cioè due punti m^{pli} consecutivi in A , nella direzione di a), come immagine degli m punti di Γ contenuti nel piano $p_0 r_0$. (Per questa curva γ è dunque $n = \nu = 2m$, $n + \nu = 4m$; ma gli m elementi sovrapposti in Aa riducono l'ordine della curva immagine Γ di $3m$ unità). Ogni punto eventuale di appoggio di Γ^m a p_0 assorbe due fra le intersezioni di Γ^m colle quadriche \mathbf{P} (alle quali essa è tangente in questo punto), e una sola intersezione colle \mathbf{R} . Perciò, per la curva piana corrispondente γ , diminuisce di 2 unità l'ordine e di un'unità la classe. L'opposto avviene per ogni punto di appoggio con r_0 . Pertanto, a una $\Gamma^{n+\nu}$ appoggiata a p_0 in ν punti e a r_0 in n punti corrisponde (come già detto) una curva piana di ordine $2(n + \nu) - 2\nu - n = n$ e di classe ν . Ogni punto di contatto di Γ con p_0 (o r_0) diminuisce di 3 unità l'ordine di γ e di 2 unità la sua classe (o viceversa); se però p_0 da corda diventa, come limite, tangente a Γ , diviene altresì (come già detto) tangente di flesso, e l'ordine di γ rimane pur sempre diminuito complessivamente di 4 unità.

In altra prossima Nota vedremo come si possano caratterizzare le congruenze di curve razionali del complesso (2) corrispondenti ai sistemi Ω del piano.

(1) LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 240. Ricordando che A ed a sono certi elementi impropri, si vede che le ∞^3 coniche suddette sono le parabole $\eta = a + b\xi + c\xi^2$, considerate appunto da LIE.

Chimica. — *Ferro, cobalto, nichel monovalenti e nitrososolfosali.* — *Risposta a W. Manchot.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. CAMBI.

W. Manchot, rispondendo ⁽²⁾ recentemente alle mie Note apparse in questi « Rendiconti » ⁽³⁾ in cui contradicevo le sue esperienze sui nitrososolfosali del ferro e del nichel, mentre dichiara di non aver avuto prima notizia dei miei lavori più antichi, li discute con apprezzamenti infondati.

W. Manchot dice che l'iponitrito d'argento, da me ottenuto nelle scissioni dei sali di Roussin, potrebbe risultare da una riduzione, per opera del solfosale, del nitrato d'argento che ho impiegato.

Rispondo. L'iponitrito si forma in condizioni in cui non potrebbe verificarsi la riduzione supposta del nitrato. Si ottiene infatti anche con altri sali d'argento. Ho impiegato, oltre al nitrato, il solfato ed i migliori rendimenti li ottenni con il perclorato d'argento. La scissione è favorita dai sali d'argento ad anione più elettroaffine.

Ho sempre affermato ne' miei lavori successivi che la reazione si compie in generale con i sali d'argento, appunto in base alle esperienze eseguite.

La decomposizione ad iponitrito è una delle più salienti reazioni dei nitrososolfuri del ferro, anche se non è favorevole alle idee di W. Manchot. È tanto più caratteristica in quanto avviene in presenza di un grande eccesso di ione Ag., che sarebbe di certo attivo ossidante del ferro ipoferroso, se questo esistesse.

La Nota di W. Manchot merita qualche altra osservazione. Egli si è basato nei suoi primi lavori su gli spettri d'assorbimento dei sali di Roussin. Ora riconosce implicitamente che le misure da lui riferite erano incomplete ed in larga parte illusorie. La revisione esatta da me compiuta con L. Szegő ha dimostrato appunto che le sue deduzioni non avevano fondamento sperimentale alcuno.

Non discuto gli apprezzamenti che egli esprime sulle mie conclusioni. È certo che le determinazioni di Manchot e Linck sono inesatte; che gli spettri non forniscono indizio alcuno sul ferro monovalente; che l'andamento degli indici di estinzione dei nitrososolfuri del ferro è vicino a quello di diversi sali ferrici complessi.

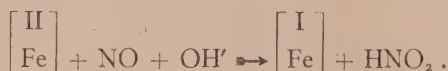
(1) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1928.

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 58, 1928, p. 560.

(3) L. CAMBI e L. SZEGŐ, questi « Rendiconti », IV, 1926, 2°, p. 491; L. CAMBI e A. CLERICI, id., VI, 1927, 2°, p. 119.

Trascurando ora il risultato delle sue stesse misure spettrofotometriche, W. Manchot afferma di essersi basato su una nuova pretesa sintesi degli eptasali dai tetrasali; ma questa in sostanza ci era nota fin dai più antichi lavori sui sali di Roussin e non riguarda affatto la valenza del ferro.

Il nostro autore cita poi i processi di sintesi. Egli li ha interpretati da principio ammettendo la formazione intermedia dell'acido nitroso prodotto dalla riduzione del metallo:



L'assurdità di questa reazione ipotetica è palese: l'acido nitroso nel mezzo in cui si compiono le sintesi è un ossidante dello stesso ferro bivalente; i sali di Roussin si formano in presenza di un eccesso di solfato ferroso dal solfuro ferroso e nitrito alcalino.

Inoltre, l'apparire di acido nitroso o di nitrito nelle sintesi di altri solfosali, partendo da NO, non proverebbe la chimerica riduzione del metallo: occorrerebbe escludere anche la reazione



che costituisce con ogni probabilità il termine intermedio nella ben nota trasformazione del NO, in nitrito e protossido d'azoto, per azione degli alcali in presenza di catalizzatore.

Più recentemente W. Manchot, operando in condizioni speciali, in alcune sintesi di nitrososolfoeteri, partendo da mercapturo e NO, ha osservato la formazione di mercapturi di nitrosile ed ha dato la reazione generale seguente ⁽¹⁾:



Osservo. Ammesso che la sintesi si compia in effetto principalmente secondo tale schema, il che è ancora da dimostrare, è facile riconoscere che la presenza del nitrosomercaptano non avvalora in nulla l'ipotesi dei metalli monovalenti. Con la formazione del nitrosocomplesso può verificarsi il processo semplice seguente



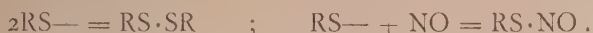
in cui il NO funziona, analogamente ad altre sue reazioni, come da alogeno.

Nelle sintesi predette appare anche il disolfuro, che in generale predomina, e possiamo considerare la formazione intermedia del radicale libero RS—, ad esempio



(1) W. MANCHOT e H. GALL, « Berichte », 60, 1927, p. 2321.

Il radicale potrà partecipare a due reazioni susseguenti:



Tutto ciò non interessa affatto la valenza del metallo.

Infine, questa ultima interpretazione di W. Manchot riposa su una premessa fondamentale errata. I mercapturi di nitrosile non sono prodotti equivalenti, come grado d'ossidazione, all'acido nitroso, come egli li considera, anche se la loro struttura si può ricondurre a quest'acido. Dai lavori di H. Lecher e W. Siefkern⁽¹⁾ sappiamo che questi composti si scindono completamente a caldo in biossido d'azoto e bisolfuro; che si autossidano con grande facilità ad ipoazotide e bisolfuro; che sono cioè prodotti di riduzione dell'acido nitroso ed equivalgono al biossido d'azoto.

W. Manchot nella sua risposta, per avvalorare la sua ipotesi dei metalli monovalenti, invoca analogie fra NO e CO in alcuni sali complessi. Non ho mai escluso che possano sussistere sali con NO funzionante come molecola cosiddetta neutra. Ma la pretesa di un'associazione, con semplici controvalenze, fra atomo metallico, supposto in uno stato di riduzione estremamente sensibile agli ossidanti, e biossido d'azoto, che presenta in molte reazioni spiccati caratteri alogenici, rimane una semplice formola, senza attinenza con il comportamento chimico delle sostanze che considera.

Geologia. — *Il riaffioramento lontano in Valle Stura, a grande altezza, dell'enigmatica sinclinale nummulitica capovolta di Valdieri.* Nota del Corrisp. S. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Divisioni nucleari di categoria in «Cryptochilum echini. Mps.».* Nota del Socio A. RUSSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Seguito alle ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina.* Nota del Socio Straniero L. HERRERA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) «Berichte», 60, 1926, p. 1314.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui tensori costanti associati a varietà binarie e ternarie.* Nota di A. PALATINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una varietà V_n definita dal quadrato del suo elemento lineare

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k,$$

sia dato un tensore \mathbf{T} di ordine m , caratterizzato, p. es., dalle sue componenti covarianti $X_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}$. Chiamerò *tensore derivato* di \mathbf{T} il tensore di ordine $m + 1$ le cui componenti covarianti sono le derivate covarianti di $X_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}$.

Il prof. Cisotti ⁽²⁾ e il dott. Masotti ⁽³⁾ hanno introdotto il concetto di tensore costante, chiamando costante quel tensore il cui derivato è nullo.

Si presenta ora spontaneo il problema di trovare tutti i tensori costanti associati a una varietà V_n qualunque (escluso il caso delle varietà euclidee). La risoluzione generale del problema non sembra agevole. Per $n = 2$ essa è stata ottenuta da A. Cecconi ⁽⁴⁾ fin dal 1914. In un certo senso però il risultato del Cecconi è illusorio, perchè sembra che, per le V_2 vi siano altri tensori costanti oltre ai cosiddetti tensori fondamentali (e alle somme di loro prodotti). Senonchè questi nuovi tensori, com'è facile verificare, sono sempre esprimibili mediante quelli fondamentali, cosicchè questi soltanto sono i tensori costanti per le V_2 .

Per le V_3 si ha invece il risultato seguente. Se la varietà è *a priori* qualunque, i soli tensori costanti sono quelli fondamentali (e le somme di loro prodotti); si hanno altri tensori costanti quando il ds^2 della varietà è riducibile alla forma $ds^2 = d\sigma^2 + dx_3^2$ (con $d\sigma^2$ binario), nel qual caso i detti tensori costanti si formano con legge opportuna mediante quelli fondamentali relativi alla varietà V_2 di elemento lineare $d\sigma$.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) U. CISOTTI, *Sul concetto di tensore costante in varietà euclidee*. [« Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. VII, serie 6^a, 1928, pp. 269-272.

(3) A. MASOTTI, *Sul concetto di tensore costante in una varietà qualunque*. [« Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. VII, serie 6^a, 1928, pp. 457-459].

(4) A. CECCONI, *Sistemi covarianti di ordine qualunque a sistema derivato nullo associati ad una forma differenziale binaria*. [« Atti del R. Istituto Veneto », t. LXXIII, 1914, pp. 639-647].

Le equazioni che, nel caso generale, traducono analiticamente il problema possono essere messe sotto la forma seguente. Si consideri nella varietà V_n un'ennupla ortogonale di congruenze $[1], [2], \dots, [n]$ (ennupla di riferimento) e si caratterizzi il tensore \mathbf{T} , anzichè mediante le sue componenti covarianti, con quelle intrinseche, che denoteremo con $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$. Alla derivazione covariante va allora sostituita la derivazione intrinseca definita dalle posizioni ⁽¹⁾

$$(2) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_m / k} = \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_m}}{\partial s_k} + \sum_1^m \sum_1^n \gamma_{s i_b k} T_{i_1 i_2 \dots i_{b-1} s i_{b+1} \dots i_m},$$

dove s_k sono gli archi delle linee della congruenza $[k]$ e γ_{sik} i noti coefficienti di rotazione di Ricci.

Il problema che si tratta di discutere è quello di caratterizzare i tensori per cui

$$(3) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_m / k} = 0.$$

Accanto a queste equazioni scriviamo subito quelle che esprimono le loro condizioni di integrabilità; esse sono

$$(4) \quad \sum_1^m \sum_1^n \gamma_{s i_b, k j} T_{i_1 \dots i_{b-1} s i_{b+1} \dots i_m} = 0$$

dove le $\gamma_{si, kj}$ sono le note curvature di Ricci.

In questa Nota ci occuperemo solamente dei tensori associati a varietà di secondo e terzo ordine, quindi le sommatorie, rispetto ad s , nelle ultime formule scritte andranno estese da 1 a 2 oppure da 1 a 3. Trattiamo il caso $n = 2$, anche se, come abbiamo detto, esso è stato risoluto dal Cecconi, sia per il metodo che seguiamo, sia per i necessari collegamenti con la ulteriore discussione relativa al caso $n = 3$.

Prima di procedere ricordiamo che, per ogni varietà, il primo tensore fondamentale è di secondo ordine e le sue componenti intrinseche e_{ij} sono l'unità o lo zero secondochè gli indici i e j sono eguali o distinti; il secondo tensore fondamentale è di ordine eguale a quello della varietà e le sue componenti intrinseche $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ sono nulle se gli indici sono tutti o in parte coincidenti, sono $+1$ o -1 se gli indici sono tutti distinti e rappresentano una permutazione di classe pari o, rispettivamente, dispari rispetto alla permutazione fondamentale $1\ 2 \dots n$.

2. Sia $n = 2$. Per le varietà a due dimensioni le γ a quattro indici si riducono a una sola non nulla, cioè $\gamma_{12, 12}$ e questa si identifica con il

(1) Cfr. la mia conferenza *Sulla geometria intrinseca come strumento di calcolo*, di prossima pubblicazione nel vol. II dei « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico » di Milano.

noto invariante di Gauss, che potremo supporre senz'altro diverso da zero. Introducendo il secondo tensore fondamentale e_{ik} , le (4) si presentano sotto la forma

$$(5) \quad \sum_b^m \sum_s^2 e_{ib}s T_{i_1 \dots i_{b-1} s i_{b+1} \dots i_m} = 0$$

e le (3)

$$(6) \quad \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_m}}{\partial s_k} + \gamma_{21k} \sum_b^m \sum_s^2 e_{ib}s T_{i_1 \dots i_{b-1} s i_{b+1} \dots i_m} = 0$$

le quali ultime, per le precedenti, offrono

$$\frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_m}}{\partial s_k} = 0.$$

Ne segue che *le componenti intrinseche di un tensore costante sono costanti*. Non resta che discutere le equazioni (5), che rappresenteremo brevemente così

$$(7) \quad \Delta \mathbf{T} = 0.$$

Con ciò il simbolo Δ ha il carattere di un operatore, il quale rispetto alla somma e al prodotto gode, delle proprietà del simbolo differenziale (come è facile verificare).

In luogo delle equazioni (7) consideriamo il più generale sistema

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta \mathbf{T} = k \mathbf{U}, \\ \Delta \mathbf{U} = -k \mathbf{T}, \end{cases}$$

dove denotiamo con \mathbf{U} un altro tensore dello stesso ordine m di \mathbf{T} e con k lo zero o un numero intero, che può sempre suporsi positivo.

Introduciamo ora due vettori unitari α e β diretti secondo le linee delle due congruenze di riferimento e denotiamo con $\alpha_i (= 1, 0)$ e $\beta_i (= 0, 1)$ le loro componenti intrinseche. Mediante α_i e β_i si possono esprimere le componenti dei due tensori fondamentali nel modo che segue

$$(9) \quad e_{ij} = \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j \quad ; \quad e_{ij} = \alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i.$$

Ciò premesso, è facile constatare che il sistema (8)

a) se $m = 1$ ammette la soluzione $T_i = \alpha_i$ e $U_i = \beta_i$ se $k = 1$, mentre per $k \neq 1$ non ammette alcuna soluzione;

b) se $m = 2$ ammette la soluzione $T_{ij} = a e_{ij} + b e_{ij}$ (a e b costanti qualunque) se $k = 0$; ammette un'altra soluzione se $k = 2$; non ammette alcuna soluzione se k è diverso da zero e da 2;

c) se $m = 3$ ammette soluzioni solo se k è dispari e non supera il numero 3.

Si supponga ora m qualunque e denotando con $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ dei tensori di ordine $m - 1$ si ponga, com'è sempre lecito ⁽¹⁾

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \alpha + \mathbf{B} \beta \quad ; \quad \mathbf{U} = \mathbf{C} \alpha + \mathbf{D} \beta,$$

e successivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{D} &= \mathbf{M} & , & & \mathbf{B} + \mathbf{C} &= \mathbf{P}, \\ \mathbf{A} - \mathbf{D} &= \mathbf{Q} & , & & \mathbf{B} - \mathbf{C} &= \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Si constata facilmente che il sistema (8) è equivalente al seguente

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{N} &= (k - 1) \mathbf{M} & ; & & \Delta \mathbf{Q} &= (k + 1) \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{M} &= -(k - 1) \mathbf{N} & ; & & \Delta \mathbf{P} &= -(k + 1) \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Ne segue che la risoluzione del sistema (8) relativo ai tensori di ordine m e al numero k , si riconduce a quella di due sistemi dello stesso tipo ma relativi ai tensori di ordine $m - 1$ e ai numeri $k - 1$ e $k + 1$. Da questa conclusione scende che, conoscendo le soluzioni del sistema (8) per i primi valori di m , si può facilmente ottenere anche la soluzione generale. Anzi dalle proposizioni *a*), *b*), *c*) sopra enunciate segue che il sistema (8) ammette soluzioni solo se m e k sono pari o dispari assieme (contando per comodità lo zero tra i numeri pari) e k mai superiore ad m .

A noi interessa la soluzione in cui è primitivamente $k = 0$, quindi possiamo affermare, che nelle varietà V_2 non esistono tensori costanti di ordine dispari. La formazione di quelli pari è suggerita dal procedimento generale seguito più sopra, al quale va aggiunta l'importante osservazione che segue: le componenti dei tensori di ordine (pari) successivo si vengono ad esprimere mediante α_i e β_i , le quali però compariscono sempre e soltanto nelle combinazioni (9). Dunque nelle V_2 i tensori costanti sono di ordine pari e sono tutti e soltanto quelli le cui componenti sono somme di prodotti delle componenti di tensori fondamentali.

Si può ulteriormente osservare che il numero delle componenti distinte è $\binom{m}{m:2}$; se *a priori* sembra che il loro numero sia maggiore, il fatto è dovuto alla circostanza che tra i prodotti $\epsilon_{ij}\epsilon_{hk}$, $\epsilon_{ij}\epsilon_{hk}$, $\epsilon_{ij}\epsilon_{hk}$ esistono delle relazioni identiche, facili a stabilire.

3. Veniamo alla discussione del nostro problema per le varietà V_3 a tre dimensioni. Con la convenzione di ritenere equivalenti gli indici che differiscono per multipli di 3, si ponga

$$\gamma_{i+2i+1k} = \delta_{ik}.$$

(1) Con i simboli $\mathbf{A}\alpha$ e simili intendiamo di rappresentare il tensore le cui componenti sono i prodotti delle componenti di \mathbf{A} e α .

Introducendo il secondo tensore fondamentale di componenti e_{ijk} , le (3) si scrivono in questo caso sotto la forma

$$(10) \quad \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_m}}{\partial s_k} + \sum_i^3 \delta_{ik} \sum_h^m \sum_s^3 \ell_{v i_h s} T_{i_1 \dots i_{h-1} s i_{h+1} \dots i_m} = 0.$$

Supponiamo ora che la tripla di riferimento sia quella principale. Denotando con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le curvature riemanniane principali della varietà, le (4) assumono l'aspetto

$$(11) \quad \omega_v \cdot \sum_h^m \sum_s^3 \ell_{v i_h s} T_{i_1 \dots i_{h-1} s i_{h+1} \dots i_m} = 0,$$

oppure

$$(12) \quad \omega_v \Delta_v T \equiv 0,$$

se con Δ_v denotiamo l'operatore che ha ufficio analogo a quello di Δ dell'articolo precedente.

È facile provare che

$$(\Delta_{v+1} \Delta_{v+2} - \Delta_{v+2} \Delta_{v+1}) T = \Delta_v T.$$

Ne segue che se è $\Delta_1 T = \Delta_2 T = 0$ è pure $\Delta_3 T = 0$, cosicchè dalle (12) risulta che (escluso il caso delle varietà euclidee) si devono esaminare questi due casi

$$1^\circ \quad \Delta_v T = 0 \quad (v = 1, 2, 3) \quad \text{e } \omega_v \text{ qualunque}$$

$$2^\circ \quad \Delta_3 T = 0, \omega_1 = \omega_2 = 0 \quad \text{e } \omega_3 \text{ qualunque.}$$

1° Caso. Se sono soddisfatte le condizioni

$$(13) \quad \Delta_v T = 0 \quad (v = 1, 2, 3)$$

le (10) danno

$$\frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_m}}{\partial s_k} = 0,$$

cioè le componenti intrinseche dei tensori costanti sono costanti. Il problema sarà quindi risoluto, quando sia risoluto il sistema di equazioni algebriche (13). Ora ciascuno dei tre sistemi che si ottengono ponendo nella (13) successivamente $v = 1, 2, 3$ è perfettamente analogo al sistema (7) dell'articolo precedente, cosicchè si può affermare che la determinazione dei tensori costanti di ordine m va desunta dalla conoscenza dei tensori costanti di ordine $m - 1$. In modo preciso bisognerebbe prima risolvere il sistema $\Delta_3 T = 0$, indi esprimere che la soluzione ottenuta soddisfa pure alla $\Delta_2 T = 0$ (e quindi anche alla $\Delta_1 T = 0$).

La risoluzione della $\Delta_3 T = 0$ è subito ottenuta. In primo luogo si noti che, per $v = 3$, in virtù delle proprietà del sistema ℓ_{vik} , nella espres-

sione di Δ_3 [formula (10)] la sommatoria rispetto all'indice s va estesa da 1 a 2 e che e_{vik} si identifica nel significato con e_{ik} dell'articolo precedente, cosicchè l'equazione $\Delta_3 \mathbf{T} = 0$ è formalmente identica alla (7), salvo che gli indici delle componenti di \mathbf{T} possono assumere anche il valore 3, oltre che 1 e 2.

Ma il sistema $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ può considerarsi l'insieme di 1 un sistema contenente il solo elemento $T_{33 \dots 3}$; di n sistemi semplici del tipo $T_{33 \dots 3i}$; di $n(n+1):2$ sistemi doppi del tipo $T_{33 \dots 3ik}$; ecc., dove gli indici i, k , ecc. devono assumere solo i valori 1 e 2.

Dai risultati dell'articolo precedente risulta che quei sistemi i quali contengono un numero dispari di elementi diversi da 3 sono tutti nulli e gli altri sono esprimibili mediante i sistemi doppi

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j \quad ; \quad \alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i ,$$

se si conviene di indicare con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ le componenti intrinseche di tre vettori unitari diretti secondo le linee della tripla di riferimento.

Naturalmente a risultati analoghi si perviene discutendo separatamente l'equazione $\Delta_2 \mathbf{T} = 0$, salvo lo scambio del numero 3 in 2 e della lettera β in γ . Esprimendo che la prima soluzione deve coincidere con la seconda si trova che i tensori di ordine pari sono somme di prodotti di tensori di secondo ordine di componenti

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j ,$$

i quali si identificano con il primo tensore fondamentale ϵ_{ij} . I tensori di ordine dispari si esprimono invece mediante il tensore di componenti ϵ_{ij} e quello di componenti

$$\gamma_i (\alpha_j \beta_k - \alpha_k \beta_j) + \gamma_j (\alpha_k \beta_i - \alpha_i \beta_k) + \gamma_k (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) ;$$

che non è altro che il secondo tensore fondamentale e_{ijk} . Dunque *nelle varietà V_3 , indipendentemente dalla loro natura, esistono sempre e soltanto che i tensori fondamentali come tensori costanti e le somme di loro prodotti* ⁽¹⁾.

2° Caso. Esaminiamo ora l'ipotesi che sia verificata la sola equazione

$$(14) \quad \Delta_3 \mathbf{T} = 0 .$$

Naturalmente restano ancora in gioco le equazioni (10), alle quali dovrà soddisfare la soluzione delle (14). Ora noi sappiamo costruire, nel modo

(1) Si osservi che le componenti del secondo tensore fondamentale entrano sempre al primo grado, perchè

$$e_{ijk} e_{uvh} = \begin{vmatrix} \epsilon_{iu} & \epsilon_{iv} & \epsilon_{ih} \\ \epsilon_{ju} & \epsilon_{jv} & \epsilon_{jh} \\ \epsilon_{ku} & \epsilon_{kv} & \epsilon_{kh} \end{vmatrix}$$

sopra specificanti, le soluzioni delle (14), solo non possiamo dire a priori che siano costanti i vari coefficienti che entrano nelle espressioni delle $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$. Ma la sostituzione della soluzione delle (14) nelle (10), mostra che tutte le $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ sono costanti e che se non si vuol ricadere nella soluzione 1^a, deve si avere

$$\bar{\sigma}_{1k} = \bar{\sigma}_{2k} = 0 \quad \text{cioè} \quad \gamma_{3ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Queste condizioni esprimono che il ds^2 della varietà è riducibile alla forma

$$(15) \quad ds^2 = d\sigma^2 + dx_1^2$$

con $d\sigma^2$ binario, quindi i tensori costanti per le varietà V_3 il cui elemento lineare è riducibile alla formula (15) si costruiscono mediante i tensori costanti relativi alla varietà V_2 di elemento lineare $d\sigma^2$ (1).

Osservazione. Se in luogo delle componenti intrinseche dei tensori T si vogliono far intervenire le componenti covarianti basta sostituire alle ε_i i coefficienti a_{ik} del ds^2 (che sono le componenti covarianti del 1° tensore fondamentale) e alle $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m}$ gli elementi $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m}$ che rappresentano lo zero se gli indici sono tutti o in parte coincidenti e $+\sqrt{a}$ o $-\sqrt{a}$ (a discriminante del ds^2) se gli indici sono tutti distinti e costituiscono una permutazione, rispettivamente, di classe pari o di classe dispari.

(1) Il caso dei tensori di primo ordine (vettori) fu da me trattato per una varietà qualunque nella Nota *Sulle varietà V_n che contengono un campo vettoriale costante*, («*Questi Rendiconti*» vol. VII, serie 6^a, 1928, pp. 899-901).

Matematica. — *Notevoli identità relative ai tensori derivati.*
 Nota ⁽¹⁾ di MARIA PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. In una Nota pubblicata di recente presso questi « Rendiconti » dal titolo *Formole di commutazione nella derivazione dei tensori* ⁽²⁾ ho dimostrato l'esistenza di una formola generale di commutazione delle derivate covarianti di ordine superiore, che comprende, come caso particolare, la nota formola per le derivate seconde.

Se $X_{r_1 r_2 \dots r_\mu}^{p_1 p_2 \dots p_\nu}$ ($\mu + \nu = m$; $p_1, p_2, \dots, p_\nu, r_1, r_2, \dots, r_\mu = 1, 2, \dots, n$) sono le componenti miste di un tensore m^{plo} di una varietà ad n dimensioni, la formola dimostrata è la seguente:

$$(I) \quad S_{r_{m+1} \dots r_{m+k}} X_{r_1 \dots r_\mu}^{p_1 \dots p_\nu} / r_{m+1} \dots r_{m+k} = \\ = - S'_{r_{m+1} \dots r_{m+k}} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^{\mu} X_{r_1 \dots r_l}^{p_1 \dots p_\nu} - 1 \ q r_l + 1 \dots r_\mu / r_{m+1} \dots r_{m+k-2} \{ r_l q, r_{m+k-1} r_{m+k} \} - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{\nu} X_{r_1 \dots r_\mu}^{p_1 \dots p_{i-1} q p_i} - 1 \ q p_i + 1 \dots p_\nu / r_{m+1} \dots r_{m+k-2} \{ q p_i, r_{m+k-1} r_{m+k} \} \right) \quad (3)$$

dove $S_{r_{m+1} \dots r_{m+k}}$ indica la sommatoria estesa a tutte le permutazioni degli indici di derivazione $r_{m+1} \dots r_{m+k}$, ogni termine essendo preso col segno $+$ o $-$ secondo che la permutazione che si considera è di classe pari o dispari rispetto alla $r_{m+1} \dots r_{m+k}$ come fondamentale, mentre $S'_{r_{m+1} \dots r_{m+k}}$ indica la sommatoria analoga, estesa però alle sole permutazioni di classe pari e quindi con termini tutti positivi.

Nella presente Nota, mediante l'applicazione di tale formola, dimostro che quando il tensore primitivo è n^{plo} , fra le componenti di un suo derivato (che sia almeno derivato secondo e al più derivato n^{mo}) esistono le seguenti relazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} S_{r_1 r_2 \dots r_n, r_{n+1} \dots r_{n+k}} X_{r_1 r_2 \dots r_n} / r_{n+1} \dots r_{n+k} = 0 \\ S_{r_1 r_2 \dots r_n, r_{n+1} \dots r_{n+k}} X_{r_1 r_2 \dots r_n} / r_{n+1} \dots r_{n+k} = 0 \end{cases}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1928.

(2) Serie 6^a, vol. VIII, fasc. 5-6, pp. 186-190.

(3) È la formola (7') del n. 3. Essa, nel caso $k=2$ diventa la nota formola di commutazione delle derivate seconde. Cfr., ad es., T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma, Stock, 1925), p. 212, form. (20).

dove $r_1 r_2 \dots r_n$ sono tra loro tutti distinti (e rappresentano quindi una qualunque permutazione dei numeri $12 \dots n$), $r_{n+1} \dots r_{n+k}$ sono pure tra loro distinti, senza esserlo dai precedenti, e $\sum_{r_1 \dots r_n, r_{n+1} \dots r_{n+k}}$ indica la sommatoria estesa a tutte le permutazioni dei due gruppi di indici (fatte separatamente per ogni gruppo, e quindi in numero di $n!k!$) ogni termine essendo preso col segno + se le permutazioni che si considerano sono entrambe di classe pari o entrambe di classe dispari rispetto alle $r_1 \dots r_n$; $r_{n+1} \dots r_{n+k}$ come fondamentali, col segno — in caso contrario.

Se il tensore primitivo è simmetrico le (2) sono automaticamente verificate, riducendosi la sommatoria a coppie di termini opposti. Se è emisimmetrico le (2) si semplificano, sostituendosi al simbolo S il simbolo S' col significato sopra indicato.

Aggiungo poi (n. 3) che relazioni del tipo (2) valgono anche per tensori h^{bi} .

2. Per dimostrare la prima delle (2) ricordo la seguente relazione tra i simboli di Riemann di seconda specie:

$$(3) \quad \sum_i^n \{ii, hk\} = 0 \quad (1)$$

e scelgo, per maggior semplicità, la permutazione $12 \dots n$ dei primi indici; posso allora scrivere, in virtù della (1) applicata alle componenti covarianti di un tensore:

$$(4) \quad S_{r_{n+1} \dots r_{n+k}} X_{12 \dots n / r_{n+1} \dots r_{n+k}} = \\ = - S'_{r_{n+1} \dots r_{n+k}} \left(\sum_{1q}^n X_{q2 \dots n / r_{n+1} \dots r_{n+k-2}} \{1q, r_{n+k-1} r_{n+k}\} + \dots \right)$$

(1) Essa è una conseguenza immediata della definizione dei simboli di Riemann di seconda specie in funzione dei simboli di Christoffel, e della relazione:

$$\sum_i^n \left\{ \begin{matrix} ih \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x_h}$$

e si può anche ottenere, mediante l'introduzione dei simboli di Riemann di prima specie, osservando che nella somma doppia che così risulta:

$$\sum_{ij}^n a^{ij} (ij, hk)$$

i termini dove $i=j$ sono nulli e gli altri si distribuiscono in coppie di termini opposti, per essere $a^{ij} = a^{ji}$, $(ij, hk) = -(ji, hk)$.

Essa dice che il tensore doppio che si ottiene da quello di Riemann mediante la contrazione relativa ai primi due indici, è un tensore nullo.

Cfr., ad es., L. P. EISENHART, *Riemannian geometry* (London-Princeton University Press, 1926), p. 22. Oppure J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, Springer, 1924), p. 86. Evidentemente la proprietà ora ricordata per il tensore di Riemann rientra come caso particolare nella seguente: se un tensore è emisimmetrico rispetto a due indici, quello che si ottiene da esso mediante contrazione relativa a tali indici è nullo.

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^n X_{1q} \dots n / r_{n+1} \dots r_{n+k-2} \{ 2q, r_{n+k-1}, r_{n+k} \} + \dots + \\
 & + \sum_{i=1}^n X_{1q} \dots l-1 q l+1 \dots n / r_{n+1} \dots r_{n+k-2} \{ lq, r_{n+k-1}, r_{n+k} \} + \dots + \\
 & + \sum_{i=1}^n X_{12} \dots q / r_{n+1} \dots r_{n+k-1} \{ nq, r_{n+k-1}, r_{n+k} \} \Big) \quad (1).
 \end{aligned}$$

Considero, per ognuna delle n sommatorie che figurano tra parentesi, il termine nel quale q ha il medesimo valore del primo indice del corrispondente simbolo di Riemann. La somma di questi termini è nulla per la (3).

Immagino ora scritte, insieme con la (4), le sommatorie analoghe che si hanno considerando le $\frac{n!}{2}$ permutazioni di classe pari degli indici $12 \dots n$; in ciascuna di esse immagino fatta la riduzione sopra accennata, e poi le sommo membro a membro. Nella sommatoria ottenuta a secondo membro quale sarà il coefficiente di un generico simbolo di Riemann, ad es., di $\{ls, r_{n+k-1}, r_{n+k}\}$? Esso sarà la somma di quelle X per cui tra i primi n indici manca il numero l e figura due volte il numero s . E poichè di gruppi di indici cosiffatti ce ne sono $\frac{n!}{2!}$, ciascuno di essi figurerà una e una sola volta nella somma considerata.

Se immagino ora scritto un secondo gruppo di formole del tipo (4), relative alle $\frac{n!}{2}$ permutazioni di classe dispari degli indici $12 \dots n$ e sommo anche queste membro a membro, dopo aver fatto la riduzione sopra accennata, il coefficiente di $\{ls, r_{n+k-1}, r_{n+k}\}$ non potrà essere diverso dal precedente⁽²⁾.

Sottraendo infine la relazione ottenuta da questo secondo gruppo di formole da quella ottenuta dal primo, avrò zero nel secondo membro e nel primo membro quello della prima delle (2).

In modo analogo si dimostra la seconda delle (2)⁽³⁾.

(1) Sviluppo la sommatoria relativa ad l , e scrivo n volte il simbolo $\sum_{i=1}^n$ per semplificare, nell'espressione, il ragionamento seguente.

(2) Basta pensare che le permutazioni di classe dispari di n indici distinti si ottengono da quelle di classe pari mediante lo scambio, in ognuna di esse, di due qualunque indici, e fissare quelli che nel nostro caso diventano uguali.

(3) Evidentemente le formole (2) valgono anche per varietà non riemanniane per le quali sono valide le (1) e (3). Ora le (1) si possono dedurre dalle note formole di commutazione delle derivate seconde covarianti in virtù della proprietà ciclica dei simboli di Riemann. (Cfr. la mia Nota citata). Esse saranno quindi valide per tutte le varietà per cui le formole di commutazione delle derivate seconde conservano la forma ordinaria, e il tensore di curvatura gode della proprietà ciclica. Tali sono le varietà a connessione

3. Per le componenti miste dei tensori n^{bi} non si hanno relazioni analoghe alle (2). Si arriva però, procedendo in modo analogo al precedente, al seguente risultato:

$$(5) \quad S_{r_1 \dots r_n \cdot r_n + 1 \dots r_{2n}, r_{2n} + 1 \dots r_{2n} + k} X_{r_1 \dots r_n / r_{2n} + 1 \dots r_{2n} + k}^{r_n + 1 \dots r_{2n}} = 0.$$

Esso vale per le derivate di quelle componenti dei tensori $2n^{bi}$ per cui gli indici di covarianza e quelli di contravarianza costituiscono due qualunque permutazioni dei numeri $12 \dots n$, e la sommatoria si intende estesa alle permutazioni dei tre gruppi di indici che vi figurano fatte indipendentemente l'una dall'altra, e i termini vanno presi col segno $+ 0 -$ secondo che fra le tre permutazioni che si considerano quelle di classe dispari sono in numero pari o dispari.

La (5) può essere estesa in generale ai derivati dei tensori hn^{bi} , scegliendo tra le componenti del tensore primitivo quelle nelle quali gli indici di covarianza e di contravarianza si distribuiscono in h gruppi, ciascuno dei quali rappresenta una qualunque permutazione dei numeri $12 \dots n$, potendo in questo caso gli indici dell'ultimo gruppo di quelli di covarianza, o di diversi di questi gruppi, essere anch'essi indici di derivazione.

simmetrica. (Cfr. per es., EISENHART, *Non riemannian geometry*, New York, « American Math. Society », 1927, p. 55, oppure SCHONTEN, loc. cit., p. 88). Fra tali varietà quelle per le quali il tensore di curvatura gode della proprietà corrispondente alle (3) sono caratterizzate dal lasciare invariata (a meno di infinitesimi di ordine ≥ 3) la grandezza del determinante delle componenti di n vettori linearmente indipendenti, per il trasporto parallelo lungo un circuito infinitesimo (cfr. ad es., EISENHART, *Non riemannian geometry*, p. 26, oppure SCHONTEN, loc. cit., p. 90, « inhaltstreue Uebertragung », v. pure pp. 114-115). Si può dunque concludere che per i tensori di tali varietà sono valide le (2).

Matematica. — *Una questione sui veli elastici.* Nota⁽¹⁾ di C. BURALI-FORTI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Sia P il punto generico di una superficie Σ , la normale in P a Σ sia parallela al vettore unitario \mathbf{N} e sia \mathbf{s} un vettore, funzione di P, normale ad \mathbf{N} . Scopo di questa Nota è di dimostrare, in forma geometrica assoluta⁽²⁾ che: *il vettore ROTAZIONALE di \mathbf{s} , rot \mathbf{s} , non è NECESSARIAMENTE parallelo ad \mathbf{N}* ⁽³⁾.

1. Esprimendo il gradiente [cfr. (5)] di $\mathbf{N} \times \mathbf{s} = 0$ si ha:

$$0 = K \frac{d\mathbf{N}}{dP} \mathbf{s} + K \frac{d\mathbf{s}}{dP} \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{N}}{dP} \mathbf{s} + \frac{d\mathbf{s}}{dP} \mathbf{N} - (\text{rot } \mathbf{N}) \wedge \mathbf{s} - (\text{rot } \mathbf{s}) \wedge \mathbf{N}$$

ed operando con $\mathbf{N} \wedge$

$$(1) \quad \mathbf{N} \wedge \left(\frac{d\mathbf{N}}{dP} \mathbf{s} + \frac{d\mathbf{s}}{dP} \mathbf{N} \right) = \text{rot } \mathbf{s} - \mathbf{N} \times \text{rot } \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}$$

poichè $\mathbf{N} \times \mathbf{s} = 0$ e [cfr. (4) e anche (1)] $\mathbf{N} \times \text{rot } \mathbf{N} = 0$.

Essendo \mathbf{N} vettore unitario, la condizione:

$$(2) \quad \mathbf{N} \wedge \text{rot } \mathbf{s} = 0, \quad \text{cioè } \text{rot } \mathbf{s} \text{ è parallelo ad } \mathbf{N},$$

equivale alla condizione $\text{rot } \mathbf{s} = \mathbf{N} \times \text{rot } \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}$ e quindi, dalla (1),

$$(3) \quad \mathbf{N} \wedge \text{rot } \mathbf{s} = 0, \quad \text{solamente quando, } \mathbf{N} \wedge \left(\frac{d\mathbf{N}}{dP} \mathbf{s} + \frac{d\mathbf{s}}{dP} \mathbf{N} \right) = 0.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 novembre 1928.

(2) Dovrò citare i lavori seguenti:

(1) C. BURALI-FORTI, *Fondamenti per la Geometria differenziale* («Rend.», Palermo, t. XXXIII, a. 1912).

(2) P. BURGATTI, *I teoremi del gradiente...* («Acc.», Bologna, a. 1917).

(3) R. MARCOLONGO, *Su alcune proprietà superficiali* («Rend. Lincei», a. 1917).

(4) B. CALDONAZZO, *Sulla Geometria differenziale di superficie...* («Rend. Lincei», vol. XXXIII, a. 1924).

(5) C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, vol. I (cfr. prossima 2ª ediz. N. Zanichelli).

(3) Risultato contrario a questo è stato ottenuto da B. FINZI (*Sui veli elastici*, «Ann. di Mat.», serie IV, t. V, a. 1927-28) valendosi di coordinate e di componenti covarianti, controvarianti, spostamenti degli indici, ecc. A tal proposito giova esaminare quattro Note, in corso di stampa nei «Rend. dei Lincei», di T. BOGGIO, nelle quali sono citati i fondamenti del calcolo differenziale assoluto; indipendente da coordinate, da covarianti, ecc., che provengono dalle coordinate e nulla hanno a che fare con gli elementi geometrici intrinseci.

Se h è numero funzione di P si ha [cfr. (1), (2), (3)], indicando con $\text{Grad } h$ il gradiente in superficie,

$$\text{rot}(h\mathbf{s}) = h \text{rot } \mathbf{s} + (\text{Grad } h) \wedge \mathbf{s};$$

e poichè anche $\mathbf{N} \times \text{Grad } h = 0$ si ha [cfr. (3)]

$$(4) \quad \mathbf{N} \wedge \text{rot}(h\mathbf{s}) = 0, \text{ solamente quando } \mathbf{N} \wedge \text{rot } \mathbf{s} = 0, \text{ ovvero } h = 0.$$

Segue immediatamente da (3) e (4) che:

Tutte e sole le soluzioni della equazione differenziale in \mathbf{s} ,

$$(I) \quad \mathbf{N} \wedge \text{rot } \mathbf{s} = 0$$

sono date dai multipli dei vettori \mathbf{x} , funzioni di P , e tali che

$$(II) \quad \mathbf{N} \wedge \left(\frac{d\mathbf{N}}{dP} \mathbf{x} + \frac{d\mathbf{x}}{dP} \mathbf{N} \right) = 0, \text{ con } \mathbf{x}^2 = 1 \text{ e } \mathbf{x} \times \mathbf{N} = 0.$$

2. Esaminiamo ora se la (I) può, o pur no, essere soddisfatta da qualsiasi vettore \mathbf{s} normale ad \mathbf{N} .

Risulta in modo ovvio dalla (I) che: *se esistono due vettori $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ normali ad \mathbf{N} e non paralleli, soluzioni della (I), allora: qualsiasi vettore \mathbf{s} normale ad \mathbf{N} , è pure soluzione della (I).*

Sia ora \mathbf{x} vettore unitario, normale ad \mathbf{N} , soluzione della (II), o della (I) il che equivale a meno delle soluzioni nulle. Avendo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha, \beta$ il significato stabilito nel cap. V di (1) si ha, con formule valevoli anche nella ipotesi di Caldonazzo [cfr. (4)],

$$\sigma \mathbf{x} + \alpha \mathbf{N} = \mathcal{U}_x \mathbf{x} + \mathcal{E}_x \mathbf{y} + \alpha \mathbf{N},$$

da cui, operando con $\mathbf{N} \wedge$ [cfr. ipotesi e la (II)],

$$(a) \quad \mathbf{N} \wedge (\sigma \mathbf{x} + \alpha \mathbf{N}) = \mathcal{U}_x \mathbf{y} - \mathcal{E}_x \mathbf{x} + \mathbf{N} \wedge \alpha \mathbf{N}.$$

Valendo la (a) per \mathbf{x} , si ha [cfr. (1)]

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{y} + \beta \mathbf{N} &= \mathcal{E}_x \mathbf{x} + \mathcal{U}_y \mathbf{y} + \mathbf{N} \wedge \alpha \mathbf{N} - \mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{N} = \\ &= 2 \mathcal{E}_x \mathbf{x} + (\mathcal{U}_y - \mathcal{U}_x) \mathbf{y} - \mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{N} \end{aligned}$$

e in conseguenza, poichè $\mathbf{N} \times \sigma \mathbf{N} = 0$ e $\mathbf{N} \times \mathbf{x} = 0$,

$$(b) \quad \mathbf{N} \wedge (\sigma \mathbf{y} + \beta \mathbf{N}) = 2 \mathcal{E}_x \mathbf{y} + (\mathcal{U}_x - \mathcal{U}_y) \mathbf{x}.$$

Risulta subito da (b) che: *se \mathbf{x} è soluzione della (II) allora: affinché \mathbf{y} sia pure soluzione della (II) è NECESSARIO e SUFFICIENTE che sia*

$$\mathcal{E}_x = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$$

cioè che P sia un OMBELICO. Si noti peraltro che: P può essere un ombelico senza che x, y siano soluzioni della (II).

Resta così dimostrato in generale che:

NON È VERO che la rotazionale di qualsiasi vettore s normale ad N , è parallela ad N .

3. Le proprietà intrinseche della superficie Σ non variano sia che essa si consideri normale ad una congruenza di linee curve [cfr. (4)] o ad una congruenza di rette [cfr. (1)]. In quest'ultima ipotesi si ha dalla (3)

$$N \wedge \text{rot } x = 0, \text{ solamente quando, } N \wedge \sigma x = 0;$$

ma N è sempre normale a σx , cioè $N \times \sigma x = 0$, e quindi la condizione

$$N \wedge \text{rot } x = 0$$

equivale, successivamente, alle condizioni

$$\sigma x = 0, \quad \frac{dN}{dP} x = 0, \quad \frac{dN}{dP} = 0, \quad dN = 0, \quad N = \text{cost}$$

e quindi: soltanto per la superficie piana la (I) è verificata da qualsiasi vettore s parallelo al piano (1).

(1) Ritengo opportuno dimostrare, sempre sotto forma assoluta, che anche per una superficie sferica (della quale tutti i punti, come per il piano, sono ombelichi) la $\text{rot } s$, con $s \times N = 0$, non è parallelo, necessariamente, ad N .

Fissata la terna unitaria ortogonale positiva, $k, a, ia = k \wedge a$ si esprima il punto P con le coordinate generali-polari r, φ, ψ ,

$$P = O + r \cos \psi \cdot e^{i\varphi} a + r \sin \psi \cdot k$$

e per il punto generico P della sup. $r = \text{cost}$, si ponga

$$N = (P - O) / r = \cos \psi \cdot e^{i\varphi} a + \sin \psi \cdot k.$$

Esprimendo dP in funzione di $dr, d\varphi, d\psi$ si ha subito

$$dP \times N = dr, \quad dP \times e^{i\varphi} ia = r \cos \psi \cdot d\varphi, \quad dP \times \partial N / \partial \psi = r d\psi,$$

dalle quali, ricordando la definizione di grad,

$$\text{grad } r = N, \quad \text{grad } \varphi = \frac{e^{i\varphi} ia}{r \cos \psi}, \quad \text{grad } \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \psi}.$$

Limitiamoci ad un esempio, ponendo

$$s = e^{i\varphi} ia \quad (\text{si ha, ovviamente } s \times N = 0).$$

Differenziando si ha

$$ds = -d\varphi \cdot e^{i\varphi} a = -\text{grad } \varphi \times dP \cdot e^{i\varphi} a = -H \left(\frac{e^{i\varphi} ia}{r \cos \psi}, e^{i\varphi} a \right) dP$$

Geometria. — *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces.* Nota ⁽¹⁾ di E. ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

7. Considerons une congruence W dont les deux nappes focales soient des surfaces non réglées. La congruence W réalisant une correspondance asymptotique entre les deux nappes focales, on peut appliquer les résultats précédents et partager les congruences W en trois espèces moyennant les invariants r , s . Commençons par une congruence appartenant à un complexe linéaire; dans ce cas, les deux nappes focales sont corrélatives, ainsi que $r = s = -1$ et la congruence est de troisième espèce. Ce cas dépend évidemment d'une fonction arbitraire de deux arguments. On peut choisir S_1 arbitrairement et on a alors ∞^5 congruences de cette sorte.

8. Réciproquement, si une congruence W satisfait à une des deux relations $r = -1$, $s = -1$, elle satisfait aussi à l'autre et la congruence appartient à un complexe linéaire.

9. Choisissons maintenant une relation $f(r, s) = 0$ entre les invariants r et s , cette relation étant distincte de $r = -1$ et de $s = -1$, mais d'ailleurs arbitraire. Alors les congruences W de seconde espèce appartenant à la relation donnée existent toujours et dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument. Les nappes focales S_1 , S_2 ne peuvent donc être choisies arbitrairement.

10. Considerons en particulier le cas $r = s$. C'est le cas des congruences de M. Fubini sur les nappes focales desquelles les lignes de Darboux se correspondent ⁽²⁾. Les surfaces focales sont les surfaces *isothermoasymptotiques*.

e in conseguenza

$$\frac{d\mathbf{s}}{dP} = -H \left(\frac{e^{i\varphi} i\mathbf{a}}{r \cos \phi}, e^{i\varphi} \mathbf{a} \right),$$

$$\text{rot } \mathbf{s} = 2V \frac{d\mathbf{s}}{dP} = \frac{1}{r \cos \phi} \mathbf{k};$$

così $\text{rot } \mathbf{s}$ risulta parallelo a \mathbf{k} e non è parallelo ad \mathbf{N} .

Giova osservare, a conferma di cose note [cfr. (1), (2), (3)] che differenziando la relazione $\mathbf{N} = (P - O)/r$ si ha

$$d\mathbf{N} = \frac{1}{r} dP - \frac{dr}{r^2} (P - O) = \frac{1}{r} \{ dP - \text{grad } r \times dP \cdot \mathbf{N} \} = \frac{1}{r} \{ 1 - H(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \} dP$$

da cui si ricava,

$$\sigma = \frac{d\mathbf{N}}{dP} = \frac{1}{r} \{ 1 - H(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.

(2) FUBINI-ČECH, op. cit., § 51.

Une surface focale S_1 de cette catégorie étant donnée, il existe ∞^6 congruences du type considéré.

11. Considérons encore le cas $r = 1$ (le cas $s = 1$ n'en diffère que par la notation). Ici encore, on arrive à des résultats connus. Les nappes focales S_1 et S_2 sont alors des surfaces R_0 . Or ces surfaces sont un cas limite des surfaces R de MM. Demoulin et Tritzéica. M. Jonas a montré⁽¹⁾ que, une surface R étant donnée, il existe ∞^5 congruences W à nappes focales R , dont la première coïncide avec la surface donnée. Or j'ai déjà remarqué⁽²⁾ que le résultat de M. Jonas reste valable aussi pour les surfaces R_0 . On arrive ainsi précisément aux congruences W avec $r = 1$.

12. Il serait important de déterminer tous les cas où une surface S_1 peut être une nappe focale de *plusieurs* congruences W appartenant à une relation donnée $f(r, s) = 0$. Tout ce que j'en sais, c'est que, en dehors des cas déjà mentionnés, telles congruences W ne peuvent dépendre que de *quatre* constantes arbitraires au plus.

13. Passons aux congruences W de troisième espèce. J'ai déjà traité le cas $r = s = -1$. Passons au cas $r = s = 1$, c'est-à-dire aux *congruences qui réalisent une déformation projective entre les nappes focales*. Il existe ∞^4 congruences de cette sorte. L'élément linéaire projectif des nappes focales a la forme

$$\sqrt{\frac{av^2 + 2b_2v + c_2}{au^2 + 2b_1u + c_1}} \frac{du^2}{dv} + \sqrt{\frac{au^2 + 2b_1u + c_1}{av^2 + 2b_2v + c_2}} \frac{dv^2}{du}.$$

Il y a un cas particulier remarquable où la déformation projective se réduit à une homographie; ces congruences ont été déjà déterminées par M. Fubini⁽³⁾.

Ensuite, considérons le cas $r = s = c$, avec $c \neq 0, 1, -1$. Ici encore, on a (pour chaque valeur de c) ∞^4 congruences, l'élément linéaire projectif des surfaces focales ayant la forme

$$\frac{1}{2(c-1)} \frac{1}{u-v} \left[-\sqrt{\frac{f_2}{f_1}} \frac{du^2}{dv} + \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} \frac{dv^2}{du} \right],$$

où

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0 u^4 + a_1 u^3 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4, \\ f_2 &= a_0 v^4 + a_1 v^3 + a_2 v^2 + a_3 v + a_4. \end{aligned}$$

Toutes les congruences considérées dans ce paragraphe sont des congruences R et les nappes focales sont projectivement déformables en ∞^3 manières.

(1) « Jahresbericht d. deutschen Math. Ver. », t. 29, 1920.

(2) FUBINI-ČECH, op. cit., § 52.

(3) FUBINI-ČECH, op. cit., § 27.

Le cas $r \neq s$, $rs \neq 0$ n'est pas possible pour une congruence W de troisième espèce.

14. Considérons encore les congruences W à une nappe (et une seule) réglée ⁽¹⁾. Pour fixer les idées, supposons que les lignes $v = \text{const.}$ de S_2 soient des droites. Alors on a $r = 0$, $s \neq 0$. J'ai déterminé tous les cas où s se réduit à une *constante*. Trois cas seulement sont possibles:

$$1^\circ \quad s = 1 \quad , \quad 2^\circ \quad s = 2 \quad , \quad 3^\circ \quad s = 3.$$

L'élément linéaire projectif de la nappe non réglée S_1 a la forme:

$$1^\circ \quad \frac{\psi}{\sqrt{au^2 + bu + c}} (u - v)^{-2} \frac{du^2}{dv} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{au^2 + bu + c}}{\psi} \frac{dv^2}{du};$$

$$2^\circ \quad \frac{\psi}{2\sqrt{u}} (u - v)^{-3} \frac{du^2}{dv} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{u}}{\psi} (u - v) \frac{dv^2}{du};$$

$$3^\circ \quad \frac{\psi}{(u - v)^4} \frac{du^2}{dv} - \frac{(u - v)^2}{\psi} \frac{dv^2}{du}.$$

ψ désigne ici une fonction arbitraire de v . Dans le premier cas, les surfaces S_1 sont caractérisées comme les surfaces R_0 ayant un système d'asymptotiques toutes contenues dans des complexes linéaires.

15. Considérons enfin une congruence W telle que les asymptotiques $v = \text{const.}$ soient des droites sur S_1 et sur S_2 , les asymptotiques $u = \text{const.}$ n'étant pas rétilignes ni sur S_1 ni sur S_2 . L'invariant r est alors privé de sens, et il ne reste que l'invariant s . Maintenant, s peut avoir une valeur constante quelconque, les congruences W respectives dépendant toujours d'une fonction arbitraire d'un argument ⁽²⁾. Le cas le plus remarquable est $s = 1$, où la congruence réalise une déformation projective entre les deux nappes réglées. Ces nappes appartiennent chacune à une congruence linéaire. Il se peut que la déformation projective se réduit à une homographie. Les nappes focales admettent alors un groupe continu à deux paramètres d'homographies.

(1) Pour ces congruences, v. FUBINI-ČECH, op. cit., § 49.

(2) Il y a exception si $s = -1$; c'est le cas d'une congruence à nappes focales réglées appartenant à un complexe linéaire.

Meccanica. — *Sopra le equazioni del problema dei due corpi di masse variabili.* Nota di G. VRANCEANU, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota inserita nello stesso fascicolo, il prof. Levi-Civita considera il problema del moto di un corpo la cui massa varia per la caduta sopra esso di meteoriti (caso astronomico) ed arriva alla conclusione che si deve prendere come legge fondamentale la

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

ossia: derivata della quantità di moto uguale a forza, anzichè massa per accelerazione uguale a forza⁽²⁾, le due leggi non essendo più equivalenti se la massa non è costante.

Lo scopo di questa Nota, la quale mi è stata gentilmente suggerita dal prof. Levi-Civita, è di far vedere come si presentano in questo caso le equazioni del problema dei due corpi a masse variabili, il cui interesse astronomico appare manifesto.

Perciò siano P_1 e P_2 i due corpi di masse variabili m_1, m_2 , che si attraggono secondo la legge di Newton, e siano altresì x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 le coordinate di P_1, P_2 rispetto ad un sistema di assi fissi e r la loro distanza. Con ciò, le equazioni del moto assumono, in base alla (1), la forma

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(m_1 x'_1) = f \frac{m_1 m_2}{r^3} (x_2 - x_1), \\ \frac{d}{dt}(m_2 x'_2) = -f \frac{m_1 m_2}{r^3} (x_2 - x_1), \end{cases}$$

scrivendo per semplicità solo le equazioni relative ad x_1 ed x_2 : con f si intende al solito la costante di gravitazione.

È interessante osservare fin da principio, che, indicando con T ed U la forza viva del sistema ed il potenziale newtoniano, aventi le espressioni

$$(3) \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2), \\ U = f \frac{m_1 m_2}{r}, \end{cases}$$

(1) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(2) Cfr. in speciale. G. ARPELLINI, *Il problema dei due corpi di masse comunque variabili*, « Memorie della Soc. dei XL », t. XIX, 1915, pp. 73-96.

le equazioni (2) assumono senz'altro la forma lagrangiana solita

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x'_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \right)$$

il che non sarebbe il caso, partendo dall'altra legge fondamentale.

Siccome le equazioni (2) ammettono i tre integrali primi

$$(4') \quad m_1 x'_1 + m_2 x'_2 = a, \dots$$

a, b, c , essendo delle costanti qualunque, vogliamo sfruttare l'esistenza di questi integrali primi per ridurre l'ordine (dodicesimo) del sistema (2). Per questo osserviamo che il sistema lagrangiano (4) si può trasformare in un sistema canonico, prendendo come coordinate coniugate alla x_1, \dots, x_2, \dots , i momenti $p_{x_1} = m_1 x'_1, \dots, p_{x_2} = m_2 x'_2, \dots$ e la funzione hamiltoniana si scrive in queste variabili

$$(5) \quad H = \frac{1}{2m_1} \sum p_{x_1}^2 + \frac{1}{2m_2} \sum p_{x_2}^2 - U.$$

Facciamo adesso la cosiddetta trasformazione di Poincaré⁽¹⁾, la quale consiste nel prendere come una serie di variabili le coordinate relative dei due punti $x = x_2 - x_1, \dots$, e come variabili coniugate le quantità di moto assolute di P_2 , che indicheremo per simmetria con p_x, \dots , invece di p_{x_2}, \dots . Come altra serie di variabili si prendono le coordinate assolute di P_1 e come loro coniugate le somme delle quantità di moto dei due corpi

$$\alpha = p_{x_1} + p_{x_2} \quad , \quad \beta = p_{y_1} + p_{y_2} \quad , \quad \gamma = \dots$$

In queste nuove variabili (che, come è ben noto, risultano ancora) canoniche la funzione hamiltoniana si scrive

$$(6) \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \sum p_x^2 - \frac{1}{m_1} \sum \alpha p_x + \frac{1}{2m_1} \sum \alpha^2 - U$$

e dato il fatto che le x_1, y_1, z_1 , non compariscono esplicitamente nella espressione (6) di H , ne risulta senz'altro che le α, β, γ , sono costanti in accordo cogli integrali primi (4'), e quindi, uguali rispettivamente alle a, b, c . Perciò il nostro sistema si riduce al sistema del sesto ordine

$$(7) \quad \begin{cases} x' = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_x - \frac{1}{m_1} a \quad , \quad p'_x = \frac{dU}{dx} , \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(1) Cfr., p. es., LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II (seconda parte), pp. 386-389.

Eliminando le incognite p_x, p_y, p_z , si trovano le seguenti tre equazioni del secondo ordine, per determinare il moto relativo di P_2 rispetto a P_1 ,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} x' \right) + a \frac{d}{dt} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{dU}{dx}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} y' \right) + b \frac{d}{dt} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{dU}{dy}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} z' \right) + c \frac{d}{dt} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{dU}{dz}. \end{cases}$$

Per eseguire una ulteriore riduzione di questo sistema del sesto ordine, supponiamo che si orientino gli assi fissi, in modo che il vettore costante (a, b, c) , sia diretto secondo l'asse z , con che si deve porre nelle (8) a e b uguali a zero. Dopo ciò, si riconosce immediatamente che nel piano xy vale l'integrale delle aree

$$(8') \quad x' y - y' x = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} K \quad (K \text{ costante}).$$

Introducendo in questo piano le coordinate polari ρ e θ si trova facilmente, che l'integrazione del sistema (8) si riduce all'integrazione del seguente sistema del quarto ordine:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rho' \right) - \frac{K^2}{\rho^3} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{dU}{d\rho}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} z' \right) + c \frac{d}{dt} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{dU}{dz}, \end{cases}$$

che serve a determinare ρ e z in termini del tempo, e, successivamente, l'integrale delle aree (8') permette di determinare l'angolo θ con una semplice quadratura. Per conseguenza l'integrazione del moto relativo di due corpi a masse variabili, quando si assume come valida la legge (1), si riduce sempre ad una operazione del quarto ordine, e sembra poco probabile che in generale si riduca ad una operazione minore. Di più il moto relativo, non avviene in generale in un piano, come avviene nel caso in cui si parte dalla seconda legge fondamentale.

CASI PARTICOLARI. — Se il vettore costante (a, b, c) , è zero, il moto è piano e si riduce ad un sistema differenziale del secondo ordine.

Il moto è ancora piano, se la velocità iniziale di P_2 si trova in uno stesso piano con il vettore costante (a, b, c) .

Supponiamo adesso che, pur essendo le masse variabili, varino molto lentamente, sicchè possiamo considerare le derivate m'_1, m'_2 , come quantità del primo ordine e perciò i termini contenenti a fattore queste derivate come delle perturbazioni. Le equazioni (8) del moto relativo ci dicono pre-

cisamente che esistono due forze perturbatrici delle quali una è proporzionale alla velocità e l'altra ha intensità variabile, ma direzione fissa (a, b, c) , ed è precisamente quest'ultima, che fa che il moto non avvenga nello stesso piano. Ma questo scostamento è evidentemente infinitesimo, e si può in questo ordine di approssimazione, integrare le equazioni (8) nel piano iniziale. Infatti supponiamo che nel momento iniziale sia $\chi' = \chi = 0$, allora possiamo considerare χ come una quantità del primo ordine per qualsiasi t . Siccome nel potenziale U , la coordinata χ entra al quadrato si può addirittura trascurare, e le due prime equazioni (8) bastano da sole per determinare le x, y , ossia la proiezione del moto sul piano iniziale. Tenendo presente l'integrale delle aree (8'), la quale per (a, b, c) qualunque, si scrive

$$(10) \quad a(\chi'y - y'\chi) + b(x'\chi - \chi'x) + c(y'x - xy') = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} K,$$

ne risulta che se il vettore (a, b, c) non è normale al piano iniziale (una almeno delle quantità a, b diversa da zero), il problema di determinare x al y è effettivamente una operazione del quarto ordine, l'ulteriore determinazione di χ dipendendo, in base alla (30), da una semplice quadratura. Se (a, b, c) è normale al piano iniziale, la determinazione del moto si riduce alla integrazione delle equazioni (9), dove nei secondi membri si trascurano i termini in χ^2 , e perciò alla integrazione di due equazioni separate del secondo ordine.

Meccanica. — *Sopra una nuova interpretazione del principio della minima costrizione del Gauss.* Nota di E. GUGINO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia S un qualsivoglia sistema materiale di N punti P_i ($i = 1, 2 \dots N$) di masse m_i , a vincoli bilaterali e privi di attrito, comunque sollecitato.

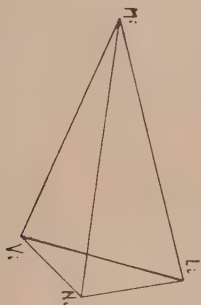
Sia M_i la posizione del generico punto P_i in un istante t ; L_i la posizione che il punto occuperebbe, dopo un intervallo di tempo τ abbastanza piccolo, in virtù delle forze che lo sollecitano e della velocità all'istante t , nell'ipotesi che i legami, in tale istante, fossero bruscamente soppressi; N_i la posizione del punto allo istante $t + \tau$, nel moto reale vincolato, che diremo anche naturale. La costrizione esercitata dai vincoli sul punto P_i , si rende manifesta, come è noto, nella circostanza che L_i non coincide con N_i ; d'altra parte il punto P_i è dotato di massa m_i . Poichè a parità di altre condizioni, per modificare il moto del punto supposto libero, la costrizione

(1) Nella seduta dell' 11 novembre 1928.

zione proveniente dai vincoli è tanto maggiore quanto più grande è la massa m_i , si comprende come sia opportuno assumere quale misura della costrizione, durante l'intervallo di tempo abbastanza piccolo τ , il prodotto $m_i \overline{L_i N_i}^2$ della massa m_i per il quadrato del divario $L_i N_i$ tra il moto libero ed il moto vincolato, nello stesso intervallo di tempo. Per il sistema S, si assume come misura della costrizione proveniente dai vincoli, nell'intervallo di tempo τ , lo scalare:

$$(1) \quad G = \sum_i^N m_i \overline{L_i N_i}^2 \quad (i = 1, 2 \dots N)$$

che diviene, al più, un infinitesimo del secondo ordine, tosto che τ tenda a zero ⁽¹⁾. Ora Gauss stabilisce ⁽²⁾ che le posizioni N_i che i punti P_i prendono



in virtù del moto naturale, all'istante $t + \tau$, sono caratterizzate, fra tutte le posizioni compatibili coi legami, come quelle per le quali la (1) assume il valore minimo; in altri termini, il movimento naturale del sistema, secondo Gauss, avviene nel più perfetto accordo possibile col movimento di cui lo stesso sistema sarebbe animato, se fosse libero. Ciò posto, facciamo ora l'ipotesi, che i legami siano indipendenti dal tempo, e definiamo, per un

(1) Le applicazioni del metodo infinitesimale s'impongono quasi sempre in modo da potere trascurare gl'infinitesimi d'ordine superiore al primo; talvolta, però, per la natura stessa della questione, è necessario valutare anche gl'infinitesimi di ordine superiore, divenendo essenziale il loro comportamento. Così se α_i e β_i sono entrambi infinitesimi del primo ordine, le espressioni del tipo:

$$\sum_i^N \alpha_i \beta_i \quad (i = 1, 2 \dots N)$$

sono trascurabili se si tiene conto soltanto degli infinitesimi del primo ordine, mentre possono talora costituire gli infinitesimi di ordine minimo che intervengono in certe contingenze ed allora costituiscono altresì gli elementi preponderanti e caratteristici di cui bisogna tenere debito conto per le opportune deduzioni. Un esempio cospicuo è offerto dalla espressione G della costrizione secondo Gauss.

(2) « Journal de Crelle », to. IV, 1829. Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II (seconda parte), pp. 482-488.

tale sistema, una nuova quantità scalare E_N essenzialmente positiva, per mezzo della relazione:

$$(2) \quad E_N = \sum_i^N m_i \overline{M_i N_i^2} \quad (i = 1, 2 \dots N)$$

ove m_i è la massa del generico punto P_i , ed $M_i N_i$ denota lo spostamento, durante l'intervallo di tempo τ del punto P_i , nel moto naturale del sistema; il valore di E_N è nullo, per τ abbastanza piccolo, soltanto quando il sistema allo istante t è in riposo e le forze attive sono atte a mantenere l'equilibrio; più generalmente il valore di E_N risulta tanto maggiore quanto più grande è il modulo v_i della velocità di ciascun punto e quanto più le forze attive si allontanano dalle condizioni di equilibrio. Si può quindi dire che lo scalare E_N , per il dato sistema materiale, è in un certo senso la misura, durante l'intervallo di tempo τ , successivo all'istante t , di un « effetto cineto-dinamico » relativo al moto naturale del sistema. Supponiamo d'altra parte che, rimanendo immutate le forze attive, il nostro sistema materiale, a partire dallo stesso atto di moto (configurazione e distribuzione delle velocità v_i) relativo allo istante t , subisca, nell'intervallo di tempo τ , un generico movimento virtuale, realizzato, ad esempio, mercè l'aggiunta di vincoli opportunamente scelti; sia V_i la posizione del punto P_i all'istante $t + \tau$ in virtù di tale movimento. Il corrispondente effetto cineto-dinamico (virtuale), che si genera (dipendente dall'atto di moto all'istante t , dalle componenti conservate delle forze attive e dal particolare movimento virtuale che si considera) è allora espresso dalla relazione:

$$(2') \quad E = \sum_i^N m_i \overline{M_i V_i^2} \quad (i = 1, 2 \dots N).$$

Ci proponiamo di dimostrare che per τ abbastanza piccolo, E_N è sempre maggiore di E ; in altri termini ha luogo il seguente teorema:

Per ogni sistema materiale, a vincoli bilaterali, privi di attrito ed indipendenti dal tempo, comunque sollecitato, il moto naturale in un intervallo τ di tempo abbastanza piccolo, a partire da un generico istante t , è caratterizzato fra tutti i movimenti compatibili coi legami (nello stesso intervallo di tempo) come quello per il quale l'effetto cineto-dinamico virtuale E risulta massimo.

Infatti, secondo le precedenti notazioni, col noto significato di v_i , m_i , P_i , M_i , L_i , N_i , V_i , per τ abbastanza piccolo, applicando la formola di Taylor ed arrestando lo sviluppo ai termini di secondo grado, si può scrivere:

$$3) \quad \begin{cases} N_i - M_i = v_i \tau + \frac{1}{2} a_i \tau^2 \\ L_i - M_i = v_i \tau + \frac{1}{2} a_i \tau^2 \end{cases}$$

essendo \mathbf{a}_i ed \mathbf{a} rispettivamente le accelerazioni del punto P_i all'istante t , nel moto naturale e nel moto libero. Se con \mathbf{F}_i si indica la risultante delle forze attive sul punto P_i e con \mathbf{R}_i la risultante delle forze vincolari (proveniente dai legami preesistenti) per le equazioni generali della dinamica si ha:

$$(4) \quad \begin{cases} m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \\ m_i \mathbf{a} = \mathbf{F}_i. \end{cases}$$

Per sottrazione dalle (3), tenendo conto delle (4) si deduce:

$$(5) \quad N_i - L_i = \frac{\tau^2}{2 m_i} \cdot \mathbf{R}_i.$$

Analogamente, se con \mathbf{R}_i^* si indica la risultante delle forze vincolari proveniente da tutti i vincoli preesistenti ed addizionali, con uguale procedimento si ottiene:

$$(5') \quad V_i - L_i = \frac{\tau^2}{2 m_i} \mathbf{R}_i^*.$$

Per il principio dei lavori virtuali ⁽¹⁾, essendo i legami del nostro sistema bilaterali ed indipendenti dal tempo, avranno luogo le relazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} \sum_i^N \mathbf{R}_i \times (N_i - M_i) = 0 \\ \sum_i^N \mathbf{R}_i^* \times (V_i - M_i) = 0 \end{cases}$$

che per le (5) e (5') possono scriversi:

$$(6') \quad \begin{cases} \sum_i^N m_i (N_i - L_i) \times (N_i - M_i) = 0 \\ \sum_i^N m_i (V_i - L_i) \times (V_i - M_i) = 0. \end{cases}$$

D'altra parte dai triangoli $L_i N_i M_i$ ed $L_i V_i M_i$, per il teorema di Carnot relativo al lato $L_i M_i$, si deduce:

$$\begin{aligned} \overline{L_i N_i^2} + \overline{M_i N_i^2} - 2(N_i - L_i) \times (N_i - M_i) = \\ = \overline{L_i V_i^2} + \overline{M_i V_i^2} - 2(V_i - L_i) \times (V_i - M_i). \end{aligned}$$

1) Vedere in particolare le già citate *Lezioni*, di LEVI-CIVITA e AMALDI, vol. I, 1923, p. 644.

Moltiplicando entrambi i membri per m_i , sommando rispetto all'indice i , tenendo conto delle (6') e delle definizioni (2) e (2') di E_N e di E , si ottiene:

$$\sum_i^N m_i \overline{L_i N_i^2} + E_N = \sum_i^N m_i \overline{L_i V_i^2} + E$$

e ciò qualunque sia il movimento virtuale $V_i - M_i$, il quale, giova ripeterlo, è un ipotetico movimento di S , che si realizza nell'intervallo di tempo τ , rimanendo immutata la sollecitazione, a partire dallo stesso atto di moto relativo all'istante t , aggiungendo però nuovi legami.

Ma per il principio di Gauss è sempre:

$$G = \sum_i^N m_i \overline{L_i N_i^2} < \sum_i^N m_i \overline{L_i V_i^2}$$

quindi risulta, qualunque sia l'istante t :

$$(I) \quad E_N > E.$$

Il teorema è così dimostrato.

Offre particolare interesse, il supporre che tutti i punti P_i del sistema, allo istante t , partano dalla configurazione C , con velocità nulla: in tale ipotesi, la prima delle (3) diviene:

$$N_i - M_i = \frac{1}{2} a_i \tau^2$$

e quindi, tenendo conto della prima delle (4), si deduce:

$$(7) \quad m_i(N_i - M_i) = \frac{\tau^2}{2} (F_i + R_i).$$

Analogamente considerando invece lo spostamento virtuale $V_i - M_i$, si deduce con uguale procedimento:

$$(7') \quad m_i(V_i - M_i) = \frac{\tau^2}{2} (F_i + R_i^*).$$

D'altra parte si può scrivere:

$$E_N = \sum_i^N m_i \overline{M_i N_i^2} = \sum_i^N m_i (N_i - M_i) \times (N_i - M_i)$$

$$E = \sum_i^N m_i \overline{M_i V_i^2} = \sum_i^N m_i (V_i - M_i) \times (V_i - M_i).$$

Ponendo:

$$N_i - M_i = \Delta P_i, \quad V_i - M_i = \Delta^* P_i.$$

tenendo conto delle (7) e (7') la (I) assume la forma:

$$(II) \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \times \Delta \mathbf{P}_i > \sum_i^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i^*) \times \Delta^* \mathbf{P}_i$$

ove, è bene osservarlo, $\Delta \mathbf{P}_i$ indica il movimento reale che subirebbe il punto P_i nello intervallo di tempo abbastanza piccolo τ , a partire dalla quiete e dalla configurazione C ; $\Delta^* \mathbf{P}_i$ invece indica il movimento virtuale, che subirebbe il punto P_i , nello stesso intervallo di tempo, sempre a partire dalla quiete e dalla medesima configurazione C , in seguito però alla introduzione di nuovi vincoli.

Pel principio dei lavori virtuali:

$$\sum_i^N \mathbf{R}_i \times \Delta \mathbf{P}_i = \sum_i^N \mathbf{R}_i^* \times \Delta^* \mathbf{P}_i = 0$$

onde la (II) assume la forma definitiva:

$$(II') \quad \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \Delta \mathbf{P}_i > \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \Delta^* \mathbf{P}_i$$

si può quindi concludere: Durante il moto di un sistema materiale a legami bilaterali, privi di attrito ed indipendenti dal tempo, a partire da un generico istante t e da una quasivoglia configurazione, se si suppone che i punti P_i partano dalla quiete, lo spostamento reale $\Delta \mathbf{P}_i$ del sistema, nello intervallo di tempo abbastanza piccolo τ , è tale che il lavoro complessivo effettuato dalle forze attive, in tale intervallo di tempo, risulta massimo rispetto al lavoro eseguito dalle medesime forze per uno spostamento arbitrario $\Delta^* \mathbf{P}_i$, compatibile coi legami, realizzato, nello stesso intervallo di tempo τ , con l'introduzione di nuovi legami.

Si può ulteriormente procedere nelle nostre indagini; invece di paragonare, come si è fatto, il lavoro elementare delle forze attive durante uno stesso intervallo di tempo τ , ci si può proporre di paragonare i lavori (virtuali) delle medesime forze attive per spostamenti virtuali $\Delta^* \mathbf{P}_i$ aventi uguale modulo; supporremo insomma che ogni punto P_i a partire dalla posizione M_i relativa allo istante t , subisca un qualunque spostamento virtuale, trasferendosi però in un punto della superficie sferica di centro M_i e di raggio $\epsilon_i = |\Delta^* \mathbf{P}_i|$; tra gli ∞^2 spostamenti $\Delta^* \mathbf{P}_i$ che permettono il passaggio del punto P_i dal centro M_i , ad una posizione quale si voglia sulla superficie sferica anzidetta, un numero in generale semplicemente infinito di spostamenti $\Delta^* \mathbf{P}_i$ è compatibile coi legami.

Ci si può chiedere: tra questo numero semplicemente infinito di spostamenti $\Delta^* \mathbf{P}_i$, quale è quello secondo cui diviene massimo il lavoro complessivo effettuato dalle forze direttamente applicate?

Per il postulato delle reazioni vincolari, i singoli punti P_i del sistema possono riguardarsi come liberi, sollecitati ciascuno dalla forza totale

$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$. Fërma restando la distribuzione delle forze attive, se il sistema allo istante t si suppone che parta dalla quiete, ogni punto P_i subisce, in un intervallo di tempo τ abbastanza piccolo, un movimento ΔP_i ; nella ipotesi però che non tutte le forze $\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$ siano nulle, nel quale caso il sistema, se inizialmente in quiete, vi si mantiene finchè rimangano immutate le forze attive. Per la legge del moto incipiente, il movimento ΔP_i avrà la direzione ed il verso della corrispondente forza totale $\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$; il lavoro da questa compiuto risulta certamente massimo rispetto al lavoro analogo per qualsivoglia spostamento virtuale $\Delta^* P_i$ avente uguale modulo. Sommando i lavori parziali relativi a ciascun punto P_i si ottiene:

$$\sum_i^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \times \Delta P_i > \sum_i^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \times \Delta^* P_i$$

purchè:

$$|\Delta P_i| = |\Delta^* P_i|$$

di qui, applicando il principio dei lavori virtuali si conclude:

$$(III) \quad \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \Delta P_i > \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \Delta^* P_i$$

vale a dire: Durante il moto di un sistema materiale a legami bilaterali, privi di attrito ed indipendenti dal tempo, a partire da un generico istante t e da una qualsivoglia configurazione, nella ipotesi che le forze attive non siano atte a mantenere l'equilibrio, esiste sempre uno spostamento virtuale ΔP_i tale, che il lavoro complessivo eseguito dalle forze direttamente applicate per effetto di tale spostamento, risulti massimo, rispetto allo analogo lavoro compiuto dalle stesse forze, per uno spostamento virtuale qualunque, avente lo stesso modulo; tale spostamento *privilegiato* che realizza la anzi-detta condizione di massimo, è nient'altro che il movimento reale, nell'intervallo di tempo τ , che subirebbe il sistema se allo istante t e dalla relativa configurazione, partisse dalla quiete.

È evidente, che lo spostamento opposto — ΔP_i dovrà realizzare la condizione di minimo, poichè in caso contrario, si viene ad individuare, cambiando il segno, uno spostamento $\Delta^* P_i$ diverso da ΔP_i , per cui non ha più luogo la disuguaglianza (III); ciò che è impossibile. Si può quindi enunciare la seguente proposizione:

Dato un sistema materiale come quello considerato, a partire da una configurazione generica all'istante t , rimanendo inmutata la sollecitazione, il lavoro (virtuale) complessivo eseguito dalle forze attive, per uno spostamento virtuale qualunque, di modulo $\Delta^* P_i$, è sempre compreso fra un massimo ed un minimo uguali in valore assoluto e di segno opposto; il valore massimo compete allo spostamento privilegiato ΔP_i avente i caratteri sopra indicati.

Se poi in particolare, qualunque sia lo spostamento virtuale di modulo Δ^*P_i , il lavoro complessivo delle forze attive dovesse risultare costante, il valore di tale costante, per l'ultima osservazione, dovrà necessariamente essere nullo. Non esiste in tale caso lo spostamento privilegiato ΔP_i , sicchè il sistema, se all'istante t è in quiete, vi si mantiene, finchè le forze attive rimangano immutate; la relazione (III) ci riconduce alla equazione simbolica della statica:

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \times \Delta^*P_i = 0$$

che però viene ad assumere speciale carattere di evidenza fisica.

Idromeccanica. — *Sulla unicità di azioni dinamiche nel problema della lastra piana.* Nota ⁽¹⁾ di B. FINZI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Il prof. Pistolesi, in una Nota recente ⁽²⁾, riprende in esame il problema della determinazione delle azioni dinamiche che una corrente traslo-circulatoria esercita su di una lamina rettilinea. A questa Nota e alla rapida, esauriente storia della questione in essa contenuta ⁽³⁾ intendo riferirmi. Isolati i punti di singolarità e valutato il limite delle azioni dinamiche e della potenza della corrente allorchè i circuiti d'isolamento svaniscono, l'Autore crede che il valore del limite dipenda dal modo con cui si valuta il limite stesso e conclude quindi ritenendo il problema in esame indeterminato.

Ai procedimenti di Cisotti, Rosenblatt e miei, che l'Autore riconosce ortodossi e che tutti concordano con il risultato di Cisotti, egli contrappone, per dimostrare la sua tesi, altri procedimenti portanti alla validità del teorema di Kutta-Joukowski anche nel caso in esame. Mostreremo in questa Nota come questi procedimenti non siano legittimi: allo stato attuale della discussione non si potrà dunque concludere per l'indeterminazione.

Osserviamo anzi tutto che applicando nel caso in esame le formule di Blasius (equivalenti al teorema della quantità di moto), data l'analiticità

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1928.

(2) *Ancora sul teorema di Kutta-Joukowski nel caso della lastra piana*, questi « Rendiconti », vol. VIII (1928), p. 50.

(3) Desidero solo, a tal proposito, osservare che io non ho affermato che le forze di risucchio possano accomodare ogni cosa, chè, se la loro introduzione può ristabilire il teorema di Kutta-Joukowski anche nel caso in esame, non permette però di soddisfare al principio di conservazione dell'energia (cfr. *Osservazioni sulla Nota di P. Straneo: « Intorno al teorema di Kutta-Joukowski »*, Nota di U. CISOTTI e B. FINZI, inserita in questi « Rendiconti », vol. VII (1928), p. 538).

delle formule usate e la presenza di sole singolarità polari⁽¹⁾, la soluzione è unica comunque si valuti il limite, e la soluzione coincide con quella di Cisotti⁽²⁾. Questo procedimento (come, del resto, riconosce anche Pistolesi⁽³⁾) non porta dunque ad indeterminazione alcuna. Basterebbe questa osservazione per concludere che il problema che Cisotti, Rosenblatt ed io abbiamo trattato per vie differenti (ma sostanzialmente equivalenti), partendo da una unica soluzione delle equazioni idrodinamiche, è ben determinato ed ammette unicamente la soluzione di Cisotti. In ogni modo, anche formalmente, osserviamo che, per ora, non v'è indeterminazione neppure nel calcolo diretto della risultante delle pressioni, perchè al calcolo di Cisotti (che Pistolesi stesso conferma⁽⁴⁾) l'Autore non oppone che il calcolo di Ferrari⁽⁵⁾, calcolo che egli stesso rileva errato⁽⁶⁾, e ciò in pieno accordo con una mia recente Nota⁽⁷⁾.

Rimane dunque da discutere soltanto il problema energetico. Qui stanno a contrapposto il mio calcolo e quello eseguito da Pistolesi. Quest'ultimo non è ortodosso. Infatti:

Sia \dot{T} la potenza della corrente, p la pressione, ψ la funzione di corrente e ω un circuito evanescente circondante un estremo della lamina⁽⁸⁾: sarà⁽⁹⁾:

$$(1) \quad \dot{T} = \sum_{\omega} \int p d\psi.$$

Il prof. Pistolesi assume come circuito ω , abbracciante l'estremo P della lamina, un circuito formato da una linea di flusso e da due linee equipotenziali spiccate da due punti A e B geometricamente coincidenti, ma posti l'uno sulla faccia della lamina a valle, l'altro sulla faccia a monte. Se p_1 e p_2 sono

(1) Non essenziali, come asserisce PISTOLESI (loc. cit., p. 52).

(2) A. ROSENBLATT, *Sur le théorème de Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. V (1927), p. 564.

(3) Loc. cit., p. 52, righe 8-11.

(4) Loc. cit., p. 52 ultime 13 righe, p. 53 prime 17 righe.

(5) *La lastra piana e la legge di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. VII (1928), pp. 487 e 821.

(6) loc. cit., p. 50, righe 19-22.

(7) *Sopra il teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. VIII, p. 210: cfr. l'ultima nota. La Nota ora citata mostra come la dimostrazione del teorema di Kutta-Joukowski recentemente data da SIGNORINI (questi « Rendiconti », vol. VII (1928), p. 823) non sussista in presenza di singolarità al contorno.

(8) Diciamo brevemente ω circuito evanescente, se ω è il contorno del campo limite della successione di campi $c_1, c_2 \dots c_n, \dots$ tali che: 1°, ognuno contenga il precedente; 2°, tutti contengano il punto singolare; 3°, preso un punto vicino quanto si vuole al punto singolare, esista sempre un campo della successione che non lo contenga (cfr., ad es., G. VIVANTI, *Lezioni di analisi infinitesimale*, 2ª ed., Torino, n. 315).

(9) B. FINZI, *Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. V (1927), p. 666, formula (5).

le pressioni in A e in B, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $\Delta\psi$, sarà

$$(2) \quad \int_{\omega} p d\psi = (p_1 - p_2) \Delta\psi.$$

Allorchè ω svanisce, $\Delta\psi \rightarrow 0$, e quindi — dice Pistolesi — per la (2),

$$\int_{\omega} p d\psi \rightarrow 0, \text{ così che } \dot{T} \rightarrow 0.$$

Osserviamo che ciò potrebbe senz'altro affermarsi se, svanendo ω , $p_1 - p_2$ si mantenesse finito. Non così se $p_1 - p_2 \rightarrow \infty$. Ora, nel nostro caso, $p_1 - p_2$ tende appunto all'infinito allorchè ω svanisce. Infatti: se σ è un opportuno parametro che caratterizza la posizione di un punto della lamina, così che per $\sigma = \beta$, $A = B = P$, $p_1 - p_2$ diviene infinito per $\sigma \rightarrow \beta$ come $1/\sin(\sigma - \beta)^{(1)}$. Ora, allorchè ω svanisce, non soltanto $\Delta\psi \rightarrow 0$, ma anche $\sigma \rightarrow \beta$, e quindi $p_1 - p_2 \rightarrow \infty$. La conclusione di Pistolesi non è dunque legittima *a priori*. Potrebbe interpretarsi il ragionamento di Pistolesi nel senso che, posto $\sigma - \beta = \mu$, $\Delta\psi = \varepsilon$, il valore di $(p_1 - p_2) \Delta\psi$ dipende dal rapporto ε/μ , e, poichè ε e μ si possono (*a priori*) far tendere a zero indipendentemente, tale rapporto può assumere un valore arbitrario. Se ne dedurrebbe (per la (2) e la (1)) che \int_{ω} e \dot{T} possono assumere valori arbi-

trari, confermando quindi la tesi dell'indeterminazione. Il ragionamento ora svolto è però falso. Trasportiamo il ragionamento di Pistolesi, per maggior semplicità, in un caso di manifesta evidenza: esso ci porterà a risultati errati.

Nel piano x, y consideriamo il rettangolo ω , formato dalle rette $x = \pm \varepsilon$, $y = \pm \mu$. Valutiamo

$$\int_{\omega} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Sarà

$$(3) \quad \int_{\omega} = \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\varepsilon dy}{\varepsilon^2 + y^2} - \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{\mu dx}{x^2 + \mu^2} + \int_{\mu}^{-\mu} \frac{-\varepsilon dy}{\varepsilon^2 + y^2} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{-\mu dx}{x^2 + \mu^2} =$$

$$= 4 \left(\arctg \frac{\mu}{\varepsilon} + \arctg \frac{\varepsilon}{\mu} \right) = 2\pi^{(2)}.$$

(1) U. CISOTTI, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. V (1927), p. 16: cfr. formula (9), dopo aver ridotto allo stesso denominatore il secondo membro.

(2) Si pensi, del resto, che \int_{ω} non è altro che il coefficiente dell'immaginario dell'

$$\int_{\omega} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (\zeta = x + iy),$$

e questo (per il teorema di Cauchy) è uguale a $2\pi i$.

Facciamo ora svanire ω , facendo tendere ε e μ a zero comunque. Sarà:

$$(4) \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} \int_{\omega} = 2\pi.$$

Applichiamo ora al caso in esame il ragionamento di Pistolesi: analogamente alla (2), poniamo (a meno di infinitesimi di ordine superiore a μ) al posto del primo integrale che compare nel secondo membro della (3) $2\mu/\varepsilon^{(1)}$, e operiamo analogamente per gli altri tre integrali che compaiono nel secondo membro della (3). Al posto di \int_{ω} porremo allora $4\left(\frac{\mu}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\mu}\right)$. Se il ragionamento di Pistolesi fosse esatto, sarebbe lecito scrivere

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} \int_{\omega} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} 4\left(\frac{\mu}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\mu}\right).$$

Ora, poichè ε e μ tendono a zero in modo indipendente, μ/ε può farsi tendere ad un valore arbitrario k (anche nullo o infinito), così che

$$(5) \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} \int_{\omega} = 4\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Applicando il ragionamento di Pistolesi $\lim \int_{\omega}$ potrebbe dunque assumere un valore arbitrario (purchè, in valore assoluto, non minore di 8). Ciò è in manifesta contraddizione con la (4).

Neppure dal punto di vista energetico può dunque (per ora), anche formalmente, parlarsi di indeterminazione del problema.

Matematica. — *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio.* Memoria di B. DE FINETTI, pres. dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Seconda forma quadratica fondamentale di una varietà anolonomica ed applicazioni.* Nota di G. VRANCEANU, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cioè il prodotto della misura 2μ dell'intervallo d'integrazione per il valore $\frac{1}{\varepsilon}$ che la funzione integranda assume in un punto interno all'intervallo (il punto $y=0$).

Matematica. — *Equazioni reciproche a matrice.* Nota di L. TOSCANO, pres. dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti.* Nota di L. FANTAPPIÈ, pres. dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Alcune limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica.* Nota di G. SUPINO, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Su una terza equazione ordinale nella dinamica dei sistemi materiali.* Nota di F. LAMBERTI, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Deformazioni simmetriche di una lastra elastica.* Nota di R. SERINI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La lastra omogenea ed isotropa, non soggetta a forze di massa, colle costanti elastiche Ω^2, ω^2 (quadrati rispettivamente delle velocità delle onde longitudinali e trasversali, quindi $\Omega^2 > \omega^2$), compresa tra i piani $\chi = 0, \tilde{\chi} = h$ ($h > 0$) sia sottoposta ad una deformazione simmetrica intorno all'asse delle χ .

Essendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $I_0(x)$ la funzione di Bessel di prima specie e d'ordine zero,

$$\alpha = \frac{\Omega^2 + \omega^2}{2\omega^2}, \quad \beta = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2},$$

poniamo

$$\begin{aligned} u_1 &= x f_1(r, \chi), \\ v_1 &= y f_1(r, \chi), \\ w_1 &= -\beta \chi \theta + W, \end{aligned}$$

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

con

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{1}{r} \left(\alpha \theta_1 + \beta \chi \frac{\partial \theta_1}{\partial \chi} - W_1 \right), \\ \theta &= \int_0^\infty e^{-rs} I_0(rs) \chi(s) ds, \\ W &= \int_0^\infty e^{-rs} I_0(rs) \lambda(s) ds, \\ \theta_1 &= \int_0^\infty e^{-rs} I'_0(rs) \frac{\chi(s)}{s} ds, \\ W_1 &= - \int_0^\infty e^{-rs} I'_0(rs) \lambda(s) ds. \end{aligned}$$

Si ottiene così la più generale deformazione (u_1, v_1, w_1) , simmetrica intorno all'asse χ , del suolo elastico $\chi \geq 0$: θ ne è la dilatazione ⁽¹⁾.

Se poniamo

$$\begin{aligned} u_2 &= x f_2(r, \chi), \\ v_2 &= y f_2(r, \chi), \\ w_2 &= -\beta(\chi - b) \bar{\theta} + \bar{W}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f_2 &= -\frac{1}{2} \left(\alpha \bar{\theta}_1 + \beta(\chi - b) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \chi} + \bar{W}_1 \right) \quad (2), \\ \bar{\theta} &= \int_0^\infty e^{(\chi - b)s} I_0(rs) \chi_1(s) ds, \\ \bar{W} &= \int_0^\infty e^{(\chi - b)s} I_0(rs) \lambda_1(s) ds, \\ \bar{\theta}_1 &= \int_0^\infty e^{(\chi - b)s} I'_0(rs) \frac{\chi_1(s)}{s} ds, \\ \bar{W}_1 &= - \int_0^\infty e^{(\chi - b)s} I'_0(rs) \lambda_1(s) ds, \end{aligned}$$

(1) Vedi due mie Note nei « Rendiconti R. Acc. Lincei », vol. XXVIII, 2^a sem., fascicoli 8 e 9, dal titolo *Deformazioni simmetriche del suolo elastico*.

(2) \bar{W}_1 nell'espressione di f_2 è preceduto dal segno +; per vederne la ragione basta rifare il ragionamento della mia prima Nota citata, osservando che la formola (10'') va modificata come segue:

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial r \partial \chi} = - \frac{\partial^2 \bar{W}_1}{\partial \chi^2}.$$

si ottiene la più generale deformazione (u_2, v_2, w_2) , simmetrica intorno all'asse \bar{z} , del suolo $\bar{z} \leq h$: $\bar{\theta}$ ne è la dilatazione.

Io dico che la deformazione $(u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2)$, che è certamente soluzione delle equazioni dell'equilibrio elastico (per la proprietà addittiva siccome dette equazioni sono lineari omogenee) rappresenta la più generale deformazione simmetrica della lastra compresa tra $\bar{z} = 0$ e $\bar{z} = h$.

Basterà perciò dimostrare che, fissato ad arbitrio lo spostamento sulle due superficie limiti, si possono determinare in modo unico le quattro funzioni incognite $\lambda(s), \chi(s), \lambda_1(s), \chi_1(s)$. E siccome la dimostrazione si fonderà sulla effettiva determinazione delle dette funzioni verrà con ciò anche risolto il primo problema classico, cioè delle deformazioni date al contorno.

Siano dunque dati sui piani $\bar{z} = 0, \bar{z} = h$, gli spostamenti normali e radiali e siano rispettivamente $w_0(r), \sigma_0(r), w_h(r), \sigma_h(r)$: si osservi poi che quando $u = xf(r, \bar{z}), v = yf(r, \bar{z})$ si ha $\sigma(r) = rf(r, \bar{z})$.

Allora dovremo avere:

$$\begin{aligned} \text{per } \bar{z} = 0 \quad & \begin{cases} W(r, 0) + \beta h \theta(r, 0) + \bar{W}(r, 0) = w_0(r), \\ rf_1(r, 0) + rf_2(r, 0) = \sigma_0(r), \end{cases} \\ \text{per } \bar{z} = h \quad & \begin{cases} -\beta h \theta(r, h) + W(r, h) + \bar{W}(r, h) = w_h(r), \\ rf_1(r, h) + rf_2(r, h) = \sigma_h(r), \end{cases} \end{aligned}$$

ossia esplicitando e tenendo conto delle posizioni fatte e che $I_1(x) = -I_0(x)$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty I_0(rs) [\lambda(s) + \beta h e^{-hs} \chi_1(s) + e^{-hs} \lambda_1(s)] ds &= w_0(r), \\ \int_0^\infty I_1(rs) \left[-\frac{\alpha \chi(s)}{s} - \lambda(s) + \frac{\beta h s - \alpha}{s} e^{-hs} \chi_1(s) + e^{-hs} \lambda_1(s) \right] ds &= -\sigma_0(r), \\ \int_0^\infty I_0(rs) [-\beta h e^{-hs} \chi(s) + e^{-hs} \lambda(s) + \lambda_1(s)] ds &= w_h(r), \\ \int_0^\infty I_1(rs) \left[\frac{\beta h s - \alpha}{s} e^{-hs} \chi(s) - e^{-hs} \lambda(s) - \frac{\alpha \chi_1(s)}{s} + \lambda_1(s) \right] ds &= -\sigma_h(r). \end{aligned}$$

Queste equazioni integrali si possono risolvere col teorema di Hankel⁽¹⁾ e si otterrà, essendo $f_1(s), f_2(s), f_3(s), f_4(s)$ quattro funzioni note

$$\begin{aligned} \lambda(s) + \beta h e^{-hs} \chi_1(s) + e^{-hs} \lambda_1(s) &= f_1(s), \\ -\frac{\alpha}{s} \chi(s) - \lambda(s) + \frac{\beta h s - \alpha}{s} e^{-hs} \chi_1(s) + e^{-hs} \lambda_1(s) &= f_2(s), \\ -\beta h e^{-hs} \chi(s) + e^{-hs} \lambda(s) &+ \lambda_1(s) = f_3(s), \\ \frac{\beta h s - \alpha}{s} e^{-hs} \chi(s) - e^{-hs} \lambda(s) - \frac{\alpha}{s} \chi_1(s) + \lambda_1(s) &= f_4(s). \end{aligned}$$

(1) Vedi seconda Nota citata.

Queste quattro equazioni lineari non omogenee nelle $\chi, \lambda, \chi_1, \lambda_1$, hanno per determinante dei coefficienti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \beta h e^{-hs} & e^{-hs} \\ -\frac{\alpha}{s} & -1 & \frac{\beta h s - \alpha}{s} e^{-hs} & e^{-hs} \\ -\beta h e^{-hs} & e^{-hs} & 0 & 1 \\ \frac{\beta h s - \alpha}{s} e^{-hs} & -e^{-hs} & -\frac{\alpha}{s} & 1 \end{vmatrix}.$$

Posto $x = e^{bs}$, $y = \beta h s$ si trova sviluppando

$$s^2 x^4 \Delta = [\alpha(x^2 - 1) + 2xy][\alpha(x^2 - 1) - 2xy] = \tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2.$$

Ora per $s > 0$ si ha $x^2 > 1$, $y > 0$ quindi siccome $\alpha > 0$ il fattore $\tilde{\chi}_1$ è > 0 : quanto al secondo, ponendo al posto di x e y le loro espressioni si ha

$$\tilde{\chi}_2 = \alpha e^{2hs} - 2\beta h s e^{hs} - \alpha:$$

ora per $s = 0$ $\tilde{\chi}_2(0) = 0$, inoltre

$$\tilde{\chi}_2' = 2 h e^{hs} (\alpha e^{hs} - \beta(1 + hs)),$$

e quindi, siccome $\alpha > \beta$, $e^{bs} \cong 1 + hs$, (il segno = vale per $s = 0$) anche

$$\tilde{\chi}_2' > 0.$$

La funzione $\tilde{\chi}_2(s)$ che per $s = 0$ è zero ed ha derivata sempre positiva sarà perciò sempre > 0 per $s > 0$.

Per $s = 0$ le due funzioni $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$ hanno zeri di primo ordine quindi dalla formola

$$s^2 x^4 \Delta = \tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2$$

si deduce che $\Delta \neq 0$ anche per $s = 0$.

Siccome le quattro funzioni $\chi, \lambda, \chi_1, \lambda_1$ si possono determinare in modo unico per essere $\Delta \neq 0$ resta con ciò dimostrato che la soluzione proposta è la più generale.

Questo metodo si presta per risolvere quindi i problemi elastici per la lastra quando siano date nelle due faccie le tensioni, oppure i problemi misti: rimando perciò alle mie Note citate dove sono risolti gli analoghi problemi sul suolo.

Fisica. — *Sulla teoria della trasmissione del calore per convenzione.* Nota di D. GRAFFI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

È ben nota l'importanza scientifica e tecnica della trasmissione del calore per convenzione.

Su questo argomento vi sono moltissimi dati sperimentali, ma sarebbe utile avere una teoria matematica che permettesse di riordinare tali dati e di prevederne altri.

La teoria matematica della trasmissione del calore per convenzione fu cominciata alcuni anni fa ⁽²⁾ da autori tedeschi e fu ripresa in seguito dal Boussinesq e da altri. Questa teoria si presenta più facile nella trattazione della cosiddetta convenzione forzata in quanto che in tale caso il problema si riduce a risolvere le equazioni idrodinamiche e trovato il valore di \mathbf{v} ossia della velocità in ogni punto del fluido considerato, mediante un'altra equazione è possibile determinare la temperatura T in ogni punto del fluido qualora siano soddisfatte certe condizioni che poi preciseremo. L'equazione in discorso è la seguente:

$$(1) \quad C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = K \operatorname{div} \operatorname{grad} T - c_p \rho \operatorname{grad} T \times \mathbf{v}$$

dove t, ρ, c_p, K sono rispettivamente il tempo, la densità, il calore specifico a pressione costante, e la conducibilità termica del fluido supposto omogeneo. In questa teoria si ammette di solito valida l'equazione:

$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Però l'integrazione di queste equazioni è in generale molto difficile, quindi diventa utile il criterio della analisi dimensionale che permette di ottenere risultati notevoli senza incontrare alcuna difficoltà analitica. Ma per poter applicare con sicurezza tale metodo, occorre, come ha dimostrato il prof. Foà ⁽³⁾, sapere se le equazioni indefinite ora scritte, assieme ad alcune condizioni ai limiti, ammettono un'unica soluzione.

Lo scopo di questa Nota è appunto di dimostrare alcuni teoremi di unicità su questo argomento.

Il primo teorema che ci proponiamo di dimostrare è il seguente: sia S un certo spazio limitato dalla superficie σ . Le equazioni (1) e (2) deter-

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(2) Vedi, per es., la bibliografia dell'argomento nel lavoro del GUNDEL « Ann. der Physik », 1925.

(3) Prof. FOÀ, « L'Industria », 15 ottobre 1928.

minano in modo unico il problema qualora sia data la T in ogni istante sulla σ e su tutto S allo stato iniziale. Nel caso della trasmissione stazionaria per l'unicità basta la conoscenza della T su σ .

Siano dunque T e T_1 due possibili soluzioni dell'equazione (1).

Poniamo $\theta = T - T_1$ occorre dimostrare che la θ è sempre nulla. Poichè le T e T_1 soddisfano alla (1) per sottrazione si ottiene che anche la θ soddisfa alla medesima equazione, cioè

$$(3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = d \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta - \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{v}$$

in cui si è posto $d = \frac{K}{c_p \rho}$ che supporremo maggiore di zero conformemente all'esperienza. La θ deve essere poi nulla sulla σ e su tutto S al tempo iniziale. Moltiplichiamo per θ ambo i membri della (3) e integriamo tale espressione su tutto S . Si ottiene:

$$(4) \quad \int_S \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} dS = \int_S d \cdot \theta \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta dS - \int_S \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{v} dS.$$

Ma si osservi che per le nostre ipotesi si ha:

$$(5) \quad \int_S \theta \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta dS = \int_S \operatorname{div} (\theta \operatorname{grad} \theta) dS - \int_S \operatorname{grad}^2 \theta dS = - \int_S \operatorname{grad}^2 \theta dS,$$

$$(6) \quad \int_S \theta \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{v} dS = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{grad} \theta^2 \times \mathbf{v} dS = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{div} (\theta^2 \mathbf{v}) dS = - \\ - \int_{\sigma} \theta^2 \mathbf{v} \times \bar{n} d\sigma = 0$$

così la (4) diviene:

$$(7) \quad \int_S \frac{\partial \theta^2}{\partial t} dS + d \int_S \operatorname{grad}^2 \theta dS = 0.$$

Da questa relazione, con i soliti ragionamenti, ricordando che nel caso non stazionario la θ deve essere nulla al tempo iniziale si deduce che la θ deve essere sempre uguale a zero, come si voleva dimostrare.

Un altro teorema di unicità che ci proponiamo di provare è il seguente: La T è determinata quando sia nota in tutto S al tempo iniziale, in ogni istante su alcuni pezzi σ_1 di σ e sui pezzi rimanenti σ_2 , dove si suppone $\mathbf{v} \times \mathbf{n} \leq 0$ (\mathbf{n} normale interna) che sia noto $\operatorname{grad} T \times \mathbf{n}$.

La dimostrazione di questo teorema procede in modo analogo al precedente. Si ottengono subito le relazioni (4) e (5). Quanto alla (6) in essa si annulla soltanto l'integrale esteso a σ_1 , perciò rimane:

$$\int_S \theta \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{n} dS = - \frac{1}{2} \int_{\sigma_2} \theta^2 \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma_2.$$

Quindi la (4) diviene:

$$\frac{1}{2} \int_S \frac{\partial \theta^2}{\partial t} dS + d \int_S \operatorname{grad}^2 \theta dS - \frac{1}{2} \int_S \theta^2 \mathbf{v} \times \mathbf{n} dS = 0.$$

Ossia integrando tale espressione rispetto al tempo da zero a t e ricordando che la θ è nulla al tempo zero, si ha:

$$\frac{1}{2} \int_S \theta^2 dS + d \int_0^t dt \int_S \operatorname{grad}^2 \theta dS - \frac{1}{2} \int_0^t dt \int_S \theta^2 \mathbf{v} \times \mathbf{n} dS = 0.$$

Siccome il primo membro in questa equazione è una somma di quantità positive, o al più nulle, con i soliti ragionamenti si deduce che deve essere $\theta = 0$. Il teorema è stato dimostrato per il caso non stazionario, ma è ovvia l'estensione al caso stazionario.

I due teoremi sopra dimostrati valgono evidentemente anche nel caso di spazi illimitati purchè si ammettano per $\theta \operatorname{grad} \theta$ e $\theta^2 \mathbf{v}$ le solite condizioni di convergenza all'infinito.

Fisica. — *Applicazione del metodo funzionale allo studio del raffreddamento di una sbarra.* Nota di STEFANO LODOVICO STRANEO presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. G. GIORGI.

In una Nota precedente ⁽²⁾, ho dimostrato come si possa con successo applicare il metodo funzionale allo studio della propagazione del calore in una sbarra semi-infinita, supposto che la temperatura dell'estremità sia una funzione $T_0(t)$ assegnata. Lo stesso metodo applico, in questa Nota, allo studio della propagazione del calore in una sbarra, o altro sistema in cui la temperatura dipenda da una sola dimensione, nel quale le arbitrarie non siano date in funzione del tempo, ma invece sia assegnata un'arbitraria di-

(1) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(2) *Metodo funzionale applicato alla risoluzione di problemi sulla propagazione del calore*, «Atti della Pont. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei», anno LXXXI, sessione II del 15 gennaio 1928, pp. 133-138.

sistribuzione di temperatura $T_0(x)$ al tempo $t = 0$. Considero dapprima il caso che la sbarra sia di lunghezza infinita.

L'equazione della propagazione è

$$(1) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = b \frac{\partial T}{\partial t} + c T$$

essendo b e c costanti positive di noto significato fisico. Indicando nella (1) col simbolo \mathfrak{D} l'operazione di derivazione rispetto a x , cioè ponendo $\mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial x}$, si può scrivere

$$(2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{b} (\mathfrak{D}^2 - c) T$$

e, con riferimento a quanto è stato detto nella Nota citata, si può trattare il simbolo \mathfrak{D} come se fosse un semplice moltiplicatore. Integrando quindi la (2) come se l'unica variabile fosse t , avremo, denotando con $C(x)$ una funzione arbitraria di x ,

$$(3) \quad T = e^{-t \frac{c}{b}} e^{\frac{t}{b} \mathfrak{D}^2} C(x).$$

Perchè sia soddisfatta la condizione imposta per $t = 0$, deve essere ovviamente $C(x) = T_0(x)$ e quindi la soluzione si presenta nella forma

$$(4) \quad T = e^{-t \frac{c}{b}} e^{\frac{t}{b} \mathfrak{D}^2} T_0(x).$$

Rimane ora da trovare il significato dell'operatore $e^{\frac{t}{b} \mathfrak{D}^2}$. Per eseguire questa valutazione, poichè b è positivo e poichè consideriamo solo i valori positivi di t , poniamo anzitutto

$$(5) \quad \frac{t}{b} = h^2;$$

la (4) diventa

$$(6) \quad T = e^{-\frac{c}{b} t} e^{h^2 \mathfrak{D}^2} T_0(x).$$

Se nel noto integrale

$$(7) \quad \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

poniamo

$$\lambda = \frac{\alpha}{2h} + h \mathfrak{D}$$

avremo

$$(8) \quad \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-h^2 \mathfrak{D}^2} e^{-\frac{\alpha^2}{4h^2} - \alpha \mathfrak{D}} d\alpha}{2h} = \frac{e^{-h^2 \mathfrak{D}^2}}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{4h^2}} e^{\alpha \mathfrak{D}} d\alpha.$$

La sostituzione fatta è lecita per il teorema del Giorgi che dimostra la validità di questi sviluppi di operatori nel caso che, riguardando \mathfrak{D} come una variabile complessa, per ogni valore di α l'integrale risulti uniformemente convergente su tutti i punti di una qualche linea che si estenda da $-i\infty$ a $+i\infty$, lasciando alla sua sinistra i punti singolari della funzione integrando. Essendo questa condizione verificata, dalle (8) si ricava senz'altro

$$(9) \quad e^{h^2 \mathfrak{D}^2} = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4h^2} - \alpha \mathfrak{D}} d\alpha.$$

Se l'operatore è applicato a una funzione $\varphi(x)$, cioè indica un complesso di operazioni da eseguirsi nella $\varphi(x)$, tenendo presente il teorema di Lagrange-Eulero

$$(10) \quad e^{h^2 \mathfrak{D}^2} \varphi(x) = \varphi(x + h),$$

avremo la valutazione sotto la forma

$$(11) \quad e^{h^2 \mathfrak{D}^2} \varphi(x) = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4h^2}} \varphi(x - \alpha) d\alpha.$$

La risoluzione del problema proposto si ottiene combinando la (4) e la (11), tenendo conto che, per la (5) $h^2 = \frac{t}{b}$, e sostituendo la generica $\varphi(x)$ con la $T_0(x)$. Si ricava così per la temperatura la seguente espressione

$$(12) \quad T = e^{-\frac{c}{b}t} \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2 b}{4t}} T_0(x - \alpha) d\alpha$$

la quale coincide con la soluzione data dal Riemann.

È da notare che, una volta acquisita la (11) come formola generale di calcolo funzionale, la risoluzione della (1) e di tutte le equazioni dello stesso tipo è immediata.

Passando ora allo studio della sbarra finita, io tratterò il caso che le condizioni ai limiti siano le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{lll} T = T_0(x) & \text{per } t = 0 & \text{e per ogni } 0 \leq x \leq l \\ T = 0 & \text{per } x = 0 & \text{e per tutti i } t > 0 \\ T = 0 & \text{per } x = l & \text{e per tutti i } t > 0. \end{array} \right.$$

Applicherò in altra Nota questo caso alla trattazione del problema generale della propagazione del calore nella sbarra finita.

Se in luogo di considerare la sbarra estesa da 0 a l , considero una seconda sbarra di lunghezza infinita, a cui sia assegnata per $t = 0$ una

(temperatura $U_0(x)$), periodica dispari, con periodo $2l$ e, nell'intervallo $(0, l)$ coincidente con $T_0(x)$, la soluzione che troverò in questo caso soddisferà anche al caso assegnato. Posso quindi risolvere nuovamente il caso della sbarra infinita cioè integrare la (1), con la sola condizione $T = U_0(x)$ per $t = 0$.

Per eseguire questa integrazione, ricorro all'uso delle funzioni impulsive unitarie⁽¹⁾. Detta $\varphi(x-s)$ una funzione impulsiva unitaria ripetuta infinite volte in modo da essere periodica dispari con periodo 2π , essa può essere sviluppata *formalmente* mediante questa serie di Fourier divergente

$$(13) \quad \varphi(x-s) = \frac{1}{\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} ns e^{inx}.$$

Denotando con $f(\mathfrak{D})$ un operatore e tenendo presente che

$$f(\mathfrak{D}) e^{\rho x} = f(\rho) e^{\rho x}$$

si ha

$$(14) \quad f(\mathfrak{D}) \varphi(x-s) = \frac{1}{\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} ns e^{inx} f(in) = \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} ns f(in).$$

Ora è noto che una funzione arbitraria periodica dispari con periodo 2π , si sviluppa così

$$(15) \quad U_0(x) = \int_0^{\pi} U_0(s) \varphi(x-s) ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_0(s) \sum_1^{\infty} \operatorname{sen} ns \operatorname{sen} nx ds$$

e

$$(16) \quad f(\mathfrak{D}) U_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_0(s) \sum_1^{\infty} \operatorname{sen} ns \operatorname{sen} nx f(in) ds.$$

Se il periodo è $2l$ invece che 2π , avremo

$$(17) \quad f(\mathfrak{D}) U_0(x) = \frac{2}{l} \int_0^l U_0(\xi) \sum_1^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{l} f\left(\frac{in\pi}{l}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} d\xi$$

e questo sviluppo cessa di essere formale e diventa convergente e utilizzabile nel modo ordinario quando l'operatore è diffusivo.

Ciò premesso, trasformata la (1) nella (6), dopo aver sostituito a $T_0(x)$ la $U_0(x)$, cioè ottenuta la

$$(6') \quad T = e^{-\frac{c}{b}t} e^{\frac{1}{b}\mathfrak{D}^2} U_0(x),$$

(1) Nell'impostazione di questa trattazione seguo un metodo accennato dal Professore G. Giorgi nelle sue lezioni.

constatata la diffusività dell'operatore $e^{\frac{l}{b}\mathfrak{D}^2}$, può essere senz'altro applicata la (17). In questo caso $f(\mathfrak{D}) = e^{-\frac{c}{b}t + \frac{l}{b}\mathfrak{D}^2}$; quindi

$$(18) \quad T = \frac{2}{l} \int_0^l U_0(\xi) \sum_1^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{l} e^{-\frac{c}{b}t - \frac{l}{b}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} d\xi.$$

Siccome poi, nell'intervallo $(0, l)$ la U_0 coincide con la funzione data T_0 , avremo, facendo la sostituzione, il risultato finale sotto la forma:

$$(19) \quad T = \frac{2}{l} e^{-\frac{c}{b}t} \sum_1^{\infty} e^{-\frac{l}{b}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \int_0^l \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} \xi T_0(\xi) d\xi.$$

Questa coincide con quella data dal Riemann, ma è stata qui ottenuta per via diretta, senza ricorrere ad artifici.

Fisica. — *L'effetto della resistenza sullo spettro di una scintilla.*
Nota ⁽¹⁾ di A. OCCHIALINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Questa ricerca ebbe origine dal proposito di perfezionare la spettroscopia quantitativa influendo sulla presenza delle righe di una scintilla mediante gli elementi del circuito di scarica. Si pensò che, se si riuscisse a far sparire una riga con l'inserzione di un'opportuna resistenza nel circuito di scarica, e se la resistenza necessaria per questo scopo fosse dipendente dalla concentrazione dell'elemento al quale la riga appartiene, la determinazione della concentrazione stessa si ridurrebbe alla misura di una resistenza.

Le prime esperienze, fatte in questo ordine di idee sopra scintille condensate di un rocchetto d'induzione, non condussero a risultati positivi, perchè tanto le righe di arco, quanto quelle di scintilla, non spariscono con l'introduzione di una resistenza. Ma ripetendo le stesse determinazioni sulla scintilla a basso potenziale, quali erano state realizzate dallo scrivente fin dal 1911, tra un arco ausiliario e un anodo freddo, si constatò ancora l'insensibilità alla resistenza delle righe di arco, ma una marcata sensibilità sopra alcune righe di scintilla.

Fu allora che si decise di migliorare la produzione delle scintille a basso voltaggio per renderle adatte all'osservazione spettroscopica. Il che si ottenne sostituendo all'arco ausiliario un carbone arroventato, e alla cor-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Siena.

(2) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

rente continua la corrente alternata raddrizzata con una batteria di valvole elettrolitiche, nel modo indicato in una precedente Nota.

Con questo dispositivo l'effetto della resistenza fu esaminato facilmente, e condusse a riconoscere, non solo che alcune delle righe di scintilla spariscono con l'inserzione di una resistenza conveniente, ma che spesso una stessa resistenza basta per far sparire più righe contemporaneamente. Col piombo, per esempio, la scintilla ottenuta con 1000 volt e con un microfarad di capacità si priva delle righe 5275 e 5183 quando si inseriscono nel circuito della scarica 41 ohm, mentre le righe 5857 e 4761 esigono 72 ohm, ma con questa resistenza spariscono insieme.

Altre righe di scintilla, e tutte le righe di arco, non spariscono con la resistenza prima che questa abbia arrestato o alterato la scarica.

Ci si trova evidentemente di fronte ad una classificazione delle righe emesse da un elemento, fondata sull'attitudine a sopportare l'azione della resistenza inserita nel circuito di scarica. Si può esprimere questo fatto dicendo, che se la resistenza è abbastanza forte, lo spettro delle scintille a basso voltaggio è mancante di alcune righe di scintilla, e che col diminuire della resistenza queste righe compariscono aderenti all'elettrodo freddo, non una alla volta, ma per gruppi, con valori determinati della resistenza.

Un fatto simile è stato notato da Leone ed Eugenio Bloch nella scarica senza elettrodi attraverso al vapore di mercurio, con l'aumentare graduale dell'intervallo esplosivo nel circuito primario. E siccome si sa ormai che le righe d'arco sono emesse dall'atomo neutro, mentre le righe di scintilla sono da attribuirsi all'atomo ionizzato, è naturale supporre che l'ordine con cui le righe si presentano col crescere dell'intervallo esplosivo sia quello delle successive ionizzazioni. E in taluni casi questo punto di vista ha l'appoggio della teoria di Bohr, la quale dà qualche criterio per riconoscere dalla struttura delle serie i centri di emissione variamente ionizzati, stabilendo, tra l'altro, che lo spettro di prima ionizzazione di un elemento ha la struttura dello spettro d'arco dell'elemento che lo precede nella tabella periodica.

Per lo stesso motivo è ragionevole ascrivere ad atomi diversamente ionizzati i gruppi di righe che compariscono nello spettro delle scintille a basso voltaggio con diversi valori della resistenza, e precisamente ad atomi con un grado di ionizzazione uguale al numero d'ordine secondo cui esse compariscono di mano in mano che la resistenza del circuito decresce.

Nel piombo, come si è detto, astrazione fatta dalle righe d'arco, che si classificano da sè, per esempio con la loro insensibilità all'induttanza del circuito, le righe di scintilla si possono dividere in tre gruppi, quelle che restano con resistenze grandi, quelle che compariscono con una resistenza di 72 ohm, e quelle che compariscono con 41 ohm; e sarà naturale attribuire le prime ad atomi semplicemente ionizzati, le seconde ad atomi due volte ionizzati e le ultime ad atomi tre volte ionizzati.

A questo punto bisogna tener presente che l'osservazione era fatta con la scintilla orizzontale proiettata attraverso alla fenditura verticale in modo che questa lambisse l'immagine dell'elettrodo. In questo modo fu facile constatare che col crescere della resistenza le righe prima di sparire si accorciano gradatamente fino a ridursi sull'elettrodo.

E allora fu naturale pensare che, a parità di resistenza, le righe di scintilla dovessero estendersi nell'intervallo di scarica tanto meno, quanto più sono ionizzati gli atomi che le emettono, ossia quanto meno resistenza occorre per farle sparire. In altre parole, si pensò che lo stesso aggruppamento messo in evidenza dall'ordine di apparizione con resistenze decrescenti, si dovesse ritrovare nella distanza dall'elettrodo alla quale è possibile fare l'osservazione delle diverse righe. E infatti, facendo scorrere l'immagine orizzontale della scintilla attraverso alla fenditura, si riconobbe subito che nel punto in cui sparisce una riga, diventano invisibili tutte le righe dello stesso gruppo; e che le distanze dall'elettrodo a cui sono visibili le diverse righe sono scaglionate lungo l'intervallo di scarica secondo l'ordine delle ionizzazioni attribuite agli atomi che le emettono.

Con piccole resistenze non è possibile distinguere una differenza tra le righe di prima ionizzazione e quelle di arco, perchè tutte si spingono fino all'altro elettrodo. Ma con resistenze abbastanza elevate, quelle di prima ionizzazione restano alquanto indietro su quelle di arco, e in tal modo è facile distinguere le une dalle altre.

Allora venne naturale di indagare se lo stesso ordine nelle distanze raggiunte dalle varie righe si ritrova anche nelle scintille ordinarie tra elettrodi freddi, nelle quali, come si è detto, le righe non spariscono con la resistenza; e per questo si dispose uno spinterometro orizzontale costituito di due punte, una del metallo da esaminare, l'altra di un metallo diverso, di solito rame. Un trasformatore a 6000 V, con una capacità in risonanza, dava attraverso a un tale spinterometro una scintilla nutrita, la cui immagine era proiettata sulla fenditura al solito modo.

Con questo mezzo fu facile riscontrare che nella regione adiacente all'elettrodo le righe del metallo non scompaiono mai, ma che spostando l'immagine della scintilla attraverso alla fenditura, si arriva a raggiungere una regione in cui le righe diventano invisibili. Inoltre si riconobbe che le righe ritenute della stessa ionizzazione si spingono tutte alla stessa distanza dall'elettrodo, e che questa distanza è tanto minore, quanto più grande è l'ordine di ionizzazione attribuito alle diverse righe.

Le righe di arco, che, come righe di ionizzazione zero, si aspetterebbe di trovarle sempre in regioni più lontane di quelle di prima ionizzazione, come accade per le scintille a basso voltaggio, presentano frequenti eccezioni nelle scintille con elettrodi freddi, e spesso sono assenti in regioni in cui la prima ionizzazione è ancora visibile.

L'inserzione di una resistenza nel circuito della scarica fa accorciare la regione in cui si spingono le righe. Sicché la lunghezza di questa regione si può considerare come una funzione decrescente della resistenza.

E così si fu condotti a misurare la lunghezza di questa regione con le diverse resistenze, e a studiare la dipendenza dei due elementi.

È evidente che la lunghezza di tale regione è la lunghezza della riga

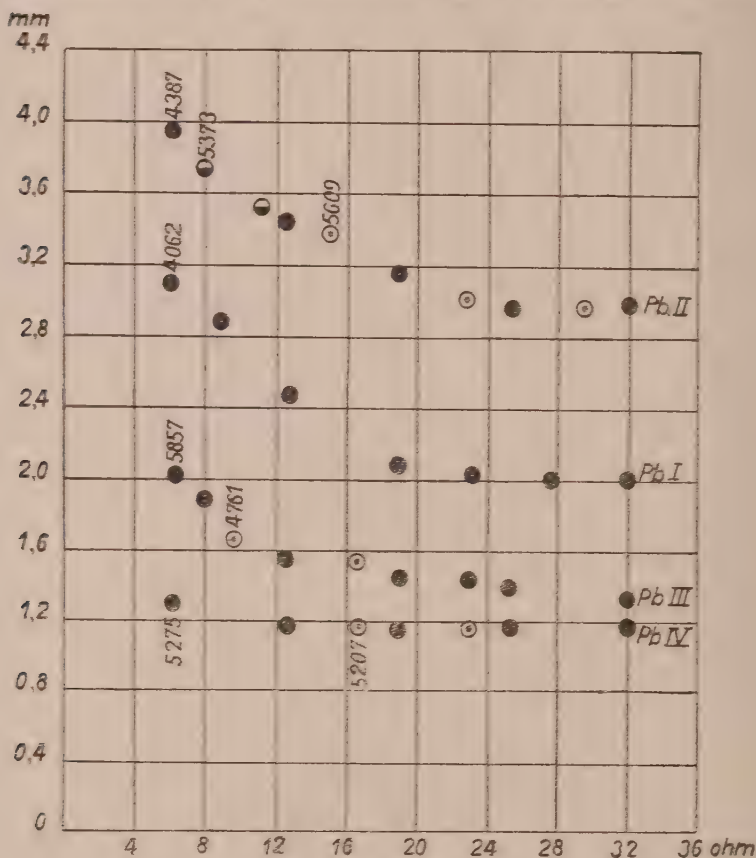


Fig. 1.

quale apparirebbe nello spettroscopio quando l'immagine della scintilla fosse parallela alla fenditura. Ed è noto che l'importanza di tale elemento fu rilevata dal Lokyer quando divise le righe di uno spettro in lunghe e corte. Recentemente questa distinzione è stata adottata da Kimura e Nakamura per classificare gli spettri secondo il grado di ionizzazione degli atomi che li emettono ⁽¹⁾.

(1) KIMURA e NAKAMURA: *A classification of enbauced lines of various elements*, « Jap. Jour. of Physics », 3, 197, 1924.

Col dispositivo adottato nelle presenti ricerche, questo elemento, che finora è stato qualitativo, è suscettibile di una misura precisa, perchè, facendo scorrere l'immagine attraverso alla fenditura, viene limitato nettamente il campo in cui la radiazione è visibile nello spettroscopio.

Per compiere questa misura è conveniente formare un'immagine della scintilla esattamente uguale alla scintilla stessa con una lente a mezza strada tra questa e la fenditura, e spostare la lente trasversalmente montandola sopra una slitta comandata da un micrometro. In tal caso gli spostamenti della lente sono uguali a quelli dell'immagine.

I risultati di queste misure fatte con le diverse resistenze su elettrodi di piombo, riportati in un grafico con le resistenze per ascisse e le lun-

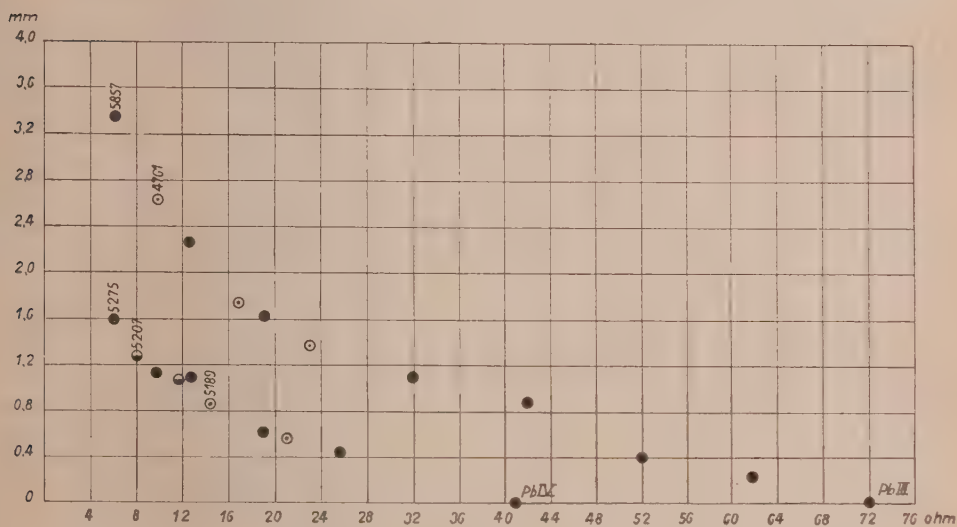


Fig. 2.

ghezze per ordinate. danno il sistema dei punti riportati nella figura 1. Evidentemente non si ha una curva per ogni riga, ma tutti i punti sono disposti su quattro curve assintotiche rispetto all'asse delle ascisse: il che conferma l'osservazione, già fatta in precedenza, che nella scintilla ordinaria le righe non spariscono con l'aumentare della resistenza.

I punti corrispondenti all'unica riga d'arco presa in considerazione sono sulla linea contrassegnata con Pb I e rimangono disposti al di sotto della curva di prima ionizzazione. Questo fatto si ripete con altri metalli, ma non con tutti.

D'altra parte questa anomalia non può indurre nessuna confusione nella classificazione delle righe, perchè, come già si è detto, le righe d'arco si riconoscono per altra via senza difficoltà.

Le altre tre curve che si hanno nel caso del piombo che sono designate con Pb II, Pb III, Pb IV, corrispondono alla prima, alla seconda e alla terza ionizzazione rispettivamente.

Le misure analoghe sulla scintilla a basso voltaggio non si possono ripetere sulle righe di arco e di prima ionizzazione, perchè esse si spingono in tutto l'intervallo di scarica e non cominciano a differenziarsi che con resistenze molto grandi. Invece sulla seconda e sulla terza ionizzazione le misure non presentano difficoltà, e i risultati disposti sul diagramma, danno luogo a due file di punti ben nette (fig. 2).

Le curve che passano per le due file tagliano l'asse delle ascisse, e i valori delle resistenze corrispondenti alle due intersezioni sono giusto quelli necessari per far sparire le righe da tutto l'intervallo della scarica.

Se si applicano i 6000 V al dispositivo delle scintille a basso voltaggio, si hanno scintille lunghe qualche centimetro, nelle quali la lunghezza delle righe è grande, e facile è la sua determinazione.

Fisica. — *Le costanti elastiche in rapporto al sistema periodico degli elementi.* Nota ⁽¹⁾ della prof.ssa M. KAHANOVICZ, presentata dal Corresp. G. GIORGI.

1. Le proprietà fisiche degli elementi (elasticità, calore specifico e conducibilità termica, conducibilità elettrica e suscettività magnetica) si considerano, analogamente alla valenza chimica, come proprietà esterne dell'atomo, dipendenti dalle sue estensioni spaziali.

La caratteristica essenziale è la periodicità, rappresentata, nelle linee più generali, dalle curve di Lothar Meyer, dove i massimi capitano all'inizio di ogni periodo in corrispondenza dei metalli alcalini, e i minimi si formano alla metà del periodo e corrispondono agli elementi omologhi del gruppo ferroso (gruppo VIII del sistema periodico Mendelejeff ⁽²⁾).

Nella presente Nota viene mostrato che, per le proprietà elastiche, si riscontra, contrariamente alle curve di Lothar Meyer, un andamento progressivo col numero atomico.

Secondo la rappresentazione che si dà al sistema periodico nella teoria elettronica (Werner, Bohr-Stoner, Pauli), proprietà periodiche si devono attribuire ad atomi, in cui l'anello periferico contiene uguale numero e identico ordinamento degli elettroni. In questo senso gli elementi si dividono in due categorie (v. annessa tavola del sistema periodico): gruppo,

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1928.

(2) SOMMERFELD, *La Constitution de l'Atome et les Raies spectrales*, vol. I, p. 123.

Parametro caratteristico : α	Parametro caratteristico : β
Reticolo spaziale <i>cubico</i>	Reticolo spaziale <i>romboedrico</i>
Anelli elettronici (Stoner) :	Anelli elettronici :
K_2 L_8 M_{II} $N_{I\bar{3}}$ N_2	K_2 L_8 M_{18} N_{I-} N_{I-}
K_2 L_8 M_{18} N_{II} O_2	K_2 L_8 M_{18} N_{18} O_I
K_2 L_8 M_{18} N_{18} O_{II} P_2	K_2 L_8 M_{18} N_{32} O_{18} P_{I-}

in cui è variabile il numero di schermo esterno (β), perchè all'aumento progressivo del n. a. corrisponde l'aggiunta di un elettrone nell'anello periferico, e gruppo, in cui è variabile il numero di schermo interno (α), perchè l'aumento del n. a. procede per mezzo dell'aggiunta di un elettrone in un anello interno, mentre il periferico contiene un numero fisso di elettroni. Il primo si distingue per la differenziazione nelle proprietà chimiche; nel secondo manca il carattere differenziale periferico, e subentrano invece proprietà fisiche singolari, come ferromagnetismo, ioni colorati, ecc.

2. Le proprietà elastiche tendono a manifestare nei due casi comportamento differente, con relazioni caratteristiche per ciascun gruppo.

Limitandosi ai soli grandi periodi, al PRIMO GRUPPO bisogna attribuire gli elementi:

da 30 Zn a 34 Se ($K_2 L_8 M_{18} N_{1-f}$)
 » 48 Cd » 52 Te ($K_2 L_8 M_{18} N_{18} O_{1-f}$)
 » 80 Hg » 84 Po ($K_2 L_8 M_{18} N_{32} P_{1-f}$).

Se si indica con:

Z — numero atomico,
 α — » di schermo interno,
 β — » » » esterno,
 γ — » » » molecolare,

il gruppo resta determinato dai parametri: Z progressivamente crescente; α variabile col periodo e costante entro il periodo, perchè destinato per valutare le azioni repulsive degli elettroni interni; β variabile entro il periodo, perchè introdotto per valutare le azioni repulsive degli elettroni esterni; γ variabile nel senso di β dovendo individuare l'influenza del reticolo cristallino. In sostanza α può considerarsi come il parametro del nocciolo, β come il parametro dell'anello periferico, γ come il parametro del reticolo spaziale. Tutto il gruppo si distingue per il *reticolo spaziale romboedrico*.

Per le *proprietà elastiche* è da osservare che, pur tenendo presente che ai coefficienti di elasticità, per le grandi differenze che presentano in seguito all'impurezza o alterazioni peculiari del campione, si deve attribuire il significato di valore medio e non di valore singolare, nei limiti dell'elasticità perfetta, si possono dedurre, in base al materiale sperimentale disponibile, le seguenti relazioni:

L'elasticità di forma, di volume e la trazione sono funzioni progressive del numero atomico: le relazioni sono di semplice proporzionalità, e il prodotto del modulo per il numero atomico costituisce una costante caratteristica del gruppo.

Dai valori tabellari ⁽¹⁾ si ricava pertanto:

Elemento	Modulo di compres- sibilità $c \times 10^8$	$\frac{c}{Z} \times 10^8$ (C. G. S.)	Modulo di rigidità $\mu \times 10^8$	$\mu Z \times 10^8$ (C. G. S.)	Modulo di Young $E \times 10^8$	$EZ \times 10^8$ (C. G. S.)
30 Zn	3500	117	3400	102×10^3	9000	2.7×10^5
48 Cd	4120	86	2450	118×10^3	5000	2.4×10^5
50 Sn	5000	100	2000	100×10^3	5000	2.5×10^5
83 Bi		36	1240	103×10^3	3200	2.65×10^5
Costante del gruppo:		Costante del gruppo:		Costante del gruppo:		
$10^2 \times 10^{-8}$		$106 \times 10^3 \times 10^{-8}$		$2.6 \times 10^5 \times 10^{-8}$		

Le tre forme fondamentali dell'elasticità verrebbero così riassunte nelle relazioni:

- (1) $\frac{c}{Z} = 10^2 \times 10^{-8}$ (C. G. S.) per l'elasticità di volume;
- (2) $\mu Z = 10^5 \times 10^{-8}$ (C. G. S.) per l'elasticità di forma;
- (3) $EZ = 2.6 \times 10^5 \times 10^{-8}$ (C. G. S.) per la trazione.

Per quanto dedotte da un numero limitato di elementi, le (1), (2), (3) acquistano in sicurezza per il fatto che i dati sperimentali si riferiscono a elementi appartenenti a periodi diversi. Di più, l'attendibilità delle relazioni viene sostenuta dal valore molto buono che risulta per il coefficiente di Poisson (σ). Dalle (2) e (3) si ottiene:

$$\mu = \frac{E}{2.6} = \frac{E}{2(1 + 0.3)} = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

con $\sigma = 0.3$, in buon accordo coi risultati sperimentali.

Partendo dalle (1), (2), (3), si possono trarre delle interessanti conclusioni circa i rapporti reciproci fra le diverse deformazioni.

a) In tutto il sistema periodico il coefficiente di rigidità supera quello della trazione.

Ciò si deduce dal fatto che

$$(a) \quad \mu = \frac{E}{2.6}; \text{ quindi } \mu < E \text{ oppure } \frac{1}{\mu} > \frac{1}{E}.$$

(1) Costanti fisiche di ABRAHAM e SACERDOTE, 1913, p. 171.

b) La compressibilità presenta dei punti di inversione rispetto a μ ed E.

$$(b) \quad c = \frac{\mu Z^2}{10^3} \dots \text{ punto di inversione per } Z = 31;$$

$$(c) \quad c = \frac{EZ^2}{2.6 \times 10^3} \dots \text{ punto di inversione per } Z = 52.$$

Il coefficiente di compressibilità supera quello di rigidità per gli elementi leggeri di n. a. < 31 e supera il coefficiente di trazione fino al n. a. $= 52$. In complesso la compressibilità prevale per gli elementi di basso peso atomico, fino a ca. $\frac{1}{3}$ del sistema periodico; dopo diventa prevalente l'elasticità di forma.

Se ne deduce che in tutto il sistema periodico, a partire da $Z = 32$, le deformazioni elastiche procedono in modo da indicare che *col crescere del n. a. i legami di simmetria diventano meno saldi*.

3. Il SECONDO GRUPPO è determinato dai parametri: Z progressivamente crescente; α variabile col n. a.; β costante per tutto il gruppo; γ funzione del n. a. Per tutti gli elementi del gruppo risulta il reticolo *spaziale cubico*.

Vi appartengono gli elementi:

21Sc 22Ti 23Va 24Cr 25Mn 26Fe 27Co 28Ni ($K_2 L_{18} M_{11-18} N_2$)
 39Y 40Zr 41Nb 42Mo 43Ma 44Ru 45Rh 46Pd ($K_2 L_{18} M_{18} N_{11-18} O_2$)
 71Cp 72Hf 73Ta 74W 75— 76Os 77Ir 78Pt ($K_2 L_{18} M_{18} N_{18} O_{11-18} P_2$).

Per quanto i dati sperimentali⁽¹⁾, che riportiamo nell'annessa tabella, sono da considerarsi qui ancora più limitati del caso precedente, perchè il gruppo comprende un numero maggiore di elementi, tuttavia, con grossolana approssimazione, pare che per l'elasticità di trazione sia ancora soddisfatta *la legge di proporzionalità al n. a.*

Infatti, escludendo gli elementi Pd, Ta e Pt, per il modulo di Young resta soddisfatta la relazione:

$$(4) \quad \frac{E}{Z} = 700 \times 10^{-8} \text{ (C. G. S.)}$$

dove la costante del gruppo si riporta ai valori sistematici (Fe, Ni, Rh, Ir), mentre quelli esclusi non accennano andamento nè sistematico, nè periodico.

Per le due forme di elasticità semplice è difficile di formulare un giudizio, visto l'insufficienza di risultati sperimentali; però, l'insieme dei valori sembra di accennare ad andamento piuttosto periodico che progressivo, con valori presso a poco costanti per tutto il gruppo, il che sarebbe conforme al concetto fondamentale di struttura identica della cinta esterna.

(1) Costanti fisiche di ABRAHAM e SACERDOTE, 1913, p. 171.

Elemento	Modulo di Young $E \times 10^8$	E $\bar{Z} \times 10^8$ C. G. S.	Modulo di rigidità $\mu \times 10^8$	Modulo di compressibilità $c \times 10^8$
26 Fe	20000	770	8000	20000
28 Ni	22000	790	8000	17000
45 Rh	28000	620	—	—
46 Pd	11000	—	5000	17000
73 Ta	18600	—	—	—
77 Ir	53000	690	—	—
78 Pt	17000	—	6500	24000
	Costante del gruppo: 700×10^{-8} (C. G. S.)		Valore medio: 7000	Valore medio: 20000

Si è così indotti a ritenere che, per questa categoria di elementi, l'elasticità semplice è veramente una proprietà esterna dell'atomo, mentre l'elasticità composta è legata alla struttura dell'interno atomico.

Circa le relazioni reciproche fra le diverse deformazioni, si è indotti a ritenere, in base alle costanti dedotte per il gruppo, che i valori maggiori raggiunge il coefficiente di rigidità, quello di compressibilità è all'incirca tre volte minore, quello di trazione tende per gli elementi pesanti a diventare nullo. Tutto procede in modo da indicare che *col crescere del n. a. si rinforzano i legami di simmetria.*

4. Riassumendo, le costanti elastiche, calcolate per mezzo delle (1), (2), (3), (4), restano inquadrare fra i limiti:

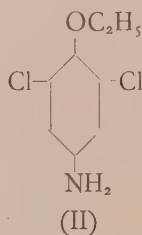
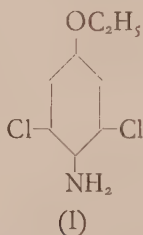
Gruppo esterno. — Reticolo romboedrico				Gruppo interno. — Reticolo cubico			
Elementi	$E \times 10^8$ (C. G. S.) (2.6×10^5)	$\mu \times 10^8$ (C. G. S.) (105)	$c \times 10^8$ (C. G. S.) (102)	Elementi	$E \times 10^8$ (G. G. S.) (7×10^2)	$\mu \times 10^8$ (C. G. S.) —	$c \times 10^8$ (C. G. S.) —
da 30 Zn	8700	3500	3000	da 21 Sc	14000	7000	20000
a 34 Se	7600	3100	3400	a 28 Ni	20000		
da 48 Cd	5400	2200	4800	da 39 Y	27000		
a 52 Te	5000	2030	5200	a 46 Pd	32000		
da 80 Hg	—	—	8100	da 71 Cp	50000		
a 83 Bi	3100	1255	8400	a 78 Pt	55000		

I risultati si presentano interessanti, perchè indicano una legge di carattere assai generale per tutti i fenomeni dell'Elasticità.

Conclusioni. — Le costanti elastiche si manifestano nell'insieme come funzioni progressive del numero atomico; soltanto le due forme di elasticità semplice accennano, per gli elementi del gruppo interno, a comportamento periodico.

Chimica. — *Sulla 2-5-bicloro-fenetidina* ⁽¹⁾. Nota di G. BARGELLINI e LYDIA MONTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Reverdin e Düring ⁽³⁾ facendo agire il cloro nascente sulla fenacetina sciolta in acido acetico glaciale, ottennero una bicloro-fenacetina dalla quale per saponificazione ebbero la bicloro-fenetidina corrispondente. Essi non stabilirono però la posizione che occupano i due atomi di cloro nella molecola di questa bicloro-fenetidina. Dopo aver dimostrato in due Note precedenti ⁽⁴⁾ la costituzione della bicloro-fenetidina di Jaeger (3-5-bicloro-fenetidina della formula I) e della bicloro-fenetidina che si può ottenere dal 2-6-bicloro-4-ammino-fenolo di Kollrepp (2-6-bicloro-fenetidina della formula II)



volemmo preparare alcuni derivati della bicloro-fenetidina di Reverdin e Düring adatti per caratterizzarla meglio e specialmente ci sembrò interessante fare qualche ricerca per stabilire la posizione dei due atomi di cloro nella sua molecola.

La sua costituzione fu facilmente svelata trasformandola nel bicloro-ammino-fenolo corrispondente (formula IV) ed ossidando poi questo con acido cromico. Poichè si forma il 2-5-bicloro-chinone (formula V) contenente i due atomi di cloro in posizione para fra loro, la bicloro-fenetidina

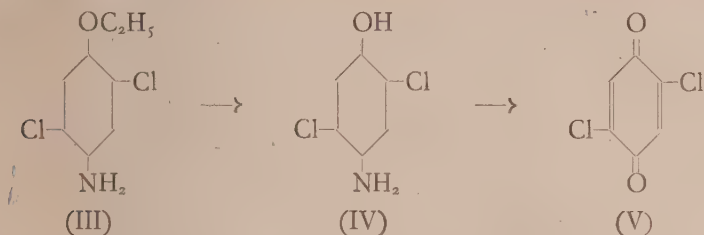
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(3) REVERDIN e DÜRING, « Ber. » 32, 154 (1899).

(4) G. BARGELLINI e P. LEONE. Questi « Rendiconti » 1928, e BARGELLINI, Questi « Rendiconti » 1928.

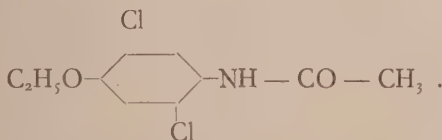
di Reverdin e Düring non può essere altro che la 2-5-bicloro-fenetidina (formula III):



È importante notare che mentre il primo atomo di cloro entra nella fenacetina in posizione orto al gruppo — OC₂H₅, (come dimostrarono gli stessi Reverdin e Düring) il secondo atomo di cloro entra invece in posizione orto al gruppo — NH—CO—CH₃, e in posizione para all'atomo di cloro già presente.

PARTE SPERIMENTALE

2-5-BICLORO-FENACETINA.



Fu preparata col metodo indicato da Reverdin e Düring (loc. cit. [3]) sciogliendo gr. 10 di fenacetina in 56 cc. di acido acetico glaciale, aggiungendo alla soluzione gr. 6 di clorato di sodio sciolto in poca acqua e versando poi tutto in una volta cc. 25 di HCl concentrato nel liquido raffreddato. Il liquido diventa rosso e la reazione avviene con svolgimento di calore, onde conviene raffreddare esternamente con una corrente di acqua e agitare continuamente: dopo pochi minuti comincia a separarsi una sostanza cristallina giallastra. Dopo 10-20 minuti si aggiungono circa 200 cc. di acqua e si filtra dopo qualche ora il precipitato cristallino formatosi, lavandolo bene con acqua. Facendo cristallizzare più volte dall'alcool bollente si riesce a separare la bicloro-fenacetina in cristalli incolori che fondono a 162°, mentre nelle acque madri rimane disciolta un po' di mono-cloro-fenacetina, fusibile a 132°, che sempre si forma in quantità maggiore o minore.

La bicloro-fenacetina che così si ottiene presenta tutti i caratteri della bicloro-fenacetina descritta da Reverdin e Düring.

	Trovato	N % 5.92	Cl % 28.56
per C ₁₀ H ₁₁ Cl ₂ O ₂ N	Calcolato	N % 5.64	Cl % 28.62

Nell'acido solforico concentrato si scioglie dando una soluzione incolore.

2-5-BICLORO-FENETIDINA. (Formula III). — Per saponificare il gruppo acetilico della bicloro-fenacetina e trasformarla nella corrispondente bicloro-fenetidina, si riscalda all'ebollizione per circa 3 ore con 10 parti di HCl concentrato in un palloncino munito di refrigerante a ricadere. Si diluisce infine con acqua e si neutralizza con soluzione di ammoniacca. Si deposita la bicloro-fenetidina che viene purificata facendola distillare in corrente di vapor d'acqua e cristallizzandola infine dall'alcool diluito. Si ha così in prismi bianchi fusibili a 64° che presentano tutti i caratteri descritti da Reverdin e Düring. È poco solubile nell'acqua, facilmente solubile nell'alcool, acido acetico, etere, benzolo.

	Trovato	N % 6.98	Cl % 34.20
per $C_8H_9Cl_2ON$	Calcolato	N % 6.80	Cl % 34.46

Il picrato cristallizza dall'alcool in lunghi aghi gialli fusibili a 148°-150°.

2-5-BICLORO-P-AMMINO-FENOLO. (Formula IV). — Si ottiene riscaldando gr. 10 di bicloro-fenacetina con 70 cc. di acido iodidrico ($d = 1.70$) in palloncino con refrigerante a ricadere. Dopo 6 ore di ebollizione si getta in acqua contenente un po' di solfito di sodio e poi si neutralizza con ammoniacca. Si deposita il bicloro-ammino-fenolo in fiocchi bianchi. Se si cerca di cristallizzarlo dall'acqua bollente, si altera diventando rosso e poi nero. Anche più rapidamente si altera lasciando all'aria la sua soluzione alcalina. Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'etere e nell'acido acetico, pochissimo nel cloroformio. Si purifica sciogliendolo nel benzolo bollente: per raffreddamento si deposita in cristallini bianchi fusibili a 178°-179°.

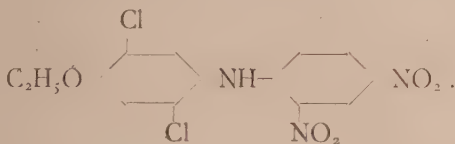
	Trovato	N % 8.06	Cl % 39.62
per $C_6H_5Cl_2ON$	Calcolato	N % 7.86	Cl % 39.88

2-5-BICLORO-CHINONE. (Formula V). — Sciogliendo il bicloro-ammino-fenolo sopra descritto in acido solforico diluito ed aggiungendo una soluzione di bicromato di potassio, si deposita il 2-5-bicloro-chinone. Si filtra, si lava e si purifica facendolo distillare in corrente di vapore. Squamette gialle fusibili a 161°, come il 2-5-bicloro-chinone che per confronto abbiamo preparato dal chinone col metodo indicato da Levy e Schultz⁽¹⁾. Una miscela dei due prodotti fonde alla stessa temperatura 161°.

(1) LEVY e SCHULTZ, A, 210, 138 (1881).

DERIVATI DELLA 2-5-BICLORO-FENETIDINA.

Condensazione con cloro-2-4-dinitro-benzolo-

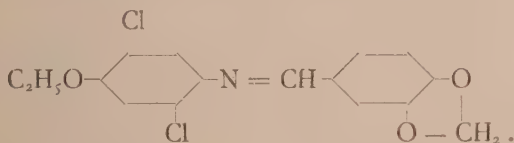


Si riscaldano gr. 3 di bicloro-fenetidina con gr. 2 di cloro-dinitro-benzolo, gr. 2 di acetato sodico e cc. 20 di alcool. Dopo 3 ore di ebollizione a bagno-maria si aggiunge acqua e si fa distillare in corrente di vapore per eliminare l'alcool e l'eccesso di cloro-dinitro-benzolo inalterato. Si filtra il prodotto rosso insolubile nell'acqua che resta nel palloncino e si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool. Cristallini rossi che fondono a 136°-138°.

	Trovato	N %	11.23	Cl %	18.80
per $C_{14}H_{11}Cl_2O_5N_3$	Calcolato	N %	11.29	Cl %	19.08

È insolubile nell'acqua, facilmente solubile nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo a caldo.

Condensazione con piperonalio-



Gr. 3 di bicloro-fenetidina e gr. 2 di piperonalio sciolti in poco alcool si riscaldano per 3 ore a bagno-maria con refrigerante a ricadere. Per raffreddamento si separa il prodotto di condensazione che si purifica facendolo cristallizzare di nuovo dall'alcool bollente. Aghetti bianchi giallognoli fusibili a 148°.

	Trovato	N %	4.45	Cl %	21.15
per $C_{16}H_{13}Cl_2O_3N$	Calcolato	N %	4.14	Cl %	21.00

È insolubile nell'acqua, solubile nell'alcool, nell'acido acetico e anche più facilmente nel benzolo anche a freddo. Nell'acido solforico concentrato si scioglie dando una soluzione di colore giallo.

Chimica. — *Un nuovo procedimento per colorare le cellule gliali.*
Nota di R. ALTSCHUL, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. DIONISI.

Dopo i lavori della Scuola di Cajal sulla impregnazione della glia, pare ormai sicuro che il bromuro sia un mordenzatore specifico della glia stessa e non che agisca, come prima si credeva, quale fattore chimico nel formare il bromuro di argento. Avvalorano questo concetto quei recenti metodi i quali, senza servirsi di impregnazione argentea o aurea, si servono del bromuro come mordenzatore prima della colorazione, come sarebbero i metodi di Snessareff e di Vimtruff.

Ho creduto opportuno di provare il mordenzatore bromico nel metodo classico di Weigert per la colorazione della glia fibrosa.

È conosciuta la labilità di questo metodo che spesso non riesce senza che si possa trovarne la ragione. Spielmeyer stesso, il quale nell'edizione del 1911 della sua tecnica istologica insisteva sulla costante riuscita del metodo di Weigert, qualora siano state osservate rigorosamente tutte le prescrizioni, ammette nel 1921 che il metodo di Holzer sarebbe molto più sicuro del processo di Weigert per la colorazione della glia.

Io non soltanto sono riuscito a cambiare con successo il mordenzatore del Weigert e ad omettere la riduzione col cromogeno, ma ho potuto accertarmi che la colorazione stessa è d'influenza minore sull'esito, come pure il trattamento con la soluzione jodo-iodurata. Infatti ho avuto gli stessi risultati con la soluzione violetto di metile acido ossalico, prescritta per il Weigert, come pure con la soluzione di bleu de Victoria, indicata dal Lhermitte, Merzbacher ed altri per i loro metodi.

Inoltre sono riuscito, servendomi sia della soluzione di joduro di potassio, satura di joduro puro, come pure servendomi di liquidi di Lugol molto più deboli.

Il mio procedimento è il seguente:

Pezzi di sostanza nervosa dalla formalina (o dall'alcool). Inclusioni nella paraffina. Tagli di circa 12 μ . Applicare le singole sezioni col metodo capillare. Asciugare nella stufa a 37°. Deparaffinare. Mordenzare 4 ore nel liquido seguente:

Acqua distillata	ccm.	100
Acido idrobromico	»	2
Bromuro di ammonio.	gr.	2

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

Due brevi lavaggi in acqua distillata. Colorazione col violetto di metile (soluzione alcoolica di violetto di metile a saturazione preparata a caldo cc. 100 + cc. 5 di acido ossalico al 5 %) durante un'ora o col bleu de Victoria in soluzione acquosa al 2 % (in questo caso il preparato attaccato sul vetrino deve essere riscaldato alla fiamma di gas dopo averci messo un po' di liquido colorante). Si butta via l'eccesso di liquido, si asciuga con carta bibula, si lava brevemente con soluzione di Lugol e si asciuga di nuovo. In seguito differenziazione con xilolo-olio di anilina aa. Infine lavaggio in xilolo puro e inclusione in balsamo.

Con questo mio procedimento si riesce a mettere in evidenza la glia marginale, la glia fibrosa ed i suoi rapporti coi vasi, e ciò con una sicurezza maggiore che con il metodo di Weigert. Inoltre offre il vantaggio di essere un procedimento più semplice e di poter procedere alla mordenatura su singole sezioni.

Geologia. — *La fauna dei tufi vulcanici giuresi di Roccapalumba in Sicilia* ⁽¹⁾. Nota preventiva di C. RUIZ, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. R. FABIANI.

L'esistenza di un apparato eruttivo del Giurese medio veniva per la prima volta segnalata in una comunicazione del prof. R. Fabiani ⁽³⁾ all'Associazione Mineraria Siciliana nel dicembre del 1926. I resti di tale apparato si trovano lungo la valle del fiume Torto presso la stazione di Roccapalumba in provincia di Palermo e sono rappresentati da lave basiche, più o meno profondamente alterate che, sotto forma di filoni e di piccole colate, in parte s'insinuarono fra le spaccature, in parte coprirono i banchi di calcare a Crinoidi del Giurese medio, e da tufi fini e grossolani che formarono, come si può bene osservare nel colle che sorge dietro il primo casello ferroviario a nord della stazione di Roccapalumba, un grosso deposito coperto a sua volta da altri calcari, anch'essi del Giurese medio, includenti frammenti della sottostante roccia eruttiva (vedasi nella Nota del Fabiani ⁽⁴⁾ lo spaccato della collina più settentrionale, regione Le Rocche, sulla sinistra del Torto). I tufi che stanno a contatto coi banchi calcarei inferiori sono di un color verdolino tendente al giallo o al bruno, hanno grana grossa e racchiudono una ricchissima fauna marina; quelli invece che

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(3) FABIANI R. *Scoperta di un apparato eruttivo del Giurese medio in Sicilia* (con 1 fig. intercalata e 1 tavola), «Boll. Ass. Mineraria Siciliana», n. 9, Palermo, 1926.

(4) FABIANI, loc. cit., p. 7.

stanno sopra hanno color verde cupo, grana assai più fina, sono stratificati e non contengono resti fossili.

Il prof. Fabiani aveva fatto un primo studio della fauna determinandone alcune specie, in base alle quali aveva riferito la formazione al Bajociano (Dogger medio); ma poichè restava altro materiale, e altri fossili venivano trovati in successivi scavi, egli volle affidarmi lo studio e l'illustrazione dell'intera fauna. Nell'accingermi a riferire brevemente i risultati del lavoro, ormai pressochè ultimato, mi è caro esprimere all'illustre Maestro i miei sentiti ringraziamenti per i consigli e l'aiuto di cui mi fu largo.

Premetto che la determinazione dei fossili presentò notevole difficoltà per il cattivo stato di conservazione e per la grandissima fragilità dei gusci.

La svariata e ricchissima fauna è costituita soprattutto di Molluschi (pochi Gasteropodi, abbondantissimi Lamellibranchi, scarsi resti di Cefalopodi), rari Coralli semplici, tre o quattro piccoli Brachiopodi, numerosi articoli del fusto di Crinoidi (gen. *Pentacrinus* e *Millecrinus*), Echinidi, resti indeterminabili di Crostacei e avanzi, anch'essi indeterminabili, di vegetali. Dei Lamellibranchi sono frequentissime le Trigonie e i *Pecten*.

Ecco l'elenco delle specie finora determinate:

Nerinea aff. *N. triplicata* Voltz.

Ostrea (*Alectryonia*) *costata* Sow.

Pecten cingulatus Phil.

» *demissus* Phil.

» *vagans* Sow.

Chlamys semicostata Morris e Lyc. em.

Pteroperna bajociensis Grepp.

» cfr. *costatula* Deslong.

» *pygmaea* Koch e Dunk

» *Jarbas* D'Orb.

Pinna cancellata Bean.

Trigonia hemisphaerica Lyc.

» *Gadoisi* Cossm.

Astarte cfr. *Thoas* D'Orb.

Sphaera (*Corbis*) *Madridi* D'Arch.

Anatina cfr. *Aegea* D'Orb.

Isocyprina? cfr. *dolabra* Phil. in Cossm.

» cfr. *dolabra* Ph.

» cfr. *depressiuscula* Morris e Lyc.

» *Jurensis* Gold.

Anisocardia rostrata Sow.

» *nitida* Phil.

» cfr. *minima* Sow.

Pseudotrapezium Lebrunianum D'Orb.

Oppelia subradiata Sow.

Stephanoceras humphriesianum Sow.

Millecrinus Pepini De Lor.

» *exilis* De Lor.

» specie N. 2 del De Loriol.

Pentacrinus cristagalli Quenst.

» *bajocensis* D'Orb.

Confrontando queste specie con quelle dei giacimenti tipici italiani, inglesi e soprattutto francesi, risulta con sicurezza che la fauna dei tufi di Roccapalumba appartiene al Giurese medio (Dogger) e con tutta probabilità, se si vuol dare valore cronologico preminente alle due specie caratteristiche di Ammoniti - *Oppelia subradiata* Sow. e *Stephanoceras humphriesianum* Sow. - al Bajociano (Dogger medio), come aveva ritenuto fin dal principio il prof. Fabiani. Comunque, il giacimento di Roccapalumba ha anzitutto una grande importanza in linea generale, essendo uno dei rarissimi esempi in Europa di un deposito piroclastico fossilifero del Giurese. Nel caso particolare poi della Sicilia, esso si può considerare il secondo (dopo quello del M. S. Giuliano che appartiene però a un livello più antico) finora rinvenuto nell'Isola, che racchiuda una fauna oltre che ricca, assai variata. Risulta infine interessante, perchè contiene un gran numero di specie mesogiurassiche prima d'ora non segnalate in Sicilia. Infatti delle specie sopra elencate solo quattro (*Oppelia subradiata* Sow., *Stephanoceras humphriesianum* Sow., *Pentacrinus cristagalli* Quenst., *Pent. bajocensis* D'Orb.) erano state rinvenute dal Seguenza ⁽¹⁾ e dal Di Stefano ⁽²⁾, e precisamente nella Sicilia orientale (Taorminese). Alcune specie sono nuove anche pel Dogger dell'Italia continentale.

Geofisica. — *Sulla definizione della gravità normale.* Nota di G. SILVA, pres. dal Socio C. SOMIGLIANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) SEGUENZA G. *Intorno al Giurassico medio (Dogger) presso Taormina*, Note I, II, III e IV, « Rendiconti » R. Accademia dei Lincei, Roma, 1887.

(2) DI STEFANO G. *Lettere sulla struttura geologica del Capo S. Andrea*, III, « Naturalista Siciliano », anno VI-VII, Palermo, 1887.

Batteriologia. — *Termobiosi e dissociazione microbica.* Nota di COSTANTINO GORINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. PIROTTA.

La termobiosi è altro capitolo di batteriologia in cui le mie ricerche hanno un'indubbia priorità.

Da quando Van Tieghem 1881 ⁽²⁾ fece conoscere l'esistenza di microbi capaci di vegetare a temperature elevate fin oltre i 70° C., si va studiando la termobiosi fra i batteri distinguendo due ordini di termobioti: i *termofili* propriamente detti, che possono svilupparsi a temperature superiori a quelle di coagulazione del protoplasma cellulare ordinario, cioè al di là dei 60° C., e i *termotolleranti* che possono svilupparsi solamente fino a 55-60° C., cioè a temperature non ancora mortali per il citoplasma.

I termofili possono a loro volta essere suddivisi in termofili assoluti (*autotermofili*) che non si sviluppano al di sotto di 37° C. e termofili facultativi (*mesotermofili*) che si sviluppano anche al di sotto di 37° C. Gli stenotermofili sono piuttosto rari nella letteratura; il primo fu isolato dall'acqua di fogna e dal suolo e descritto da Miquel (1879-1888) ⁽³⁾ sotto il nome di *Bacillus thermophilus* avente un intervallo termico da 40° a 70° C.; un secondo è stato isolato dal latte sterilizzato e descritto da me (gennaio 1894) ⁽⁴⁾ sotto il nome di *Bacillus lactis thermophilus*, avente un intervallo termico da 37° a 65° C.: sono due bacilli simili, entrambi sporulati a forma di picciridi, aerobi, grampositivi, non fondenti la gelatina, che nel brodo producono un intorbidamento leggero e una pellicola sottile liscia e fragile, e sull'agar danno colonie bianche, piccole, sottili, lisce a guisa di velamenti; però mentre il bacillo di Miquel è immobile e putrifico, il mio bacillo è mobile ed è fermento lattico coagulando il latte per acidità senza peptonizzazione, e costituendo il primo fermento lattico termofilo conosciuto ⁽⁵⁾.

In seguito sono apparsi i lavori ben noti di Leichmann ⁽⁶⁾, Flügge ⁽⁷⁾, Mac Fadyen et Blaxall ⁽⁸⁾, Dieudonne ⁽⁹⁾, Rabinowitsch ⁽¹⁰⁾, Weber ⁽¹¹⁾, Kar-

(1) Nella seduta dell'11 novembre 1928.

(2) «Bull. Soc. Bot.», France, 28, 1881, p. 35.

(3) «Ann. Obs. Montsouris, 1879; «Ann. Micrographie», 1, 1888, p. 3.

(4) «Giorn. R. Soc. It. Igiene», 16, 1894, n. 1, p. 5.

(5) Questo nome è in errore credendo che il suo *Thermobacillus lactophilus* sia il primo fermento lattico termofilo che si conosca («C. R. Ac. Sciences», 1928, 187, p. 67).

(6) «Landwirts. Versuchs-Stat», 43, 1894, p. 375.

(7) «Zeits. Hyg. Infect.», 17, 1894, p. 272.

(8) «Journ. Pat. Bact.», 3, 1894, p. 87.

(9) «Biol. Centralbl.», 15, 1895, p. 103.

(10) «Zeits. Hyg. Infect.», 20, 1895, p. 154.

(11) «Arb. Kais. Ges. Amt.», 17, 1900, p. 108.

linski⁽¹⁾ e di altri molti, che ignari della mia priorità, descrissero più o meno compiutamente parecchie specie di termobioti, per la maggior parte mesotermofili od anche semplicemente termotolleranti, come quelli studiati precedentemente nel suolo da Globig, il quale osservava che « dal punto di vista biologico sarebbe ancora più interessante se si riuscisse a dimostrare che lo sviluppo di questi bacilli non solamente è possibile, ma è *subordinato esclusivamente alle alte temperature* »⁽²⁾ come è precisamente il caso dello stenotermofilo di Miquel e del mio.

In questi ultimi anni l'argomento ha formato oggetto di una numerosa serie di lavori, in vista anche della sua importanza pratica (come io avevo preconizzato già nel 1894), sia nei processi autotermogeni (fieno, foraggi infossati nei silò, letame, tabacco, caffè, cacao, acque termali, ecc.), sia nei processi industriali che ricorrono alle elevate temperature (fabbricazione dei formaggi a pasta dura, del latte pastorizzato, sterilizzato, condensato e in polvere, delle conserve alimentari, ecc.), sia infine nelle fermentazioni intestinali. In tutti questi differenti ambienti sono stati incontrati termobioti di ogni sorta, la cui generalità, attraverso le spesso insufficienti descrizioni, mostra di appartenere al gruppo *Subtilis-Mesentericus*, onde si è indotti a pensare che bene spesso non si tratti di specie diverse, come vorrebbero gli AA., ma piuttosto di stipiti a termobiosi diversa di una medesima specie o di poche specie.

Nel corso delle mie ricerche⁽³⁾ sulle mutazioni fisiologiche per divergenze individuali delle cellule del mio acidoproteolito, il *Bacillus acidificans presamigenes casei*, che è precisamente una varietà di *B. Subtilis*, ho voluto apportare un contributo a questa questione, esaminando se per mezzo di culture termobiotiche si sarebbero ottenuti dei fenomeni di dissociazione microbica analoghi a quelli che ho ottenuto colla cultura rampicante⁽⁴⁾.

Per *cultura termobiotica* non intendo quella che si propone di raggiungere, di provocare un adattamento del germe alle temperature elevate, sibbene quella che si propone di ricercare, di stabilire se fra le sue cellule sonvene di più o meno termofili; a tal uopo io ho procurato di eliminare le cellule mesofile fin dalla prima generazione, sottoponendo di colpo le lattocolture appena seminate a differenti temperature, di cinque in cinque gradi, fra 50° e 70° C. per 24 ore e facendone in seguito dei passaggi quotidiani *conservati in permanenza alla medesima temperatura* senza raffreddamento intercalare, riscaldando anche lo stesso latte prima dell'inseminamento a quella data temperatura. Ho assoggettato alla prova complessivamente cento lattocolture appartenenti ai due tipi dissociati del bacillo, il tipo granuloso instabile (corrispondente al tipo S degli AA.) e il tipo fila-

(1) « Hygien. Rundschau », 5, 1895, p. 11.

(2) « Zeits. Hyg. Infect. », 3, 1888, p. 294.

(3) « Rend. R. Acc. Lincei », 30, 1921, p. 312.

(4) « Rend. R. Acc. Lincei », 7, 1928, p. 689.

mentoso stabile (corrispondente al tipo R degli AA.), impiegando sempre la medesima qualità di latte egualmente sterilizzato per tinalizzazione e allestendo trapianti di controllo a 37° e 30° C.

Ottenni i seguenti risultati. Fino a 55°–60° C. entrambi i tipi hanno dato luogo ad alcune culture termotolleranti (11 su 30) che si sviluppavano abbastanza rapidamente ma che resistevano solamente per 2–3 passaggi, dopo di che esse perdevano la loro azione sul latte e la loro vitalità se non erano trapiantate a temperature inferiori, a 37°–30° C. Ma al di sopra dei 60° C. soltanto il tipo granuloso ha dato luogo a culture (2 su 50) che hanno resistito per 12 passaggi quotidiani consecutivi senza indebolimento né degenerazione, salvo l'assenza di sporificazione la quale non si compieva che al di sotto dei 50° C., di guisa che le culture non potevano essere conservate lungo tempo vitali a temperature elevate; è ciò che io avevo osservato anche nel mio *Bacillus lactis thermophilus*. Inoltre le culture presentavano una sensibile modificazione nelle proprietà fermentative, nel senso che, in conformità alle mie antiche osservazioni (1897)⁽¹⁾, a temperatura elevata vi era un'accentuazione della facoltà acidificante (la quale aumentava da 2 a 2.8–3 cmc. di soluzione normale di soda per 100 cmc. di latte nelle 24 ore) e una attenuazione della facoltà proteolitica, la quale però non era mai soppressa, conservandosi adunque sempre acidoproteolitiche. Queste due culture trapiantate a 37°–30° C. hanno mostrato di svilupparsi ancora, ma con un ritardo di 6–8 giorni in confronto alla cultura madre; esse erano adunque degli stipiti mesotermofili durevoli che, sotto l'apparenza di una mutazione improvvisa, erano derivati per dissociazione microbica di una specie mesofila. A questo proposito io ritengo che parecchi stenotermofili degli AA. si rivelerebbero mesotermofili qualora venissero tenuti più a lungo in cultura in condizioni appropriate di nutrimento, di umidità, ecc.; ad es. le culture su agar comunemente impiegate dagli AA., presentano l'inconveniente di un troppo precoce disseccamento per un'osservazione sufficientemente prolungata a temperatura elevata.

Conclusioni. — Mediante la cultura termobiotica ho ottenuto la dissociazione di una specie mesofila del gruppo *Subtilis*, per cui le sue cellule hanno mostrato divergenze individuali consistenti:

1° in una termotolleranza transitoria, che è diffusa a parecchie cellule della specie intera;

2° in una mesotermofilia durevole, che è limitata ad un numero ristretto di cellule appartenenti al tipo instabile della specie.

Di conseguenza, poichè i due tipi della specie, lo stabile e l'instabile, corrisponderebbero a stadi differenti del suo ciclo evolutivo, è presumibile che la termotolleranza e ancora più la termofilia siano riservate a cellule

(1) « Boll. Uff. Ministero Agricoltura », 1897, vol. IV.

che si trovano in un certo grado di germinazione, in uno stato particolare del protoplasma (stato di giovinezza del tipo instabile-granuloso S?).

Ora, considerando la grande diffusione del gruppo *Subtilis*, si può ben giustificare la comparsa di stipiti termobiotici per dissociazione spontanea in tutti i sopraccennati processi termogeni, senza bisogno di ammettere la presenza di specie termobiotiche particolari chiuse. Ricorderò a questo riguardo che per l'appunto il mio *B. acidificans presamigenes casei* s'incontra sia nei formaggi cotti ad alta temperatura da 50-55 a 58° C. (formaggi Grana, Emmenthal, ecc.), sia nei foraggi infossati nei silò che raggiungono i 70° C.

Vi è dunque modo di semplificare la nomenclatura dei termobioti, che va diventando complicata ed anche caotica, specialmente dopo la proposta americana (Bergey⁽¹⁾) di classificarli in base ai loro limiti termici del *minimum-optimum-maximum*, ciò che mi sembra del tutto arbitrario in causa della loro variabilità secondo l'origine, il substrato, la durata di osservazione e altresì secondo la fase di evoluzione non solo vegetativa o sporale, ma anche giovanile o adulta, di instabilità o di stabilità.

L'importanza pratica di queste conclusioni è abbastanza evidente; troppo lungo sarebbe mettere qui in luce tutte le svariate questioni che interessano vuoi l'igiene alimentare, vuoi l'economia rurale. Mi limiterò a toccarne una di grande attualità che concerne il metodo moderno di pastorizzazione del latte a 63°-65° C. per mezz'ora; in base alle mie ricerche questo metodo si presta particolarmente alla dissociazione termobiotica dei bacilli del gruppo *Subtilis-Mesentericus*, i quali, per i loro prodotti, anche se non arrivano ad alterare visibilmente il latte, sono lungi dall'essere inoffensivi soprattutto per i bambini (Flügge). Sotto questo punto di vista sarebbe dunque preferibile una pastorizzazione a temperatura più alta ma più breve.

Le mie ricerche spiegano eziandio i casi abbastanza numerosi in cui il latte pastorizzato presenta una carica microbica più ricca che prima della pastorizzazione, particolarmente quando non è raffreddato immediatamente (bottiglie Thermos, ecc.); in tali condizioni non avvi a paventare solamente una germinazione delle forme termoresistenti (spore, cocci, quali il *mammococcus* G., ecc.⁽²⁾), ma soprattutto e innanzitutto una pullulazione selezionata di termobioti, quali il *B. lactis thermophilus* G. e gli stipiti termobiotici del gruppo *Subtilis-Mesentericus*.

Assurgendo poi a idee di indole generale le presenti ricerche si aggiungono alle mie precedenti sulle divergenze individuali nel biochimismo⁽³⁾ e nel potere rampicante⁽⁴⁾ delle cellule di una medesima specie acidoproteolitica per recare un altro contributo alla dottrina della eterogeneità fisiologica delle specie batteriche.

(1) BERGEY, « Journ. Bact. », 4, 1919, p. 301; *Manual of Determinative Bacteriology*, 1923.

(2) « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 48, 1915, p. 956.

(3) « Rend. R. Acc. Lincei », 1921, 30, p. 312.

(4) « Rend. R. Acc. Lincei », 1928, 7, p. 689.

Fisiologia vegetale. — *Fluorescenza di succhi vegetali ai raggi ultravioletti filtrati*⁽¹⁾. Nota di G. TESTI DRAGONE, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

In una precedente Nota⁽³⁾ ho riportato i risultati dell'esame ai raggi ultravioletti (lampada Hanau, filtro « uviol ») del lattice di piante appartenenti a diverse famiglie; questi succhi hanno spesso bellissime fluorescenze, a volte luminescenze. Ho creduto interessante di estendere le mie osservazioni alle sostanze resinose ed agli olii essenziali, limitando per ora il mio studio alle resine delle Conifere ed all'olio essenziale del pericarpo di Agrumi.

I risultati dell'esame ai raggi di 3650 U. A. circa formano l'oggetto del presente lavoro.

I. — RESINE DI CONIFERE.

Le resine sono generalmente prodotti vegetali contenuti in idioblasti oppure in canali o lacune resinifere. Le piante che producono resine appartengono ai più svariati gruppi, di cui però il più importante è quello delle Conifere. Ho limitato per ora il mio studio ad un piccolo numero di esse, che crescono bene nel nostro Orto Botanico. Ho raccolto le goccioline di resina ottenute tagliando i rami piuttosto giovani, o gli assi fiorali, o le foglie carpellari di queste piante, su striscioline di carta da filtro, come ho fatto già nei miei precedenti lavori sui latici⁽³⁾ e sul clorocroma⁽⁴⁾. Esse furono da me lasciate disseccare all'aria, e dopo qualche ora esaminate ai raggi ultravioletti filtrati.

Le resine mi dettero fluorescenze o luminescenze di diverso colore; esse furono:

azzurre splendenti in:

Cunninghamia sinensis R. Br., *Cupressus sempervirens* L., *Pinus Pinea* L.;

azzurro chiaro splendente in:

Podocarpus macrophylla D. Don, *P. nereifolia* D. Don;

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(3) TESTI DRAGONE G., *Fluorescenza di succhi vegetali ai raggi ultravioletti filtrati*. « Annali di Botanica », 1928.

(4) TESTI DRAGONE G., *Contributo allo studio della fluorescenza del clorocroma ai raggi ultravioletti*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », 1927.

azzurro abbastanza splendente in :

Sequoia gigantea Lindl., *S. sempervirens* Endl.;

azzurro debole in :

Araucaria Bidwillii Hook., *Cedrus Libanotica* Lk., *Cupressus pisifera* C. Koch var. *filiifera*, *Pinus Banksiana* Lamb., *P. edulis* Endl., *P. Montezumae* Lamb., *P. Laricio* Poir., *P. silvestris* L., *P. strobus* L., *Thuya orientalis* L., *Torreya grandis* Fortune;

azzurro verdognolo debole in :

Podocarpus andina Poepp., *P. Meyeriana* Endl.;

azzurro molto debole in :

Cupressus funebris Endl., *C. sempervirens* L. var. *globulifera*, *Juniperus chinensis* L., *J. drupacea* Labill., *J. Oxycedrus* L., *J. virginiana* L.;

biancastra debole in :

Picea excelsa Link, *Pinus Pumilio* Haenke, *P. Sabiniana* Dougl.;

viola debole in :

Cupressus obtusa C. Koch, L. var. *aurea*;

verdastra debole in :

Pinus excelsa Wall., *Thuya dolabrata* L.;

verdastro sporco molto debole in :

Abies Nordmanniana Spach., *Cupressus Lindleyi* Klotzsch;

verdastro bruniccio debole in :

C. sempervirens L. var. *horizontalis*;

brunicea in :

Cupressus Lawsoniana Andr. Murr. *sempervirens* L. var. *indica* Willd., *Cryptomeria japonica* D. Don, *Thuya gigantea* Nutt.;

giallo vivo in :

Cupressus guadalupensis S. Watt. (resina già vecchia del tronco);

gialla abbastanza splendente in :

Cephalotaxus drupacea Sieb.;

giallo debole in :

Cedrus Deodara Laws.

Da quanto ho esposto si vede che le resine hanno ai raggi ultravioletti filtrati (3650 U. A. circa) fluorescenze generalmente azzurre più o meno chiare, raramente splendenti, talora verdastre, tal'altra brunice, secondo la loro diversa composizione chimica.

Poco si sa circa il significato biologico di questi prodotti di secrezione, che non hanno impiego diretto, per quanto si conosce fino ad ora nel ricambio delle piante, e che nel corpo stesso dei vegetali iniziano, come osserva il Dieterich⁽¹⁾, quei processi di ossidazione, che si completano quando queste sostanze vengono a contatto dell'aria.

(1) DIETERICH, « Helffenberger's Annalen », 1896.

Esse però non sono inutili; è noto infatti, che oltre ad avere un'azione antisettica, esse sgorgando fuori, e col divenire a contatto dell'aria solide (resine pure), o vischiose (oleoresine), chiudono prontamente le ferite, favorendone la cicatrizzazione.

Ma possiamo anche aggiungere, che esse difendono le parti che le producono dalle radiazioni ultraviolette invisibili e nocive, trasformandole in radiazioni di lunghezza d'onda maggiore non più dannose; quest'ultima funzione però, essendo generalmente queste piante boschive, viene ad essere di limitata importanza, come del resto ci è confermato dal fatto che le fluorescenze, o più spesso le luminescenze, sono generalmente deboli o debolissime.

II. — OLII ESSENZIALI DEL PERICARPO DI AGRUMI.

È noto come molte piante dei climi caldi e secchi contengano grandi quantità di essenze, e come la loro composizione e quantità per le stesse piante varii con il clima, la coltivazione, col grado di secchezza dell'aria, ecc.

Molte funzioni sono state attribuite agli olii essenziali delle piante, quali la difesa contro l'eccessiva traspirazione⁽¹⁾, la facilitazione di trasporto delle sostanze elaborate nel corpo dei vegetali⁽²⁾, l'azione protettiva contro alcuni microrganismi a causa del loro potere tossico, e qualche volta, per alcuni microrganismi, addirittura antisettica; ma gli olii essenziali hanno anche una funzione di difesa contro le radiazioni luminose solari della porzione più rifrangibile dello spettro. Così Tyndall ed altri hanno messo in luce le proprietà assorbenti di queste sostanze per i raggi, ad esempio, tra $\lambda = 1000$ e $\lambda = 2000$ U. A., proprietà, che secondo Volkens⁽³⁾, dimostrerebbe l'azione protettrice di tali essenze contro le eccessive radiazioni luminose, nelle piante delle regioni molto calde.

È stato anche dimostrato come i raggi ultravioletti accelerino la formazione delle sostanze odorose per scomposizione dei glucosidi. Così ad es., il *Melilotus officinalis* Lam., l'*Anthoxanthum odoratum* L., l'*Asperula odorata* L., l'*Herniaria glabra* L., sviluppano rapidamente l'odore della cumarina sotto l'influenza delle radiazioni ultraviolette, mentre non lo svilupperebbero che ad essiccazione completa della pianta⁽⁴⁾.

Ho scelto l'essenza delle ghiandole oleifere del pericarpo di Agrumi,

(1) DIXON H. H., *Transpiration into a saturated atmosphere*, «Proceedings of Royal Irish Society», Serie III, Vol. IV, 1898.

(2) GIGLIOLI I., *Della probabile funzione degli olii essenziali e di altri prodotti volatili delle piante quale causa di movimenti nei succhi vegetali viventi*, «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», 1911.

(3) VOLKENS, *Die Aegyptische Wüste*, Berlin, 1887.

(4) POUGET M., *Action des rayons ultraviolets sur les plantes à coumarine et quelque plantes dont l'odeur provient de glucoside dédoublés*, «C. R.», 1910.

perchè queste piante sono frequenti, e prosperano bene nel nostro clima, e anche perchè è facile ottenere direttamente l'essenza da queste parti vive, senza ricorrere a distillazione o ad altre manipolazioni di sorta, che potrebbero portare a risultati inesatti o dubbi.

Qui a Roma ho trovato soltanto aranci, melangoli, mandarini, limoni e frutti di *Citrus trifoliata* L.; sento quindi il dovere di rivolgere un vivo ringraziamento al dott. Francesco La Face, che, inviandomi i campioni freschi, di diversi agrumi, che si coltivano nelle Calabrie, mi ha permesso di rendere più complete le mie ricerche.

Per osservare la fluorescenza degli olii essenziali contenuti nel pericarpo del frutto di Agrumi basta pungerne o raschiarne leggermente la superficie esterna, esponendola direttamente alla lampada.

È interessante veder sgorgare dalle piccole ferite una nebbiolina di minutissime gocce lanciate lontano all'intorno, oltre ad altre più grosse che restano sulla buccia. Esse sono di un giallo oro bellissimo, splendenti, nell'arancio, nel chinotto, nel melangolo, ed in una varietà di cedro chiamata « cedrino », che in Calabria si coltiva appunto per l'estrazione dell'essenza.

Nel mandarino invece le goccioline di olio etero presentano una fluorescenza violetto splendente, mentre nel *Citrus trifoliata* L. esse sono azzurro splendenti.

Nel bergamotto e in una varietà di cedro detta « diamante », con frutti a superficie liscia che vengono coltivati per la canditura, l'essenza presenta una debole fluorescenza azzurra.

Il limone, la limetta ed un'altra varietà di cedro, che produce frutti grossi a superficie scabra, destinati anch'essi per la canditura, non presentano una fluorescenza visibile, almeno, con questo semplice metodo.

Però, mentre le ghiandole oleifere del limone e della limetta si presentano di un color verde molto scuro, quasi nero (il che indica che tendono ad assorbire senza trasformare le radiazioni ultraviolette filtrate), quelle del cedro presentano una debole luminescenza gialla.

Però se facciamo una sezione, mentre il pericarpo di tutti gli altri agrumi non mostra che deboli luminescenze, il mesocarpo di quest'ultima varietà di cedro presenta una fluorescenza azzurra splendente bellissima.

Dunque nelle ghiandole oleifere di queste piante, fatta eccezione dell'ultima varietà di cedro di cui ho parlato, emerge da quanto ho detto, che l'olio essenziale possa essere in questi frutti un ottimo mezzo di difesa contro la porzione delle radiazioni solari ultraviolette. Queste piante, che pur tanto hanno bisogno di sole sarebbero in grado di trasformare nelle piccole gocciole profumate le radiazioni 3650 U. A. in radiazioni di lunghezza d'onda maggiore non più nocive.

Il cedro a superficie scabra fa eccezione, ma lo spesso mesocarpo prende lui la funzione protettiva, diventando fortemente fluorescente in azzurro.

Fisiologia vegetale. — *La coltura fisiologica. Risultati ed applicazioni.* Nota di N. A. BARBIERI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Dai tessuti vegetali è possibile separare, come io l'ho già indicato ⁽²⁾, i sali solubili e quelli insolubili, che esistono preformati, nei tessuti stessi. L'insieme di questi sali (solubili ed insolubili) costituisce il fertilizzante fisiologico, cioè l'alimento salino più appropriato e più assimilabile da una pianta.

Il quantitativo del fertilizzante necessario per ettaro, si deduce dalla percentuale di tutti i sali contenuti nella raccolta globale della pianta che si studia. Una raccolta completa di grano di 60 quintali l'ettaro, distinta in 20 quintali di granella (ceneri = gr. 1.80 %) e 40 quintali di paglia e pula (ceneri = gr. 4 % di cui il 75 % di silice) contiene da 36 a 38 chili di sali nella granella e da 40 a 42 chili di sali nella paglia e pula, dedotta però la silice. Trascurando quindi qualsiasi apporto minerale da parte del terreno, l'alimento minerale completo di una raccolta granaria di 60 quintali l'ettaro (granella, paglia, pula) si riduce ad un quantitativo di circa 80 chili di sali. In pratica però ho usato per ettaro, con risultati soddisfacenti, circa 2 chili di fertilizzante per ogni quintale di grano contenuto nella raccolta media di una regione determinata.

La coltura minerale diffusa consiglia di spargere per ettaro da 500 kg. (grano) a 2500 kg. (barbabietola da zucchero) di concimi misti (perfosfati o scorie, cianamide o nitrati, sali bruti di potassio). La coltura fisiologica invece ritiene che 40 o 50 kg. di fertilizzante per il grano, 300 o 350 kg. di fertilizzante per le altre colture (barbabietola da zucchero, tabacco, ecc.) rappresentino tutto l'alimento minerale salino necessario da somministrarsi, per ettaro, in modo localizzato secondo ciascuna categoria di piante.

Per lo spazio di 14 anni in latitudini ed altitudini diverse ho istituito delle esperienze comparative fra i due sistemi di coltura minerale, l'uno diffuso, eterogeneo alla composizione delle piante, l'altro localizzato, omogeneo con la composizione delle piante.

I risultati ottenuti si trovano raggruppati nel modo che segue: 1915-1928 ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(2) «C. R. Ac. Sc.», to. 159, p. 431, Paris, 1914.

(3) Ho dovuto per brevità sopprimere molti altri risultati ottenuti perchè formulati in modo poco preciso. Non ho creduto opportuno riferire i risultati ottenuti all'inizio dello studio coltivando piccole parcelle.

PIANTE DI GRANDE COLTURA. — CEREALI.

A) *Grano invernale.*

Raccolta = Q.

1915. Carlantino (Foggia).	
3 ettari testimoni	27.00
3 » grano trattato	39.00
1916. Roma. Contrada Ardeatina. Annunziatella.	
2 ettari testimoni, dopo due anni di riingrano . . .	12.00
2 » grano trattato dopo tre anni di ringrano ed un anno d'avena	20.00
1916. Foggia. Marchesa Freda.	
1 ettaro testimone	12.20
1 » grano trattato	16.10
1917. Roma. Amministrazione Aldobrandini. Ostia.	
2 lotti di ettari 1.25 ciascuno.	
1.25 ettari grano testimone.	15.87
1.25 » grano trattato	18.39
1917. Cosenza. Quintieri.	
1 ettaro testimone	8.10
1 » trattato	11.25
1917. Roma. Abbazia delle Tre Fontane presso S. Paolo.	
2 ettari grano testimoni	25.00
2 » » trattato (allettato in parte)	36.00
1918. Roma. Tenuta Lucchina.	
1 ettaro grano testimone	13.25
1 » » trattato	17.15
1918. Lucera (Foggia) (Curato).	
1 ettaro grano testimone	13.70
1 » » trattato	17.10
1918. Cerignola (Foggia) Pavoncelli.	
1 ettaro seminato con 180 kg. di grano testimone . .	10.75
1 » » » 130 » » fertilizzato	12.04
1918. France. (Seine-et-Marne). Domaine d'Armainvilliers.	
Parcelle 1 ettaro testimone	27.55
» 1 » con 500 kg. di perfosfato	30.07
» 1 » » 45 » di fertilizzante	31.90
1919. France. (Seine-et-Marne). Gretz. Domaine la Forêt.	
1 ettaro testimone	20.70
1 » con 500 kg. di perfosfato	24.00
1 » » 45 » di fertilizzante	25.80
1920. France. (Seine-et-Marne). Domaine de Noisiel.	
1 ettaro testimone	18.35

Raccolta = Q.

1	»	con 650 kg. di cui 500 perfosfato, 150 silvinite	20.90
1	»	» 45 » di fertilizzante	20.45
1921.	France.	(Seine-et-Marne). Domaine d'Armainvilliers.	
		50 are senza concimi minerali	12.25
		50 » con 250 kg. di perfosfato e 100 kg. silvinite .	14.03
		50 » » 25 » di fertilizzante	13.98
1922.	France.	(Nord). Pont-d'Ardres. Sucrerie Say.	
		1 ettaro con 600 kg. di perfosfato	36.36
		1 » » 50 » di fertilizzante	38.18
1923.	France.	(Seine-et-Marne). Gretz. Domaine la Forêt.	
		2 ettari grano testimoni	27.50
		2 » con 1000 kg. di perfosfato	26.08
		2 » » grano fertilizzato	30.18
1927.	France.	(Seine-et-Oise). Massy. Palaiseau. Vilmorin.	
		2 lotti di superficie ineguale ma di identiche condizioni.	
		1° lotto con 300 kg. perfosf. e 100 kg. silvinite, all'ettaro	20.00
		2° » » 45 » di fertilizzante . . . »	23.42
1920.	Canada.	Provincia di Quebec. Scuola di S. Giacinto.	
		13 are testimoni	0.140
		13 » con 100 kg. di perfosfato e 20 kg. di silvinite	0.162
		13 » » 6 » di fertilizzante	0.175
1926.	Roma.	Castel Porziano. Dr. F. Angelini.	
		1 ettaro con 500 kg. perfosfato e 100 kg. cianamide	34.20
		1 » » 45 » di fertilizzante	35.60
1926.	Roma.	Contrada S. Paolo. Abbazia Tre Fontane.	
		Ettaro A 45 kg. di fertilizzante	31.35
		» B con 500 kg. di perfosfato e 200 kg. di gesso	24.10
1927.	Roma.	Contrada S. Paolo. Abbazia Tre Fontane.	
		Ettaro A con 500 kg. di perfosfato e 200 kg. di gesso	15.90
		» B » 45 » di fertilizzante	23.60

I Padri Trappisti delle Tre Fontane, presso S. Paolo in Roma, seguendo il mio consiglio, hanno per un biennio (1925-26 e 1926-27) coltivato a grano un campo di circa 6 ettari, omogeneo, di una stessa coltura anteriore (barbabetola da zucchero), pianeggiante, privo di alberi, appropriato alla coltura dei cereali, lavorato profondamente (macchine Fowler) ben stabulato. Di tale campo si scelsero i due ettari centrali che si trovavano in condizioni agronomiche perfette, e si distinsero l'uno con la lettera A e l'altro con la lettera B, procedendo dall'Abbazia verso il Tevere. Il 13 dicembre 1925 venne seminato a spaglio l'ettaro A con 120 kg. di grano gentil-rosso previo trattamento con 45 kg. di fertilizzante fisiologico incorporato con i semi (raccolta Q. 31.35). L'ettaro B venne seminato a spaglio

il 14 dicembre 1925 con 120 kg. di grano gentil-rosso, previo spargimento sul suolo di 500 kg. di perfosfato e 200 kg. di gesso (raccolta Q. 24.10). Alla raccolta il grano fertilizzato era di migliore qualità che quello concimato ⁽¹⁾. Dopo la raccolta del grano si coltivò nel campo il frumentone da foraggio. Le piante tutte uniformi e di uguale altezza testimoniavano l'omogeneità organica del suolo. Tolto il frumentone da foraggio, eseguiti i lavori appropriati, l'ettaro *A* venne seminato a righe il 18 dicembre 1926 con 120 kg. di grano saragolla, previo spargimento sul suolo di 500 kg. di perfosfato e 200 kg. di gesso (raccolta Q. 15.90. Nell'ettaro *B* si eseguì la semina a righe il 19 dicembre 1926 con 120 kg. di grano saragolla mischiato con 45 kg. di fertilizzante (raccolta Q. 23.60).

Il maggior prodotto che per due anni consecutivi si ottenne con grano fertilizzato dagli appezzamenti invertiti (ettaro *A* nel 1926, ettaro *B* nel 1927) prova all'evidenza che l'aumento nella raccolta non si può ritenere che sia stato causato da una diversa fertilità del suolo.

APPLICAZIONI DI GRANDE COLTURA.

1927. I Padri Trappisti delle Tre Fontane (Roma) hanno coltivato circa 40 ettari a grano con il fertilizzante. Il sig. Pietro Ferrauti a Montemassi (Siena) ha coltivato 200 ettari a grano con il fertilizzante e 200 ettari con perfosfato in ragione di 500 kg. l'ettaro. L'ingegnere Nicolini, il sig. D'Antoni, il principe Aldobrandini, hanno complessivamente coltivato 200 ettari a grano con il fertilizzante.

1928. I Padri Trappisti delle Tre Fontane (Roma) hanno coltivato circa 30 ettari con il fertilizzante. Circa 400 ettari sono stati coltivati a grano con il fertilizzante nelle varie regioni dell'Italia centrale. Le pessime condizioni di semina e la stretta hanno rovinato una parte dei raccolti.

B) *Avena*.

1921. France. St. Just-en-Chaussée (Oise). Sucrerie Say.

All'ettaro kgs

3 parcelle di 33 are ciascuno.

Testimone senza concimi 3410

Parcelle con concimi chimici (1100 sparsi nel 1919) 3225

» » 50 kg. di fertilizzante 3841

(1) All'occasione dell'esposizione granaria che ha avuto luogo in Roma il 10-15 agosto 1926 i Padri Trappisti delle Tre Fontane hanno esposto il grano fertilizzato e quello concimato raccolti negli Ettari *A* e *B* insieme con una tabella dei risultati ottenuti.

C) *Orzo*.

1920. France. Domaine de Noisiel (Seine-et-Marne).	All'ettaro kgs
3 parcelle di 55 are ciascuna.	
Testimone	1740
Parcelle con 350 kg. di concimi chimici	1660
» » 30 » di fertilizzante	1800

PIANTE DI GRANDE CULTURA.

A) *Barbabetola da zucchero*.

1922. France. St. Just-en-Chaussée (Oise). Sucrerie Say.	
3 parcelle di 25 are.	
Testimone « senza concime »	A
Con 1100 kg. di concimi per ettaro	B
Con 300 kg. di fertilizzante per ettaro	C
Raccolta per ettaro	A radici kg. 48410 - zucchero kg. 8770
»	B » » 48800 - » » 8966
»	C » » 51840 - » » 9694

B) *Barbabetola da zucchero per semi*.

1924. France. Massy. Palaiseau (Seine-et-Oise). Vilmorin.	Semi kg.
35 barbabetola testimoni	0.605
35 » fertilizzata	1.180

B) *Patate*.

1917. Roma. Ciampino. Azienda militare.	Raccolta kg.
Kg. 25 di patate piantate	248
» 25 » » con fertilizzante	277
1920. France. Remy (Oise).	Raccolta kgs Fecola
5 are senza concimi; piantate kg. 80	730 18.40 %
5 » con 12 kg. di cloruro di K. e 6 kg. di nitrato; piantate kg. 80	805 18.40 %
5 are con il fertilizzante; piantate kg. 80	992 19.20 %

COLTURA DELLA VIGNA.

1922. France. Margaux (Gironde). Chateau Palmer.

Raccolta d'uva kg.

1900 viti testimoni 1952

1900 » con 30 gr. di fertilizzante per vite . . . 2650

1922. France. Pouillac (Gironde). Chateau Lafitte.

324 viti testimoni 231

324 » con 30 gr. di fertilizzante per vite . . . 275

1923. France. Epernay (Marne). Association Viticole Champenoise.

Contrée Cumièrre à Epernay.

Parcella testimone, senza concime minerale . . . 2370

» con 1200 kg. di concimi minerali all'ettaro . 2350

» » 30 » di fertilizzante per vite all'ettaro 3310

COLTURA DEL TABACCO 1920-28.

1924. Scafati (Salerno). Istituto coltivazione tabacchi.

Coltura del tabacco Kentucky a filari alternati.

Raccolta kg.

are 17.46 - 2156 piante di tabacco Kentucky testimoni . . . 1739

» 17.46 - 2156 » » con solfato ammonico . . . 1737

» 17.46 - 2156 » » » fertilizzante . . . 1811

Le foglie vennero seccate e fermentate a parte, a parte se ne confezionarono i sigari. A giudizio di un gran numero di fumatori i sigari fertilizzati erano di migliore qualità, più combustibili, più aromatici, e meno irritanti la gola dei sigari fatti con foglie di tabacco testimone o coltivato con solfato di ammonio.

Negli anni 1925-26-27-28 sono stati coltivati vari tabacchi levantini (Erzegovina Gigante, Samsum, Xanti Yaka, Sari Yaka) con e senza il fertilizzante fisiologico. Le sigarette confezionate con foglie di tabacco fertilizzate erano più combustibili e più aromatiche di quelle confezionate con il tabacco testimone. Inoltre le sigarette fatte con il miscuglio di tutti e quattro i tabacchi fertilizzati possedevano qualità anche più spiccate (combustibilità, aroma) delle sigarette fatte con i miscugli dei tabacchi testimoni.

COLTURA DELLE ORCHIDEE.

1919-1928. France. Ferrières-en-Brie (Seine-et-Marne).

Serres du Domaine de Ferrières-en-Brie.

Dal 1919 al 1928 sono state coltivate nelle serre 100 piante di orchidee (Cattleya) senza alcun concime minerale e 100 altre piante delle stesse

orchidee con irrorazioni periodiche di fertilizzante dedotto dalle analisi delle orchidee. La coltura ha cominciato nel 1919 dei piccoli semi e le piante sono state seguite fino alla fioritura (1927-28). Le piante, raggiunto il completo sviluppo, hanno dimostrato una differenza sensibile nella fioritura. Le orchidee fertilizzate hanno prodotto circa il 70 % in più di fiori delle orchidee testimoni.

Nei primi 11 mesi del 1928, nelle serre di Château de Ferrières (Seine et Marne) le 100 orchidee fertilizzate hanno prodotto 176 fiori, mentre le 100 orchidee testimoni hanno prodotto 99 fiori.

Tutte le esperienze sono state condotte con la più grande diligenza, senza partito preso, e nelle condizioni, per quanto era possibile, identiche.

La coltura fisiologica cerca di ottenere, senza alterare la composizione delle terre, un prodotto migliore e più elevato, usando, in modo localizzato, dosi minime di sali, con una sensibile economia di mano d'opera e di trasporti.

Breve: Il massimo reddito con il minimo impiego ⁽¹⁾.

Embriologia. — *Contributo alla embriologia di «Lilium candidum L.»* ⁽²⁾. Nota di V. BAMBACIONI, presentata ⁽³⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Lo studio embriologico della *Fritillaria persica* L. ⁽⁴⁾ aveva fatto sorgere in me il sospetto che le piante finora ascritte al tipo *Lilium* e caratterizzate da un aumento di cromosomi nella regione calazale del sacco embrionale, sviluppassero il loro gametofito femminile come la *Fr. persica*, cioè secondo il tipo *Euphorbia dulcis*. Questa mia supposizione aveva però bisogno di conferma e perciò mi sono decisa a seguire lo sviluppo embriologico di quelle Gigliacee che, dai dati bibliografici, risulterebbero fornite delle dette particolarità: comunicherò in questa Nota le osservazioni fatte su *Lilium candidum* L. (osservazioni che, posso dire fin da ora, confermano pienamente la mia supposizione), riservandomi di pubblicare le figure relative nel lavoro in cui esporrò i risultati ottenuti su altre specie di *Lilium* e su alcune specie di *Tulipa*.

Gli stami e i pistilli di *Lilium candidum* L. si prestano molto bene per lo studio dei fenomeni citologici ed embriologici; per questa ragione

(1) Per i risultati delle altre piante si rinvia al « Journal de la Société Nationale d'Horticulture de France », 4^a serie, 1925, p. 114.

(2) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(3) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(4) V. BAMBACIONI, *Ricerche sulla ecologia e sulla embriologia di «Fritillaria persica» L.*, « Annali di Botanica », vol. 18, fasc. I, 1928, pp. 7-37.

hanno fornito frequentemente materiale per numerose osservazioni di tal genere; potrebbe quindi sembrare strano che io ne faccia oggetto di ulteriori ricerche, ma ne sono stata indotta dal fatto che nessuno degli autori precedenti si è proposto di seguire lo sviluppo graduale del gametofito femminile di questa pianta. Molto superficiali risultano le descrizioni fatte dal Guignard⁽¹⁾, dal Mottier⁽²⁾, dal Bernard⁽³⁾, nelle quali è notato il fenomeno dell'aumento dei cromosomi nei nuclei calazali ma non è mai accennato alla disposizione 1 + 3 (cioè uno al micropilo e tre alla calaza) dei nuclei megasporiali descritta invece nel *L. Martagon* e in altre Gigliacee.

Ho adoperato per le mie osservazioni piante ottenute da bulbi provenienti dallo Stabilimento orticolo dello Sgaravatti e da bulbi acquistati presso il floricultore Aureli di Roma.

I giovani boccioli lunghi cm. 1.50-2, di *L. candidum* mostrano negli abbozzi ovulari una cellula sottoepidermica che comincia a distinguersi dalle altre per le maggiori dimensioni; essa continua ad accrescersi e nei boccioli di circa cm. 3 occupa quasi tutta l'estensione della nocella: ha un nucleo con uno o più nucleoli e un protoplasma, privo di vacuoli, in cui si notano caratteristiche strutture fibrillari in prossimità del nucleo. Tali strutture, osservate e disegnate fin dal 1895 dal Dixon⁽⁴⁾ in *Lilium longiflorum* e considerate come fibre di un fuso formatosi prima della divisione del nucleo, furono descritte nei sacchi embrionali di molte altre piante, specialmente Gigliacee. Al Mottier⁽⁵⁾ dobbiamo la prima esatta descrizione di esse e ai fratelli Bouin⁽⁶⁾ il primo studio particolareggiato su queste formazioni che essi paragonarono a quelle ergastoplasmiche osservate dal Garnier nelle cellule glandolari degli animali. Da allora molti lavori sono stati fatti anche per stabilire le relazioni esistenti tra ergastoplasma e mitocondri: qui mi limiterò soltanto a indicare la conclusione cui è pervenuto, recentemente, il Guilliermond⁽⁷⁾: *ces formations décrites par les frères Bouin correspondent à des figures d'altération des chondriosomes et des plastes sous l'influence des fixations*; in seguito, quando avrò completato le mie ricerche, ritornerò sull'argomento.

(1) L. GUIGNARD, *Recherches sur la structure et la division du noyau cellulaire chez les végétaux*, « Ann. des Sc. Nat. », sér. VI, t. 17, 1884, pp. 5-59.

(2) D. M. MOTTIER, *Ueber das Verhalten der Kerne bei der Entwicklung des Embryosacks und die Vorgänge bei der Befruchtung*, « Jahrb. für wiss. Bot. », Bd. 31, 1898, pp. 125-158.

(3) M. CH. BERNARD, *Recherches sur les sphères attractives chez « Lilium candidum, Helosis guyanensis » etc.*, « Journal de Botanique », année 14, 1900, p. 177.

(4) H. H. DIXON, *On the Chromosomes of Lilium longiflorum*, « Proceedings of the Roy. Irish Acad. », ser. III, vol. III, 1895, p. 715.

(5) D. M. MOTTIER, loc. cit., 1898, pp. 125-126.

(6) M. e P. BOUIN, *Sur le développement de la cellule-mère du sac embryonnaire des Liliacées ecc.* « Arch. d'Anat. Micr. », t. II, 1898, pp. 419-454.

(7) A. GUILLIERMOND, *Recherches sur l'évolution du Chondriome*, « Ann. des Sc. Nat. », Bot., sér. 10, t. 6, 1924, p. 40.

Le formazioni sopra ricordate scompaiono quando il nucleo della cellula madre entra in divisione e nel protoplasma cominciano a comparire nette fibrille cinoplasmatiche per la formazione del fuso.

Come in *Fr. persica*, sono frequentissimi gli stadi di sinapsi, piuttosto rari quelli di diacinesi in cui i lunghi gemini, intrecciandosi tra loro, ne impediscono il computo, che si può invece fare facilmente sia nella metafase sia nell'anafase del fuso eterotipico. Il numero aploide dei cromosomi è, anche per questa specie, di dodici, conformemente a quanto aveva osservato lo Strasburger⁽¹⁾ nelle cellule madri del polline. Il fragmoplasto, bene evidente tra i primi due nuclei prodotti dalla divisione eterotipica, viene presto riassorbito e mentre, molto raramente, compaiono nel protoplasma piccoli vacuoli, i due nuclei si distanziano tra loro e presto si presentano circondati da fibre fusali. Frequentemente essi mostrano, alla periferia, un alone bianco analogo a quello descritto dalla Sargent in *L. Martagon*⁽²⁾ e determinato, secondo me, da una coartazione del citoplasma circostante.

I boccioli lunghi cm. 4-4 $\frac{1}{2}$ mostrano, con molta frequenza, nel sacco lo stadio dei fusi omeotipici nelle diverse fasi. Essi sono sempre uguali tra loro, sono immersi in un citoplasma denso e hanno una posizione piuttosto variabile perchè o giacciono su una linea longitudinale parallela all'asse maggiore del sacco o sono a questa obliqui e paralleli tra loro o, infine, sono perpendicolari tra loro e in tal caso il micropilare ha l'asse maggiore parallelo all'asse maggiore del sacco. Spesso, nella telofase, in cui quasi sempre si osservano chiari fragmoplasti, le fibre fusali collegano tutti e quattro i nuclei megasporiali che, sempre di uguali dimensioni, forse in rapporto alla posizione dei fusi omeotipici, sono disposti ora in fila ora in croce. Ben presto però si distanziano raccogliendosi tre all'estremità calazale del sacco e uno alla micropilare: in tale posizione si accingono a dividersi ed è facile sorprenderli nei diversi stadi di spirema. Più difficile invece è trovarli nello stadio caratteristico in cui i tre spiremi calazali, avvolti da un comune ammasso di fibre, confluiscono insieme: tra i numerosi ovuli osservati solo quattro mi hanno mostrato questo stadio che, a differenza di quello di *Fr. persica*, presenta gli spiremi alquanto contratti ed è del tutto simile a quello indicato dalla Sargent per *L. Martagon* nella fig. 36 del lavoro sopra citato.

Molto frequente è lo stadio immediatamente successivo con due fusi disuguali, uno grande calazale, derivante dalla somma dei fusi dei tre nuclei megasporiali, e uno piccolo micropilare; essi sono leggermente obliqui rispetto all'asse maggiore del sacco o tra loro perpendicolari e precisamente il calazale verticale e il micropilare trasversale.

(1) E. STRASBURGER, *Ueber den Theilungsvorgang der Zellkerne und das Verhältnis der Kerntheilung zur Zelltheilung*, Bonn, 1882, p. 19.

(2) E. SARGANT, *The formation of the sexual nuclei in Lilium Martagon*, « *Annals of Botany* », vol. X, 1896, pp. 445-477.

Nel citoplasma compaiono intanto, costantemente, piccoli vacuoli i quali vanno confluendo fino a formare un grande vacuolo centrale che separa, nel sacco accresciuto, la coppia dei due piccoli nuclei derivati dal fuso micropilare dalla coppia dei due grandi nuclei derivati dal fuso calazale: questi ultimi possono essere disposti l'uno accanto all'altro e hanno allora quasi sempre uguale forma, oppure possono essere sovrapposti e allora, come in *Fr. persica*, il superiore è allungato e l'inferiore ha la forma dell'estremità del sacco. Quest'ultimo nucleo, nella successiva divisione, presenta le stesse irregolarità osservate in *Fr. persica*, anzi in modo più accentuato in quanto solo raramente dà origine a due nuclei distinti, mentre il più delle volte si frammenta oppure non si divide affatto e, in ogni caso, si riduce ad una o due masse informi. Gli altri nuclei si dividono invece regolarmente e si produce così il gametofito adulto dato dalle sinergidi, dall'oosfera, dai due nuclei polari e da una sola antipode normale fornita di una ben distinta membrana.

In corrispondenza delle fibre fusali che uniscono i nuclei dell'apparato oosferico, compaiono nette membrane e in questo stadio l'oosfera talora può sembrare sorella del nucleo polare superiore, talora di una sinergide.

L'apparato oosferico negli ovuli non fecondati degenera presto, mentre i nuclei polari e le antipodi si conservano a lungo. In essi anzi ho notato molto frequentemente alcune particolarità che riassumerò brevemente: il nucleo dell'antipode normale, prima allungato, spesso si arrotonda, il protoplasma si vacuolizza e tutta la cellula ingrandita s'incunea in una concavità del protoplasma contenente i due nuclei polari. Più raramente protoplasma e nucleo diventano più densi, si mostrano più fortemente colorati e il nucleo, che anche qui tende ad assumere una forma tondeggiante, inizia un processo di divisione diretta, una specie di gemmazione, dando luogo ad altri nuclei tra cui talora può formarsi anche una parete, come dimostrano i pochi sacchi in cui ho trovato quattro cellule antipodali di aspetto normale, oltre le masse informi inferiori. Tale moltiplicazione delle antipodi è già nota per molte altre piante, ma non mi risulta che sia stata indicata per il *Lilium*.

Negli stadi ottonucleati appena differenziati, i due nuclei polari sono separati da un vacuolo che occupa quasi tutta la porzione centrale del sacco: secondo il Bernard ⁽¹⁾ questo vacuolo, interrompendo ogni comunicazione tra le due estremità del sacco, impedirebbe l'unione dei due nuclei polari e quindi la formazione del nucleo secondario determinando forse la sterilità della pianta. I miei preparati hanno dimostrata errata tale ipotesi: spessissimo ho infatti notato la migrazione del nucleo polare inferiore, attraverso lo strato protoplasmatico limitante il vacuolo, verso il nucleo polare superiore fino a raggiungerlo; talvolta si sposta anche il superiore e allora

(1) M. CH. BERNARD, loc. cit., 1900, p. 182.

i due nuclei si raggiungono quasi verso la metà del sacco da un lato del vacuolo. In tutti gli stadi ottonucleati adulti, in cui l'apparato oosferico comincia a degenerare, il nucleo polare inferiore si mostra costantemente circondato da una raggiera più fortemente colorabile del protoplasma circostante nella quale si notano uno o due corpiccioli sferici, chiari, simili quasi a piccoli vacuoli. La loro presenza costante mi permetteva di riconoscere il nucleo polare inferiore anche prima di osservare tutta la serie delle sezioni. In un caso in cui i due nuclei polari s'erano avvicinati, questo corpo, circondato da plasma denso, era interposto tra i due in modo da far nascere il sospetto che si trattasse di uno spermio in via di degenerazione. In un solo caso un corpo simile era vicino anche al nucleo polare superiore e perciò è forse azzardato il sospetto sopra accennato, anche perchè l'oosfera non mostrava nessuna di queste formazioni nè, in alcun modo, si vedevano nel micropilo residui di tubi pollinici che potessero provare l'avvenuta fecondazione. Essi ricordano le centrosfere descritte dal Bernard ¹, le quali si mostrerebbero sempre circondate da un alone di protoplasma denso e, più ancora, i corpi descritti dal Koernicke ² appunto nel sacco embrionale di *L. candidum*.

Secondo quest'ultimo autore si tratterebbe di sostanze nutritizie ammassate forse in piccoli vacuoli o alveoli e separate da uno spesso strato di citoplasma: poichè coll'acido osmico del fissativo acquistavano una colorazione nera che poteva scomparire in seguito a trattamento con acqua ossigenata, egli pensò che si potesse trattare di sostanze grasse o oleose. Per vedere se anche i corpi presenti nei miei preparati fossero costituiti di sostanze grasse, ho trattato alcune sezioni col Sudan III che, come è noto, colora i grassi in rosso, ma in tutti i casi la reazione è stata negativa e quindi, almeno per ora, io non posso definire la natura di queste curiose formazioni.

Il *L. candidum* presenta, come molte altre specie, una notevole sterilità, sempre minore però di quella della *Fr. persica*: su dieci piante ho potuto infatti raccogliere a luglio due ovari ingrossati e cinque capsule con semi di cui solo pochi avevano aspetto normale. Nei primi e nelle seconde ho notato che mentre gli ovuli verso lo stilo contengono embrioni e si trasformano in semi abboniti, gli ovuli verso la base dell'ovario rimangono sterili e, in loro corrispondenza, l'ovario non ingrossa quasi affatto. Al mio esame è risultato che in molti ovuli, normalmente ingrossati, l'embrione era andato a male mentre l'albume s'era sviluppato normalmente.

Quanto agli stami, che producono abbondantissimo polline, non ho potuto seguire la formazione delle microspore per mancanza di stadi appropriati. Le antere contenenti le cellule madri in sinapsi non m'hanno mai

(1) M. CH. BERNARD, loc. cit., 1900; ID., *Quelques remarques à propos des centres Kinitiques*, « Journal de Botanique », année 19, 1905, p. 80.

(2) M. KOERNICKE, *Zentrosomen bei Angiospermen?*, « Flora », B. 96, 1906, pp. 501-522.

mostrato la migrazione di cromatina da una cellula all'altra descritta da West e Lechmere⁽¹⁾; soltanto in una loggia con segni evidenti di deperimento ho notato uno spezzettamento della cromatina e dei nucleoli in frammenti di forma simile a quelli osservati dagli Autori citati; detti frammenti però rimanevano nel protoplasma della cellula stessa senza migrare attraverso le pareti. Nelle cellule normali la cromatina, nello stadio di sinapsi, formava un ammasso molto denso intorno al nucleolo il quale perdeva presto la sua forma sferica e iniziava un processo di dissolvimento. Accennerò ora ad alcune anomalie trovate, piuttosto frequentemente, in tutti gli ovari presi in esame.

Un fenomeno frequentissimo è la presenza, in un ovulo, di due o più sacchi embrionali: il Bernard descrive nel suo lavoro⁽²⁾ un ovulo con due sacchi embrionali paralleli, ma non avendo visto gli stadi giovani mostrandoci la prima differenziazione della cellula madre non può decidere *si le double sac dérive de deux cellules-mères primordiales ou d'une cellule-mère unique qui se serait divisée longitudinalement en deux dès l'origine*. Io posso invece affermare che essi derivano da cellule madri distinte avendo potuto notare che l'archesporio, generalmente unicellulare, può essere pluricellulare e presentare da due a cinque cellule madri. Accanto ad ovuli con più sacchi embrionali in una nocella, se ne trovano altri, pure frequenti, con due nocelle contenenti ciascuna un sacco embrionale. Numerosi sono anche, specialmente nella parte superiore dell'ovario, i casi in cui, in una loggia, si hanno non due ma tre ovuli in uno stesso piano, i quali spesso si saldano: il mediano di questi ovuli che, forse per ristrettezza di spazio, non compie la curva per diventare anatropo, rimane col micropilo rivolto verso il dorso della loggia e talora presenta due nocelle.

Molto spesso negli ovari raccolti dalle piante provenienti dallo stabilimento orticolo dello Sgaravatti, più raramente negli ovari delle altre piante, ho notato una irregolarità, nella divisione eterotipica della cellula madre, che molto ricorda quella osservata da Strasburger⁽³⁾, da Juel⁽⁴⁾ e da altri nelle cellule madri del polline di *Hemerocallis fulva*. Nell'anafase del fuso, all'equatore rimangono dei cromosomi che si raccolgono in un piccolo nucleo soprannumerario, il quale si può ritrovare in tutti gli stadi ulteriori. Nei sacchi coi quattro nuclei megasporiali esso sta nella parte centrale del sacco ed è unito da fibre fusali con gli altri nuclei: allorchè i nuclei megasporiali acquistano la disposizione 1 + 3, migra anch'esso verso la calaza

(1) C. WEST and A. E. LECHMERE, *On Chromatin Extrusion in Pollen Mother-cells of Lilium candidum* Linn. « Annals of Botany », vol. 29, 1915, pp. 285-291.

(2) M. CH. BERNARD, loc. cit., 1900, p. 178.

(3) E. STRASBURGER, loc. cit., 1882, p. 20.

(4) H. O. JUEL, *Die Kerntheilungen in den Pollenmutterzellen von Hemerocallis fulva und die bei denselben auftretenden Unregelmäßigkeiten*, « Jahrb. für wiss. Bot. », Bd. 30, 1897, pp. 205-226.

e si fonde nel fuso triploide; talora invece rimane ancora indipendente finchè, nello stadio con due coppie di nuclei disuguali, finisce col fondersi col nucleo calazale inferiore.

Tre ovuli infine mi hanno mostrata un'anomalia che s'avvicina molto a quella osservata una sola volta in *Fr. persica*. Giovani sacchi embrionali vicini ad altri contenenti due fusi disuguali, mostravano all'estremità micropilare un piccolo vacuolo e alla calazale due grossi nuclei, simili a quelli derivanti dal fuso triploide, e uno, più piccolo, del tutto simile a un nucleo megasporiale. Con molta probabilità in questi casi il nucleo micropilare dello stadio $1 + 3$ deve essere rimasto indietro nella divisione e deve essersi portato alla calaza colla formazione del vacuolo in posizione anormale. Non ho potuto seguire l'ulteriore sviluppo di tali sacchi, ma quanto ho osservato in *Fr. persica* mi fa pensare che, alla prossima divisione, questi nuclei possano confluire in un unico grande fuso tetraploide. Interessante sarebbe poter vedere se siffatti sacchi sono suscettibili di ulteriore sviluppo.

Concludendo, posso dire che lo studio embriologico di *Lilium candidum* L. ha fornito osservazioni interessanti non solo per lo sviluppo del gametofito femminile che, perfettamente identico a quello di *Fr. persica*, segue il tipo *Euphorbia dulcis* e spiega nel modo più semplice l'aumento del numero dei cromosomi nei nuclei della regione calazale, ma anche per le numerose anomalie alcune delle quali, per quanto mi consta, non erano state finora descritte.

Embriologia. — *Studi embriologici sulle razze polivoltine del Bombice del Gelso.* Nota di R. GRANDORI, pres. dal Socio A. MENOZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche sul meccanismo di formazione della linfa.* Nota di G. QUAGLIARIELLO, pres. dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche sugli effetti circolatorii degli aumenti di pressione arteriale.* Nota di G. GALATÀ, pres. dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sull'azione dei vapori degli alcoolii etilico e metilico, dell'etere solforico, del cloroformio e del gas illuminante sui leucociti isolati dell'organismo.* Nota di C. FORTI, pres. dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Il punto isoelettrico della mioproteina.* Nota di L. DE CARO, pres. dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE dà all'Assemblea il doloroso annunzio della morte del geologo MARIO CANAVARI ed annuncia che il compianto Socio verrà degnamente commemorato in una delle prossime sedute.

Il prof. G. LEVI legge la commemorazione del defunto Socio straniero L. HENNEGUY, e il prof. MILLOSEVICH quella del compianto Socio ARTINI.

Il PRESIDENTE ringrazia i proff. Millosevich e G. Levi per le dotte e sentite commemorazioni dei due insigni Soci scomparsi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrisp. GUIDI presenta in omaggio una sua breve Nota dal titolo: « Prove di travi da ponte » e ne discorre.

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta le pubblicazioni giunte in omaggio segnalando il Catalogo stellare dell' « Hamburger sternwarte in Bergedorf » e la « Création du Bureau international des poids et mesures et son œuvre » di CH. ED. GUILLAUME.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio SEVERI legge, anche a nome del Socio VOLTERRA, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria del prof. L. FANTAPPIÈ dal titolo: « I funzionali analitici ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano quindi Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci BAGLIONI, BOTTAZZI, CARANO, CASTELNUOVO, FRANCHI, LEVI-CIVITA, SEVERI, SOMIGLIANA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 dicembre 1928

- ARTAZA E. — Saneamientos urbanos y rurales en la Republica Argentina. T. II. La Plata, 1928. 8°, pp. 1-600.
- BOSCHMA H. — Two Cammon Species of Parasitic Crustacea (Sacculinidae) of the West Indies. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-10.
- CIANI E. — Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici. Torino, 1928. 8°, pp. 1-267.
- CORTESE E. — Geosinclinali isostasi. Firenze, 1928. 8°, pp. 1-13.
- CORTESE E. — L'ipotesi di Wegener sulla traslazione dei continenti. Firenze, 1928. 8°, pp. 1-19.
- DEL VALLE G. — Bilancio idrologico dei bacini imbriferi. (Estr. da «l'Elettrotecnica». Anno IX). Milano, 1922. 4°, pp. 1-8.
- DEL VALLE G. — Patavium Docet! (Estr. dalla Rivista mensile «l'Italia fisica e i problemi delle acque». Anno III). Milano, 1925. 8°, pp. 1-3.
- DEL VALLE G. — Regimazione dei bacini montani e loro rapporti colle bonifiche ed irrigazioni. (Estr. dall'«Elettrotecnica». Vol. X). Milano, 1923. 4°, pagine 1-10.
- DOLBERG F. — Erstes Bergedorfer Sternverzeichnis 1925. O. — Index der Sternörter 1900-25, nord, sud. Vol. II. Bergedorf, 1928. 4°, pp. 1-XXVIII, 1-907; 1-307, 1-291.
- FORTI A. — Intorno alla vita e alle opere di Angelo Forti. Pisa, 1928. 8°, pp. 1-26.
- GILMORE C. W. — A new Pterosaurian Reptile from the Marine Cretaceous of Oregon. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-5.
- GUIDI C. — Prove di travi da ponte. (Estr. da «l'Ingegnere». Vol. II). Roma, 1928. 4°, pp. 1-8.
- GUILLAUME ED. — La création du Bureau International des Poids et Mesures et son Oeuvre. Paris, 1927. 8°, pp. 1-VIII, 1-321.
- HOUGH W. — Fire-Making Apparatus in the United States National Museum. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-72.
- LOVERIDGE A. — Field Notes on Vertebrates Collected by the Smithsonian-Chrysler East African Expedition of 1926. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-69.
- MALLOCH J. R. — Notes on American Two-Winged Flies of the Family Sapromyzidae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928, 8°, pp. 1-19.
- MERRIL G. P. — Concerning the Origin of the Metal in Meteorites. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-7.
- SCHAUS W. — New Moths of the Family Cerruridae (Notodontidae) in the United States National Museum. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-90.
- TOMMASINA T. — La Physique de la Gravitation et la Dynamique de l'Univers. Paris, 1928. 8°. pp. 1-300.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 dicembre 1928 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Aggiunta alla Nota « Sul moto di un corpo di massa variabile »* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella Nota richiamata nel titolo fu dimostrato che, se la massa m di un corpo P va crescendo per urti (anelastici) con corpuscoli Q (caduta di meteoriti), il moto è (coi soliti simboli) retto dall'equazione

$$(1) \quad \frac{d(mv)}{dt} = F.$$

Desidero rilevare che la stessa equazione rimane valida anche se (accanto alla variazione derivante da assorbimento di pulviscolo) la massa m subisce eventuali diminuzioni per distacco di piccoli frammenti Q (modello meccanico di fenomeni di irraggiamento). Ciò si giustifica in modo ovvio cogli stessi criteri di cui ci siamo serviti nel caso del pulviscolo.

Quando P espelle un corpuscolo Q di massa μ con velocità (assoluta) w , la parte residua, che si seguita a designare con P , attesa la piccolezza del frammento perduto, subisce un impulso (reattivo) — μw , e quindi una variazione di velocità Δv , definita da

$$\Delta v = - \frac{\mu}{m - \mu} w,$$

(1) Pp. 329-333 di questo volume dei « Rendiconti ».

(2) Presentata nella seduta del 16 dicembre 1928.

o, più semplicemente, essendo lecito trattare μ come infinitesimo, da

$$(1) \quad \Delta v = - \frac{\mu}{m} w.$$

Suppongasi che in un tempuscolo dt , successivo all'istante generico t , abbiano luogo numerosissime eiezioni di corpuscoli Q , statisticamente isotrope rispetto a P , con che vogliamo dire dotate di velocità (relativa) d'insieme nulla, cioè soddisfacenti alla [(3')] della Nota precedente]

$$(2) \quad \sum \mu(w - v) = 0.$$

Sommiamo le varie (1), che si riferiscono all'intervallo dt . I primi membri formano $d''v$, mentre, trascurando ancora una volta infinitesimi d'ordine superiore rispetto a μ (il che consente di riguardare m come massa di P , anteriore a tutti gli urti dell'intervallo dt), e badando alla (2), la somma dei secondi membri può essere sostituita da

$$- \frac{1}{m} \sum \mu w = - \frac{dm}{m} v.$$

Ne consegue la [equazione (4)]

$$d''v = - \frac{dm}{m} v$$

della Nota precedente e ci si trova così ricondotti a quella stessa equazione (1) che conveniva al caso del pulviscolo, c. d. d.

Generalizzando induttivamente queste constatazioni è lecito ritenere che, *quando, per circostanze fisiche di natura qualsiasi, la massa di un corpo varia (con continuità), il moto è sempre retto dalla equazione: derivata di quantità di moto eguale a forza.*

Geometria. — *Congruenze Ω_0 di curve razionali, e trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. GINO FANO.

1. Riprendiamo la rappresentazione, esposta in una Nota precedente⁽²⁾, del sistema degli elementi lineari del piano sullo spazio punteggiato. Ai sistemi Ω di curve piane $\gamma^{n,v}$ (di ordine n , classe v) corrispondono congruenze del 1° ordine, che designeremo con Ω_0 , di curve Γ appartenenti a un complesso lineare Λ ; curve razionali di ordine $n + v$ (se Ω è in posizione generale rispetto agli elementi Λ , a della mia Nota cit.), appoggiate alle rette p_0 e r_0 rispettivamente in v e in n punti, e assoggettate a ulteriori $n + v - 1$ condizioni; tante appunto quante ne occorrono per staccare la congruenza di cui trattasi dal sistema di tutte le Γ^{n+v} razionali appartenenti al complesso Λ , le quali dipendono da $2(n + v) + 1$ parametri. Per le γ , le $n + v - 1$ condizioni corrispondenti consistevano⁽³⁾ nell'essere tangenti a certe linee piane (sostituibili eventualmente con punti) una o più volte, anche con contatti di ordini superiori assegnati, o in punti assegnati. A queste linee o punti corrispondono in S_3 delle linee, appartenenti al complesso lineare Λ ; e perciò le curve Γ della congruenza Ω_0 si appoggeranno in $n + v - 1$ punti a certe linee fisse, appartenenti esse pure al complesso, e che saranno perciò direttrici e linee singolari della congruenza; e anche linee focali, essendo appunto luoghi di *fuochi* delle singole Γ . Anche le rette p_0 e r_0 saranno naturalmente direttrici e linee focali. E potranno altresì le Γ avere qualche punto comune (immagine di un elemento comune a tutte le γ), il quale assorbirà allora *due* condizioni fra le $n + v - 1$. È da osservare che tutti questi fuochi sono *doppi*, cioè ne assorbono due di quelli che spetterebbero alle Γ^{n+v} di una congruenza generica in S_3 ⁽⁴⁾, perchè le tangenti in un tal fuoco alle linee della congruenza che passano per il punto stesso stanno in un medesimo piano (il piano polare del punto rispetto al complesso lineare), il quale contiene pure la tangente in quel punto alla direttrice della congruenza; mentre i punti eventualmente comuni a tutte le linee della congruenza sono, sempre rispetto al caso più generale, fuochi quadrupli. (Per es.: una congruenza del 1° ordine di rette, contenuta nel complesso, e con direttrici appartenenti anche al complesso, ha una sola direttrice; e i due fuochi di ogni retta coincidono nella sua intersezione

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1928.

(2) Questi «Rendiconti», p. 529, fasc. 11.

(3) V. la mia Nota a p. 445, fasc. 10, di questi «Rendiconti».

(4) DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, vol. 2° (1ª o 2ª ediz.), p. 10.

con questa direttrice. Sono di questo tipo le congruenze lineari $[p]$ e $[r]$ della mia Nota precedente).

Se le curve piane $\gamma^{n, \nu}$ passano tutte per A , ovvero sono tutte tangenti alla retta a , o anche contengono l'elemento fisso Aa , il numero $n + \nu - 1$ dei fuochi non appartenenti a p_0 nè a r_0 si riduce a $n + \nu - 2$ o rispettivamente $n + \nu - 3$. Una riduzione ulteriore si ha se gli stessi elementi fossero multipli per le γ . In ogni caso indicato con m l'ordine delle linee Γ costituenti la congruenza Ω_0 , sopra ogni Γ vi saranno in tutto $2m - 1$ fuochi, generalmente distinti. Viceversa, ogni congruenza del 1° ordine di curve razionali appartenenti al complesso Λ e vincolate *soltanto* ad appoggiarsi un conveniente numero di volte a linee anche del complesso (incluso il caso di contatti) o a passare per punti assegnati, avrà per immagine nel piano un sistema Ω . Invero; le linee della congruenza, se di ordine m , saranno vincolate a $2m - 1$ condizioni semplici del tipo accennato; e (supposto di prendere come rette p_0 e r_0 due rette del complesso che non siano direttrici di quella congruenza) le immagini piane γ delle dette linee saranno (n. 4 della Nota precedente) di ordine e classe $2m$ con due punti m^{bi} infinitamente vicini; con ulteriori nodi e cuspidi in numeri rispettivamente eguali agli ordini delle rigate delle corde principali e delle tangenti di una Γ^m , cioè $(m - 1)(m - 3)$ e $2(m - 1)$; vincolate infine a loro volta a $2m - 1$ contatti con linee assegnate (o casi particolari). Da queste condizioni risultano appunto assorbite (come si può verificare) tutte le intersezioni di una γ colle sue infinitamente vicine, tranne una soltanto; mentre è pure ovvio che un elemento generico del piano appartiene a una sola γ : si tratta perciò di un sistema Ω .

La determinazione delle trasformazioni di contatto birazionali del piano, ossia dei sistemi Ω di curve piane, equivale pertanto alla determinazione di tutte le congruenze di tipo Ω_0 appartenenti a un complesso lineare, ossia delle congruenze del 1° ordine di curve razionali di un ordine qualsiasi m appartenenti al complesso, vincolate ad appoggiarsi in $2m - 1$ punti a curve assegnate appartenenti esse pure al complesso, o a condizioni che possano considerarsi come casi particolari di queste.

2. Le trasformazioni di contatto birazionali del piano, risultanti da trasformazioni cremoniane del piano punteggiato o del piano rigato « estese » agli elementi lineari nel senso già precisato al n. 2 della mia nota, avranno per immagini trasformazioni cremoniane di S_3 inerenti al complesso lineare, e che mutano in sè stessa la congruenza lineare (p) , o rispettivamente la (r) . Queste particolari trasformazioni cremoniane di S_3 risultano già completamente definite dalla trasformazione birazionale subordinata nella congruenza (p) od (r) . Fissata ad es., una retta p della congruenza (p) , tutte le rigate della congruenza (p) che contengono quella p e un'altra determinata retta p' infinitamente vicina alla prima (rigate raccordate perciò lungo la p) conducono a una stessa proiettività di Chasles fra la punteg-

giata p e il fascio dei relativi piani tangenti di asse p ; proiettività che con quella determinata, tra le stesse forme, dal complesso lineare, ha due coppie comuni, una delle quali fissa, costituita dal punto e dal piano. pp_0 . Tenendo conto solo dell'altro punto su p , il ragionamento è invertibile; in questo modo il sistema delle ∞^1 rette p' infinitamente vicine a p entro la (p) viene riferito proiettivamente alla stessa p come punteggiata; ed appare chiaro come, in una trasformazione cremoniana vincolata a mutare in sè il sistema degli elementi punto-piano del complesso lineare nonchè la congruenza (p) , quando si conosca la trasformazione subordinata entro la (p) , e quindi la corrispondenza proiettiva fra gli intorni di 2 rette omologhe, risulti determinata del pari la corrispondenza fra queste stesse rette come punteggiate. Sempre nelle stesse ipotesi, la costruzione, per ogni curva C dello spazio appartenente al complesso Λ , della curva C' corrispondente, può effettuarsi molto semplicemente nel modo che segue. Data la C , è determinata la rigata delle p appoggiate a C stessa, e della quale C è, all'infuori della direttrice rettilinea p_0 , l'unica direttrice (e asintotica) appartenente al complesso Λ . Essendo nota la trasformazione subordinata nella congruenza (p) , risulterà determinata la rigata omologa alla precedente; questa nuova rigata avrà del pari, all'infuori di p_0 , una sola direttrice e asintotica appartenente al complesso; e sarà questa la curva C' cercata.

Queste considerazioni si estendono alle trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare, nelle quali si impongono come omologhe due qualunque congruenze lineari speciali contenute nel complesso. Più generalmente ancora:

Nel piano, una trasformazione di contatto birazionale che muti un sistema Ω assegnato in un altro Ω' pure assegnato, distinto o coincidente, è completamente definita dalla trasformazione birazionale subordinata fra questi due sistemi ∞^2 di curve piane.

Nello spazio, una trasformazione cremoniana inerente a un dato complesso lineare risulterà definita assegnando ad arbitrio due congruenze del 1° ordine di tipo Ω_0 di linee del complesso fra loro corrispondenti — cioè due congruenze del 1° ordine di curve razionali appartenenti al complesso, aventi ordini arbitrari m, m' , assoggettate rispettivamente a $2m - 1$ e $2m' - 1$ condizioni semplici, consistenti nell'appoggiarsi in egual numero complessivo di volte a linee assegnate, anche appartenenti al complesso, incluso il passaggio per uno o più punti assegnati — e dando inoltre la corrispondenza subordinata fra le due congruenze. Se Γ e Γ' sono linee omologhe delle due congruenze, la corrispondenza proiettiva fra i loro intorni nelle due congruenze determina di conseguenza la corrispondenza fra le stesse Γ e Γ' come curve punteggiate. Una curva qualsiasi C appartenente al complesso Λ determina la superficie luogo delle Γ che ad essa si appoggiano, e della quale essa è, all'infuori delle linee singolari della congruenza, l'unica asintotica appartenente al complesso. La superficie corrispondente, luogo di

linee Γ' , avrà del pari una sola asintotica appartenente al complesso e non linea singolare; e sarà la linea C' omologa a C .

3. La questione (che finora non ho potuto risolvere) se le trasformazioni birazionali del piano si possano ottenere tutte come prodotti di trasformazioni elementari già note, cioè di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato « estese » agli elementi lineari, equivale all'altra, se le trasformazioni cremoniane dello spazio inerenti a un complesso lineare si possano tutte ottenere come prodotti di quelle particolari fra esse che mutano in sè stessa una delle due congruenze lineari (p) o (r) , ovvero anche, più generalmente, di quelle che mutano in sè una qualsiasi delle congruenze lineari speciali contenute nel complesso. Queste ultime trasformazioni si riconducono infatti con omografie a quelle che mutano in sè una delle congruenze (p) ed (r) ; e le omografie inerenti al complesso lineare hanno per immagini nel piano trasformazioni di contatto che mutano punti e rette in coniche, e che si ottengono facilmente come prodotti di trasformazioni cremoniane di punti e di rette.

Combinando fra loro trasformazioni di contatto birazionali del piano dei tipi elementari indicati, nascono solamente curve fondamentali *razionali*. Affinchè pertanto la questione posta potesse ricevere risposta affermativa, sarebbe necessario che ogni trasformazione cremoniana di S_3 inerente a un complesso lineare avesse soltanto curve fondamentali razionali. Questo non avviene per trasformazioni cremoniane qualsiasi di S_3 ; e non si vede *a priori* una ragione di diversa conclusione per le trasformazioni cremoniane inerenti a un dato complesso lineare.

4. La questione ora prospettata si può presentare anche sotto altra forma.

Due congruenze di tipo Ω_0 di curve di uno stesso complesso lineare si dicano fra loro *coniugate* quando le curve di ciascuna delle due incidenti a una curva fissa dell'altra formano, entro la prima, le ∞^2 famiglie ∞^1 di una rete omaloidica. Esempio semplicissimo, le due congruenze rettilinee (p) ed (r) , ossia due qualunque congruenze lineari speciali contenute nel complesso, a direttrici incidenti. La detta relazione ha carattere invariante rispetto alle trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare; e basta ch'essa si verifichi per una delle due congruenze rispetto all'altra, perchè si verifichi pure in senso inverso. Si tratta infatti, in ambo i casi, di condizioni riducibili alle seguenti: che in ciascuna delle due congruenze vi sia un'unica curva che si appoggia a due curve generiche dell'altra.

Chiamiamo per brevità *trasformazioni elementari* quelle particolari trasformazioni inerenti a un complesso lineare, che mutano in sè stessa una congruenza lineare speciale contenuta nel complesso. In ogni trasformazione cremoniana S inerente a un complesso lineare, a una congruenza lineare speciale contenuta nel complesso corrisponde una certa congruenza Δ di tipo Ω_0 . La proprietà eventuale della data trasformazione di potersi otte-

nere come prodotto di un numero finito di trasformazioni elementari equivale alla proprietà che dalla congruenza Δ si può passare a una congruenza lineare speciale pel tramite di un numero finito di congruenze di tipo Ω_0 ciascuna coniugata alla precedente.

Sia infatti Δ coniugata a un'altra congruenza Δ_1 , questa a Δ_2 , e così di seguito (congruenze tutte di tipo Ω_0 , appartenenti al complesso) fino a Δ_i , la quale ultima sia una congruenza di rette. Sia ancora Δ_{i+1} un'altra congruenza rettilinea dello stesso tipo, coniugata alla precedente, ossia con direttrice incidente alla direttrice di Δ_i . Esiste allora una trasformazione elementare che muta Δ_i in sè stessa, e Δ_{i-1} in Δ_{i+1} . In questa trasformazione alle congruenze $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ corrisponderanno nuove congruenze $\Delta', \Delta'_1, \Delta'_2, \dots$, anche di tipo Ω_0 , delle quali due consecutive sempre coniugate, e tali che la Δ'_{i-1} , che è la stessa Δ_{i+1} , si compone di rette. Avendo così, con una trasformazione elementare, ridotto di un'unità il precedente indice i , si ha un processo ricorrente che permette di ridurre, con successive trasformazioni elementari, i al valore 1; e, con una trasformazione ulteriore, la congruenza ultima trasformata di Δ a una congruenza di rette. Dopo di ciò la S differirà dal prodotto delle trasformazioni elementari precedenti, in ordine inverso, solo più per una trasformazione che muta una congruenza lineare speciale contenuta nel complesso in altra consimile; e questa pure si riduce facilmente a un prodotto di trasformazioni elementari.

Viceversa, supponiamo che con i trasformazioni elementari successive la congruenza Δ si muti successivamente nelle congruenze $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(i)}$, l'ultima delle quali si componga di rette. L'ultima di queste trasformazioni elementari, quella che muta $\Delta^{(i-1)}$ in $\Delta^{(i)}$, lascerà invariata una certa congruenza lineare di rette Φ , la quale, o sarà coniugata a $\Delta^{(i)}$, se le loro direttrici sono incidenti, oppure sarà tale che esisterà una congruenza rettilinea coniugata ad entrambe. Per conseguenza, $\Delta^{(i-1)}$ o sarà coniugata a Φ , che si compone di rette, oppure a un'altra congruenza di tipo Ω_0 , a sua volta coniugata a Φ . Ora $\Delta^{(i-2)}$ può mutarsi con una trasformazione elementare in $\Delta^{(i-1)}$, la quale è coniugata a una congruenza di rette, oppure ha una congruenza di rette fra le sue successive coniugate; perciò $\Delta^{(i-2)}$ avrà, fra le sue successive coniugate, una congruenza che può mutarsi con trasformazione elementare in una congruenza di rette, e avrà fra le sue coniugate ulteriori la congruenza di rette unita per quest'ultima trasformazione elementare. E così di seguito.

Notiamo in particolare: Se una congruenza Ω_0 ha fra le sue successive coniugate una congruenza di rette, altrettanto avviene di ogni sua trasformata mediante trasformazioni elementari.

Matematica. — *Sopra alcuni integrali di campo nel piano complesso.*
Nota del Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Divisioni nucleari di categoria in « Cryptochilum echini Mps. ».* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. A. RUSSO.

Numerose sono le ricerche dirette ad indagare il valore biologico della divisione nucleare diretta (*amitosi*) e di quella indiretta (*mitosi* o *cariocinesi*). Tali ricerche, però, non hanno chiarito, per le critiche che possono muoversi ai risultati dei vari autori, se l'uno sia un processo primitivo e l'altro di maggiore differenziamento cellulare, se fra di essi esista una graduazione, se l'uno segua all'altro nello stesso elemento, se l'uno e l'altro siano caratteristici di determinati tessuti in condizioni normali o patologiche, o pure se fattori chimici e fisici interni o dell'ambiente non vi abbiano un predominio ⁽²⁾. Nell'interpretazione di un fenomeno biologico così discusso sono anche in contrasto due tendenze, quella *meccanica*, che tutto vorrebbe ridurre a fattori fisici e chimici, e quella *vitalistica*, la quale, rimettendo in onore l'*entelechia* aristotelica, rimodernata oggi da Hans Driesch ⁽³⁾, non esclude tali fattori, ma ammette che cause interne diano una certa autonomia ai processi vitali, secondo i concetti di *armonia causale* e di *regolazione*.

Per quanto ha relazione con le divisioni nucleari degli Unicellulari, lo Ziegler ⁽⁴⁾ tentò di ricondurre il processo divisorio ad un fenomeno biologico, che avrebbe l'identico significato nei Protozoi e nei Metazoi. Secondo Ziegler, la divisione diretta non sarebbe un processo iniziale, ma terminale, cioè consecutivo alla divisione indiretta, e sarebbe legato con la funzione trofica, che, in tale periodo, assumono i nuclei. Difatti, negli Infusorii, il micronucleo, che ha funzione germinativa, si divide per *mitosi* ed in ultimo dà origine a macronuclei con funzione trofica, che si dividono per *amitosi*.

(1) Presentata nella seduta del 2 dicembre 1928.

(2) Per la ricchissima letteratura confrontare specialmente i lavori di FLEMMING, HIS, ZIEGLER, VON RATH, CONKLIN, WILSON, RHUMBLER, GALLARDO, PAOLO DELLA VALLE, il recente *Trattato* di GIUSEPPE LEVI e moltissimi altri.

(3) DRIESCH H., *Philosophie des organischen*. Quelle e Meyer, Lipsia, 1928. Vedi anche dello stesso autore: *Il vitalismo*. Storia e dottrina. Trad. di M. Stenta. Remo Sandron.

(4) ZIEGLER H. E., *Die biologische Bedeutung der amitotischen (direkten) Kernteilung im Tierreich*. « Biologisches Centralblatt », XI Bd. 1891.

Tale ricercatore ha notato anche che, nello stesso individuo cellulare rappresentato da un Infusorio, mentre il micronucleo si divide per *mitosi*, il macronucleo si divide contemporaneamente per *amitosi*, venendo con ciò implicitamente ad ammettere che fattori interni, relativi alla costituzione e funzione diversa dei nuclei, siano cause non trascurabili nel determinare i due processi.

Analogamente nei Metazoi, secondo Ziegler, il meganucleo delle cellule di alcuni tessuti del soma, con funzione secernente od assimilatrice, si dividono anche per *amitosi*, come il macronucleo degli Infusorii.

Pur non volendo generalizzare i fatti osservati in *Cryptochilum*, portandoli nel campo dei Metazoi, mentre confermo, con lo Ziegler, quanto era stato già osservato negli Infusorii da Bütschli, Maupas, R. Hertwig, debbo premettere che, nel Ciliato da me studiato, i fenomeni stessi si prestano ad una più esatta interpretazione del valore biologico dei processi divisorii, per i particolari messi in luce con l'analisi dei nuclei dei vari individui, che ne compongono il ciclo vitale.

In *Cryptochilum*, infatti, ho potuto distinguere due categorie d'individui e, relativamente a tale distinzione, si è osservato che la divisione nucleare si compie con processo diverso, in modo affatto caratteristico e costante; per cui, mentre negli individui della *Categoria A* essa avviene per *mitosi*, in quelli della *Categoria B* per *amitosi*. Qualche eccezione a tale regola si ha in alcuni stadii del ciclo, ma, come si dirà, ciò è relativo alla funzione, che, in tale periodo, compiono gl'individui.

Nel nostro Ciliato, unitamente ai due processi divisorii tipici, si osserva, in determinati individui, un altro processo, che, discostandosi dalla *mitosi* e dall'*amitosi*, ho chiamato *divisione atipica*, in quanto che la sostanza nucleare, dopo essersi disposta in fili, assume la forma propria alla divisione diretta.

Come ho rilevato in Note precedenti⁽¹⁾, la differenza di categoria è fondata sulla diversa quantità di sostanza nucleare, perchè, mentre in quella *A* può essere riferita ad 1, in quella *B* può riferirsi a $1/2$. Difatti, se si segue il comportamento dei micronuclei dei due gameti puri durante la *coniugazione principale*, dopo della quale si formano gli *exconiuganti* delle due categorie, che iniziano il ciclo, si rileverà che il micronucleo globuliforme del *Gamete A* si divide due volte per *mitosi* e che, dai quattro nuclei derivati, uno, uguale ad $1/4$, costituirà il micronucleo dell'*Individuo misto A*, mentre un altro emigra nel gamete *B*, dove compie una 3^a *mitosi*, dando origine a due nuovi nuclei, che sono perciò $1/8$, di cui uno costituirà il micronucleo dell'*Individuo misto B*. Tale differente quantità di sostanza nucleare

(1) Russo A., *I due cicli sessuali di Cryptochilum echini* Mps. si svolgono con due categorie d'individui, che si dividono e si rinnovano con modalità diverse, « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », vol. III, serie 6^a, Roma 1926.

dei micronuclei dei due *Individui misti* si trasmette a quelli dei vari individui della serie, per cui quelli della *Categoria A* avranno il micronucleo riferibile sempre ad 1, quelli della *Categoria B* lo avranno sempre riferibile a metà del primo.

La differenza del processo divisorio, che è correlativa alla differente quantità di sostanza nucleare, si collega però anche alle diverse attitudini biologiche degl'individui, costituenti le due categorie, attitudini, che si rivelano in modo evidente in alcuni momenti del ciclo, come fu esposto in altre Note ⁽¹⁾.

Credo opportuno fare notare preliminarmente che l'attitudine dei micronuclei a dividersi con processo diverso, si conserva anche quando essi

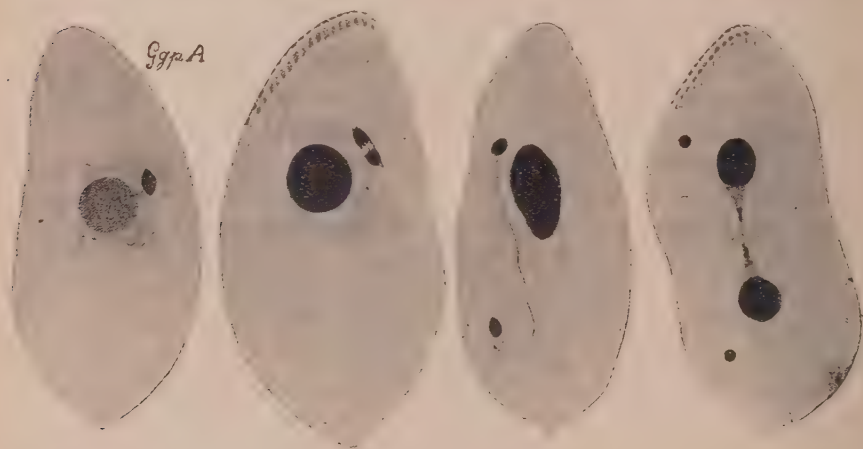


Fig. 1.

Divisione mitotica del micronucleo del Gametogene puro A, che dà origine a due Gameti puri della Categoria A. Si nota il filamento siderofilo staccato dai nuclei, derivati dalla mitosi. (Ggp. A = Gametogene puro A).

passano da un individuo di una categoria ad altro di categoria diversa. Difatti, sia alla fine della *coniugazione principale*, sia alla fine della *1ª coniugazione accessoria*, i nuclei migranti si dividono con il processo proprio degli individui, da cui provengono.

Negli *exconiuganti*, che si formano dopo la coniugazione principale, è dato anche osservare il caso molto significativo, cioè che il *nucleo migrante* e quello *permanente* si dividono contemporaneamente con processi diversi, ciascuno dei quali è caratteristico del nucleo dell'individuo da cui ebbero origine.

(1) ID., *Su l'attenuazione del potere sessuale dei Gameti impuri, che compiono la 2ª Coniugazione accessoria in Crypt. ech.*, «Rend. R. Accad. Naz. Lincei», vol. VI, serie 6ª, Roma 1927; ID., *La 1ª Coniugazione accessoria fra Gameti impuri in Crypt. ech.*, ibidem, vol. II, serie 6ª, Roma 1925.

Dopo tali premesse, passo in rassegna i processi divisorii dei micronuclei degl'individui delle due categorie, nei momenti più tipici del ciclo biologico.

Mitosi ed amitosi negl'Individui misti e nei Gametogeni puri ed impuri, formatisi dopo la Coniugazione principale.

Negl'individui sopra distinti, appartenenti alla *Categoria A*, il micronucleo si divide per *mitosi*: esso, dopo avere assunto, allo stato di riposo, la forma globosa con cromatina compatta, forma un fuso di filamenti acromatici, sul cui equatore si dispongono dei granuli fortemente colorati dai colori nucleari. In uno stadio successivo, tali granuli si portano ai due poli



Fig. 2.

Divisione amitotica del micronucleo del Gametogene puro B, che dà origine a due Gameti puri della Categoria B. In questi il micronucleo assume la forma di una virgola, mentre nel Gamete puro A ha forma di globulo. (Ggp. B = Gametogene puro B).

della figura fusoriale, dove si addensano in due masse compatte, mentre i fili del fuso si allungano e si uniscono fra loro formando un *filamento connettivo*, che, con i suoi estremi molto sottili, rimane legato per qualche tempo ai due nuclei figli. Il filamento connettivo, che si colora soltanto con le sopracolorazioni ottenute con l'Ematossilina ferrica, si stacca in seguito dai nuclei e permane per qualche tempo libero nel protoplasma ⁽¹⁾.

In tutti gl'individui della *Categoria B* invece il micronucleo si divide per amitosi. In questo caso esso si allunga e si strozza nel mezzo, acquistando la nota forma di un manubrio, senza che nella sua struttura avvenga alcun mutamento. In seguito le due parti estreme rigonfie si allontanano tra loro,

(1) Il Dogiel osservò e descrisse analogo filamento siderofilo nella divisione mitotica dei micronuclei di altri Ciliati. Cfr. « Archiv. f. Protistenkunde », Bd. 50, 1925.

restando legate da un esilissimo filamento, che presto si rompe, per cui i due nuclei figli assumono la forma globosa, o di una lacrima, o di una virgola, secondo i casi.

Divisione atipica durante la Coniugazione principale e la 2^a Coniugazione accessoria.

La *divisione atipica* si osserva nel micronucleo del *Gamete puro B*, durante la Coniugazione principale, ed in entrambi i nuclei dei *Gameti impuri* che compiono la 2^a Coniugazione accessoria.

Nella Coniugazione principale, come si è detto, il micronucleo globoso del gamete puro *A* si divide tre volte per *mitosi*, mentre il micronucleo virgoliforme del gamete puro *B* si divide due volte *atipicamente*. In questo, mentre la parte affilata si disperde nel circostante protoplasma, la parte ingrossata, da prima formata da cromatina compatta, si trasforma in un reticolo, che subito assume forma di fili paralleli tra loro, in modo da formare un fascio. Tali fili, in seguito, si dividono in due fasci contigui, i quali, slittando l'uno su l'altro, si allontanano, rimanendo legati da lacinie di sostanza nucleare ed in ultimo da un esilissimo filamento, che tosto scompare. La sostanza cromatica nei due nuclei figli permane alcune volte sotto forma di fili paralleli, ma altre volte diviene compatta, per cui, nella fase finale della divisione, si ha la forma di manubrio, come nella divisione diretta tipica.

La *divisione atipica* si osserva anche nei micronuclei di entrambi i *Gameti impuri*, che compiono la 2^a Coniugazione accessoria e che hanno pure forma di virgola più o meno allungata. Non ostante uno di tali gameti derivi dal *Gametogene impuro A* ed abbia il micronucleo con maggiore quantità di sostanza nucleare di quello del gamete *B*, che deriva dal *Gametogene impuro B*, pure le divisioni si compiono in entrambi con il processo atipico. Ma, come fu dimostrato in altra Nota ⁽¹⁾, in questa particolare coniugazione il potere germinativo dei gameti è attenuato, tanto che il processo gametico non giunge a termine, nè si sa se da esso si formino nuovi gameti puri, come chiaramente si è osservato nella 1^a Coniugazione accessoria ⁽²⁾.

Mitosi dei due micronuclei nei gameti impuri che compiono la 1^a Coniugazione accessoria.

In questa Coniugazione il micronucleo del *Gamete B*, che ha minore quantità di sostanza nucleare, si divide anche per *mitosi* e non per divisione atipica o per divisione diretta, come negl'individui della stessa categoria ⁽³⁾. I micronuclei dei gameti impuri *A* e *B* compiono le fasi tipiche della mitosi quasi contemporaneamente e dopo la 3^a divisione si ha lo scambio dei nuclei,

(1) Russo A., *Su l'attenuazione del potere sessuale, ecc.* Vedi Nota citata.

(2) *Id.*, *La 1^a Coniugazione accessoria, ecc.* Vedi Nota citata.

(3) Vedi figure nella Nota avanti citata.

per cui quello del gamete *A* passa nel gamete *B* e, rispettivamente quello del gamete *B* nel gamete *A*.

La eccezionale divisione mitotica del micronucleo del gamete *B* potrebbe dipendere dall'eccezionale potere germinativo assunto da due gameti impuri per la *ricostituzione di nuovi gameti puri*, come fu dimostrato in altra Nota ⁽¹⁾. Tale interpretazione, che può sembrare teleologica, potrebbe però avere un valore reale per il fatto che nella 2^a *Coniugazione accessoria* con carattere abortivo, essendo il potere sessuale dei gameti attenuato, i micronuclei di entrambi i gameti si dividono atipicamente ⁽²⁾.



Fig. 3.

Stadio finale della prima Coniugazione accessoria, in cui si osserva che i nuclei, migrati nel citoplasma di un individuo di altra Categoria, si dividono con il processo tipico della Categoria alla quale appartengono.

Mitosi del micronucleo del gamete puro o impuro A nell'exconiugante B, divisione atipica del micronucleo del gamete puro o impuro B nell'exconiugante A.

I micronuclei migrati, nella fase finale della Coniugazione principale o della 1^a Coniugazione accessoria, non ostante siano passati a far parte di un individuo di altra categoria si dividono con il processo proprio, carat-

(1) Russo A., *Gli exconiuganti, derivati dalla 1^a Coniugazione accessoria fra Gameti impuri in Cryptochilum echini, producono Gametogeni puri e Gameti puri, che rinnovano il ciclo principale*, «Rend. R. Accad. Naz. Lincei», vol. III, serie 6^a, Roma 1926.

(2) Id., *Su l'attenuazione del potere sessuale, ecc.* Vedi Nota citata.

teristico della propria categoria. Difatti, nell'*exconiugante B*, dopo la coniugazione principale, il micronucleo migrato dal gamete *A*, si divide per *mitosi*, mentre nell'*exconiugante A* il nucleo migrato dal gamete *B* si divide col processo atipico.

Lo stesso fenomeno, non ostante la diversità del nuovo individuo e quindi dell'ambiente protoplasmatico, in cui i nuclei si sono trasferiti, si avvera negli *exconiuganti*, che si costituiscono dopo la 1^a Coniugazione accessoria, come si osserva nella figura annessa.

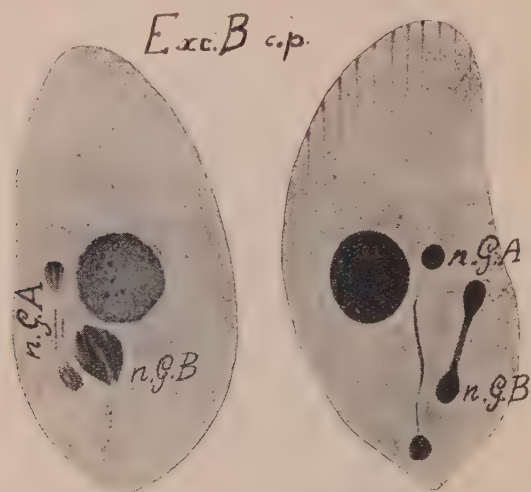


Fig. 4.

Due stadii di sviluppo dell'*exconiugante B*, costituitosi dopo la Coniugazione principale. Si osserva che contemporaneamente il *nucleo migrato* dal Gamete *A* si divide per *mitosi* e forma il caratteristico filamento siderofilo, mentre il *nucleo stazionario* o proprio del Gamete *B* inizia *atipicamente* la divisione, e negli stadii avanzati presenta la forma *amitotica tipica*. (Exc. B cp. = Exconjugante derivato dalla Coniugazione principale; n. G. A = nucleo migrato dal Gamete *A*, che si divide per mitosi; n. G. B = nucleo stazionario del Gamete *B* che inizia la divisione atipica. Nella figura di destra stadio più avanzato della divisione; n. G. A si è già diviso, formando il filamento siderofilo; n. G. B ha forma di manubrio, come nella divisione diretta tipica.

Divisioni mitotiche, atipiche ed amitotiche, che contemporaneamente si compiono nello stesso individuo dopo la Coniugazione principale.

Avendo seguito la provenienza dei nuclei, che si vengono a trovare insieme negli *exconiuganti*, dopo la Coniugazione principale, si è osservato che essi si dividono sempre con il processo tipico della propria categoria. Nell'*exconiugante A*, infatti, il micronucleo proprio si divide per *mitosi*, mentre quello migrato dal gamete *B* compie contemporaneamente la divisione atipica; nell'*exconiugante B* invece il nucleo proprio si divide atipicamente, mentre quello migrato dal gamete *A* si divide per *mitosi* (fig. 4).

Le divisioni mitotiche ed amitotiche negli exconiuganti, che danno origine ai gametogeni puri dopo la 1^a Coniugazione accessoria.

Negli *exconiuganti*, costituitisi dopo la 1^a coniugazione accessoria, come si è detto, si trovano i nuclei migrati, per cui in quello *A* è il nucleo del gamete *B*, in quello *B* è il nucleo del gamete *A*. Ciò non ostante, tali nuclei compiono due divisioni con il processo tipico agl'individui da cui derivano. Come si vede nella fig. 5, nell'*exconiugante B* il nucleo compie successivamente due divisioni indirette, dando origine ai quattro nuclei del

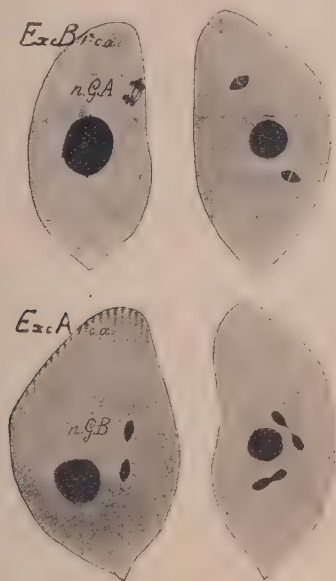


Fig. 5.

Exconiuganti della Categoria *A* (in basso) e della Categoria *B* (in alto), appena staccati, dopo la prima Coniugazione accessoria, di cui l'ultimo stadio fu rappresentato nella figura precedente. Nell'*exconiugante* della Categoria *A*, il nucleo migrato del Gamete *B* si divide due volte per *amitosi*; in quello della Categoria *B*, il nucleo migrato del Gamete *A* si divide due volte per *mitosi*. (*Exc. B* 1^a ca. = *Exconiugante B* derivato dalla prima Coniugazione accessoria; *Exc. A* 1^a ca. = *Exconiugante A* derivato dalla prima Coniugazione accessoria; n. G. *A* = nucleo migrato dal Gamete *A*; n. G. *B* = nucleo migrato dal Gamete *B*).

gametogene, mentre nell'*exconiugante A* il nucleo si divide successivamente anche due volte per formare i quattro nuclei dell'altro gametogene, ma con il processo tipico della divisione diretta.

*
* *

Dai fatti sopra esposti si rileva che, in *Cryptochilum echini*, i processi di divisione nucleare sono legati alla categoria degli individui, ai quali i nuclei appartengono, in quanto che quelli della Categoria *A* si dividono per *mitosi*, quelli della Categoria *B* per *amitosi*.

Poichè le due categorie sono distinte da una diversa quantità di sostanza nucleare, alla quale corrisponde un'attività particolare di tutto l'individuo, a me pare debba dedursi che la speciale divisione del nucleo sia determinata da fattori interni, che ne regolano il processo.

Il potere di regolazione si rende più manifesto ove si tenga presente che le *divisioni nucleari di categoria* si svolgono anche quando i nuclei sono passati in un ambiente citoplasmatico diverso, come, secondo me, lo dimostra il fatto che, alla fine della Coniugazione principale e della 1^a Coniugazione accessoria, i *nuclei migrati* si dividono, nel nuovo individuo, in cui sono penetrati, con il processo originario, che ad essi è proprio.

Ancora più saliente, a tale riguardo, sembra il caso in cui, trovandosi nello stesso individuo due nuclei di categoria diversa, il *migrante* e lo *stazionario*, come negli exconiuganti costituitisi dopo la Coniugazione principale, ciascuno si divide *contemporaneamente* con il processo proprio della categoria, a cui appartiene.

Relativamente all'influenza che possa esercitare sul processo divisorio l'attività particolare degli individui, in determinati momenti del ciclo, occorre tenere presente che, nella 1^a Coniugazione accessoria, anche il nucleo del *gamete impuro B*, con quantità di sostanza nucleare minore di quella del *gamete A*, si divide per *mitosi*, mentre, nella 2^a Coniugazione accessoria, i nuclei di entrambi i gameti compiono la *divisione atipica* o quella amitotica. Come avanti si è detto e come fu esposto più ampiamente in Note precedenti, nel primo caso il potere sessuale dei gameti è molto attivo per lo sviluppo di nuovi gameti puri, a cui la coniugazione dà luogo, mentre nel secondo il potere sessuale dei gameti è molto attenuato, tanto che la coniugazione ha carattere abortivo.

I fatti esposti, di natura morfologica⁽¹⁾, secondo me, dimostrano che essi siano la manifestazione di fattori interni, dipendenti da uno stato particolare della sostanza nucleare, in determinati momenti del ciclo biologico di *Cryptochilum*; però, non si esclude che fenomeni fisici e chimici intervengano, nei processi di divisione sopra descritti, solo nel loro svolgimento e come fattori secondari.

(1) Le ricerche di pura morfologia, specialmente quando sono accoppiate all'esperimento o allo studio del dinamismo, relativo alla serie degli stadii evolutivi dei cicli cellulari, che solo lo *zoologo*, il *botanico*, l'*anatomo comparato*, l'*istologo* o il *citologo* possono fare, sono di tale portata da non dovere essere mai trascurate nella indagine dei fenomeni biologici.

Biologia. — *Seguito alle ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio Straniero L. A. HERRERA.

Bustalioni scrisse che era lontano il giorno nel quale si sarebbe trovato il processo per dare una organizzazione alle albumine ⁽³⁾. Ma ora, come ho dimostrato nelle mie Note precedenti, io sono riuscito ad ottenere queste organizzazioni, per quanto imperfette.

Diversi perfezionamenti portati alla mia tecnica hanno dato nuovi risultati e la fig. 1 ha l'aspetto generale delle tavole citologiche.

Gli organismi e le cellule naturali qui imitate si trovano nei testi seguenti:

6166 a. — *Croococcus* R. B. Francé. « Das Leben der Pflanze ». Stuttgart 1908, t. 3°, p. 147, fig. A-2. 300 diam.

6166 b. — Id. Id. fig. A-2-3. 600 diam.

6166 a. — $1\frac{1}{2}$ micron, *Botrydina vulgaris*. Griffith « Micrographic Dictionary », London 1855, tav. 3, fig. 9. d.

6181. — R. B. Francé, loc. cit., fig. B 1-b. 600 diam.

6184. — Id. Id. *Desmidium Grevilli*, p. 200, fig. 30.

6178. — Id. Id. *Bulbochaete*, p. 274. Cellule germinanti. Alghe verdi. *Vaucheria*. Id. Id., p. 278, fig. 8.

6181 e 6184. — Oogoni di *Nitella flexilis*. Id. Id., p. 285, fig. 3.

Si potrebbe continuare indefinitamente questa lista.

La tecnica è stata la seguente:

6166, 28 agosto 1928. — Bianco d'uovo in natura: 5 ccm³; acqua: 4 ccm³. Si deposita in strato sottile su quattro punti della laminetta. Così tra porta-, e copri oggetti. Vi si aggiunge alcune gocce di acido solforico (60° B: 5 ccm³; acqua distillata: 5 ccm³). Al microscopio nella preparazione conservata colla glicerina si osserva: protoplasma imitato, globuli di 1-2 micron. *Chroococcus*.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto degli Alti Studi Biologici di Messico D. F.

(2) Presentata nella seduta del 2 dicembre 1928.

(3) *Le cellule artificiali sono in certo modo più o meno analitiche, quelle reali più o meno sintetiche.* In questo sta la grande differenza che solo potrà forse venir colmata quando avremo a disposizione gli albuminoidi di laboratorio e processi speciali per evocare in questi la struttura cellulare. Ma passerà ancora molto tempo prima che un tale risultato venga raggiunto, se pure lo sarà. « Malpighia », 1919-20, p. 62. Nelle Note precedenti dimostrai che l'albumina si organizza cogli acidi; in una Nota prossima mostrerò che è sufficiente scaldare uno strato d'albumina in una lamina di vetro per ottenere un bell'aspetto cellulare per azione delle bolle di vapore che si formano in seno al colloide.

6178, 3 settembre 1928. — Bianco d'uovo in natura: 5 ccm³; acqua: 30 ccm³. Si depositano delle goccioline fine su un copri-oggetto e questo è messo su una laminetta collo stesso acido solforico diluito. Il bianco



Fig. 1.

d'uovo deve essere triturato in un mortaio prima e dopo la diluizione; si filtra. Si preleva il filtrato colla testa d'uno spillo. Strutture finissime, che si raccorciano, si dividono quindi come i cordoni delle emulsioni di olio e di alcali di Bütschli. Queste strutture sono emulsioni d'albumina nell'acido solforico, più che il risultato dell'idrolisi della proteina. Questa osservazione

è importante data la grande analogia esistente tra le dette emulsioni ed il protoplasma naturale.

6179, 4 settembre 1928. — Bianco d'uovo in natura: 5 ccm³; acqua: 40 ccm³. Si tritura in un mortaio e si filtra. Si preleva il filtrato limpido con una testa di spillo. Si fa agire l'acido solforico diluito al 50 %; si lava dopo cinque minuti e si conserva nella glicerina. I nuclei si congiungono e forse si segmentano. Vacuoli e granulazioni.

6184, 8 settembre 1928. — Bianco d'uovo in natura: 5 ccm³; acqua: 40 ccm³. Soluzione di gomma arabica: 5. Tra due laminette, una delle quali con uno strato di acido diluito. Aspetto fine di protoplasma e cordoni. Oogoni di *Nitella*.

6186, 10 settembre 1928. — Bianco d'uovo in natura; alcune goccioline su un copri-oggetto. Si deposita su una laminetta coll'acido solforico diluito. Dopo cinque minuti si lava e si conserva nella glicerina.

6190, 14 settembre 1928. — Il bianco d'uovo tra un porta-, ed un copri-oggetto. Una lamina di caucciù per proteggerli, un peso di 28 kg. sul vetro superiore per ottenere uno strato capillare d'albumina. Si insinuano delle gocce dell'acido diluito che penetrano per capillarità. Ore 6.5' pomeridiane. Il copri-oggetto ha 20 mm. di diametro. Ore 6.30': il tempo è insufficiente. Si ripete lasciando 24 ore. Le strutture sono state disciolte. Si ripete. Settembre 17: dalle 11.50' alle 16.30'. Altra preparazione dalle 5 pomeridiane del 17 alle 9 antimeridiane del 18 settembre. 16 ore. Imitazione di protoplasma granuloso fine e vacuolizzato di 2 a $2\frac{1}{2}$ micron.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sul concetto di limite.* Nota di U. CASSINA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. PEANO.

In un gruppo di miei recenti lavori ⁽²⁾ ho iniziato lo studio delle funzioni plurivoche, estendendo ad esse la teoria dei limiti. Ho così avuto occasione di occuparmi dei vari significati attribuiti dagli autori più celebri alla parola *limite*; e di rilevare le analogie, le differenze caratteristiche e l'importanza relativa (per le applicazioni e le possibili estensioni) fra i vari concetti logici espressi con la parola generica « limite ».

(1) Nella seduta del 16 dicembre 1928.

(2) U. CASSINA, *Limiti delle funzioni plurivoche*, « Atti R. Accademia delle Scienze di Torino », v. 62, 1927, pp. 4-21; Id., *Nuove proprietà dei limiti delle funzioni plurivoche*, « Rendiconti R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », v. 60, 1927.

Ed ora, in questa Nota, mi propongo di esporre brevemente ed in modo del tutto elementare i risultati di questa mia indagine storica e critica (1).

1. — Limite e classe limite ordinari di una funzione univoca.

Sia f una *funzione reale di variabile reale*, cioè tale che ad ogni numero reale faccia corrispondere un numero reale; e sia x un numero reale. Allora l'idea grossolana intuitiva del « *limite* della funzione f quando la variabile tende ad x », si ha dallo studio del comportamento della f nelle « vicinanze » del numero x .

Precisamente, dal punto di vista intuitivo, se a è un numero da dirsi *limite* della funzione f quando la variabile tende ad x , occorre che « vicino » ad x la funzione f assuma dei valori « vicini » ad a .

Precisando il significato di questa parola « vicino » e l'ordine con cui si enunciano le condizioni a cui deve soddisfare il numero a , si ottengono le definizioni logiche precise del concetto di limite d'una funzione univoca.

Comunemente suol darsi la definizione seguente:

I. — « Sia f una funzione reale di variabile reale e siano a ed x dei numeri reali; allora si dice che a è eguale al *limite* della funzione f mentre la variabile tende ad x , quando per ogni quantità positiva k esista almeno una quantità positiva h tale che, per ogni numero reale y diverso da x e tale che il valore assoluto della differenza $x - y$ sia minore di h , avvenga che la differenza fra fy ed a sia in valore assoluto minore di k ».

Questa definizione, che è espressa mediante le più elementari proprietà dell'algebra, dal punto di vista logico, si fa notare per la comparsa in essa di *tre* lettere apparenti k, h, y ; le quali sono accompagnate dalle locuzioni « qualunque sia k », « esiste un h », « qualunque sia y ». Ciò prova che la proposizione I è — secondo il linguaggio della logica scolastica — « *universale* in k , *esistenziale* in h , *universale* in y »; e quindi essa può essere rappresentata simbolicamente con la scrittura: $\mathcal{O} \exists h \mathcal{O}_y$.

La definizione I è quindi di difficoltà logica più elevata delle definizioni di « massimo », « minimo », « limite superiore », « limite inferiore » e « classe derivata » d'una classe di numeri reali; perchè in queste figurano soltanto *una o due* lettere apparenti (2).

Se noi facciamo le 8 disposizioni con ripetizione del terzo ordine dei simboli $\mathcal{O} \exists$ ed ad esse associamo le 6 permutazioni semplici delle lettere k, h, y , otteniamo 48 successioni simboliche del tipo « $\mathcal{O}_k \exists_h \mathcal{O}_y$ », che danno 48 proposizioni, nelle quali però è identica la parte aritmetica:

(1) Lavori notevoli, e che hanno analogia con l'attuale, sono i seguenti: G. PEANO, *Sur la définition de la limite d'une fonction*, « Americ. Journ. », 1894. t. 17, pp. 38-68: Id., *Sulla definizione di limite* (« Atti R. Acc. Scienze di Torino », v. 48, 1912-13).

(2) V., p. es., G. PEANO, *Formulario mathematico* ed. V, Torino, 1908.

« h e k sono quantità positive, y è una quantità reale, $\text{mod } (x - y) < h$, $\text{mod } (fy - a) < k$ »;

e che perciò, con il linguaggio ordinario, è facile confondere.

Ebbene, di queste 48 proposizioni, una sola — quella che corrisponde alla successione $\supset_k \exists_b \supset_y$ — dà la definizione di « *limite* » (che dirò « ordinario ») d'una funzione reale di variabile reale ».

La definizione I, sopra riportata, trovasi in O. Bonnet (« Bull. des sciences math. », 1871, t. 2, p. 215) ed è quella usata comunemente dagli autori. Ma un'altra definizione molto importante è quella che si ottiene come corrispondente alla successione « $\supset_k \supset_b \exists_y$ », cioè quella che si ottiene conservando inalterata la successione delle lettere apparenti, ma facendo scambio fra i segni \supset ed \exists .

Si ha così la proposizione:

II. — « Nelle solite ipotesi, si dirà *classe limite* della funzione f quando la variabile tende ad x », la classe formata da ogni numero reale a tale che, prese ad arbitrio le quantità positive k ed h , esista sempre almeno un valore y diverso da x , tale che il valore assoluto della differenza $x - y$ sia minore di h e che il valore assoluto della differenza $a - fy$ sia minore di k ».

Ogni numero a , appartenente alla classe limite testè definita, si dirà « un *valore limite* della funzione f quando la variabile tende ad x ».

L'opportunità di usare ancora la parola « *limite* » risulta dal fatto che anche ogni elemento appartenente alla « classe limite » gode della proprietà che « vicino » ad esso vi sono dei valori y per i quali la funzione f assume dei valori « vicini » ad a .

Il concetto di « *valore limite* » e la considerazione sporadica della « classe limite » di una funzione rimonta ad A. Cauchy (1821, *Analyse algébrique*, p. 30 e p. 121); ma l'uso sistematico di questa « classe limite » e la determinazione dei suoi legami con il « *limite ordinario* », definito dalla I, sono dovuti a G. Peano (1893, *Sur la définition de la limite d'une fonction*, « Americ. Journ. », 1894, t. 17, pp. 38-68).

Un esempio, tolto da Cauchy, illustrerà senz'altro la differenza fra il *limite ordinario* — che indicheremo con « *lim* » — e la *classe limite* — che indicheremo con « *Lm* ».

Sia f la funzione definita per ogni valore reale x dall'eguaglianza « $fx = \sin (1/x)$ ». Allora è ben noto come « non esista il *limite ordinario* di $\sin (1/x)$ quando la x varia tendendo a zero ». Invece la « *classe limite* di $\sin (1/x)$ per x tendente a zero è composta di ogni numero reale dell'intervallo di estremi -1 ed $+1$ (estremi inclusi).

Ricordiamo alcune delle più importanti proprietà dimostrate da Peano nel lavoro citato: « La classe limite della funzione f non è mai vuota »; « Se la classe limite della funzione f si compone d'un solo elemento, allora questo nè è il *limite ordinario* »; « La classe limite della funzione f

è chiusa nel senso di G. Cantor, cioè contiene la sua classe derivata», quindi « ammette massimo e minimo ».

Questo *massimo e minimo valore limite* sono considerati da tutti gli autori. A questi valori il Cauchy, nell'op. cit., p. 130, ha dato il nome di « plus grânde et plus petite limite », denominazione usata anche da H. Abel (1826, *Oeuvres*, t. 2, p. 199). Qualche altro autore ha invece dato ad essi il nome di « limiti di indeterminazione » (*Unbestimmtheitsgrenzen*).

Dalle definizioni I e II di « limite ordinario » e di « classe limite » d'una funzione reale di variabile reale si ottengono facilmente le definizioni di « limite ordinario » e di « classe limite » d'una funzione reale definita in un qualunque campo u di numeri reali, ed allora il valore x per il quale si calcolano i limiti deve risultare appartenente alla classe derivata di u . In particolare, se come classe u si prende la classe dei numeri naturali, si hanno le definizioni di « limite ordinario » e di « classe limite » per le *successioni infinite*.

Nel caso del limite ordinario si perviene all'enunciato ben noto seguente:

III. — « Sia u una successione infinita di numeri reali e sia a un numero reale; allora si dice che a è uguale al « limite di u_r al variare di r nel campo dei numeri naturali ed al tendere all'infinito », se per ogni quantità positiva k esiste almeno un numero naturale b tale che, per ogni intero y maggiore di b , avvenga che il valore assoluto della differenza $a - u_y$ sia minore di k ».

2. — Limite e classe limite delle funzioni univoche dedotti dalle successioni.

Qualche autore ha introdotto il concetto di « limite d'una funzione reale di variabile reale » deducendolo da quello di « limite d'una successione ». In tal modo, si possono introdurre due concetti, che distingueremo coi nomi di « limite dedotto dalle successioni » e di « classe limite dedotta dalle successioni », e simbolicamente con le scritture « lims » e « Lms ». Eccoli:

IV. — « Sia f una funzione reale di variabile reale e sia x un numero reale; allora « la classe limite dedotta dalle successioni relative alla funzione f e calcolata quando la variabile tende ad x », si definisce come la classe costituita dal numero fx e da ogni numero reale a per il quale esiste almeno una successione y di numeri reali avente x come limite ordinario e tale che il limite ordinario della successione ottenuta applicando f ai valori di y sia eguale ad a ».

Tale classe è stata considerata da C. Neumann nel 1875⁽¹⁾, e da lui detta *Werthvorrat* (« riserva di valori »).

(1) V. « Abhandl. Akad. München », 1875, v. 12, p. 124.

V. — « Suppongasì ora che la classe testè definita si componga d'un sol numero, allora tale numero verrà detto « *il limite dedotto dalle successioni relative alla funzione f e calcolato quando la variabile tende ad x* ».

Tale definizione di limite è stata adoperata da qualche autore, invece della definizione I, (v. per es. C. Arzelà, *Lezioni di calcolo infinitesimale*, 1901, v. I, pp. 94-96). Dalle definizioni II e IV risulta che la « riserva di valori » di Neumann è contenuta nella « classe limite » di Cauchy. Non può invece dimostrarsi il viceversa; almeno se non si vuole fare ricorso al principio logico delle *infinite scelte arbitrarie*. Principio, questo, conosciuto sotto il nome di « postulato di Zermelo », perchè dato da questo autore nel 1904 nei « *Mathematische Annalen* » (t. 59, pp. 514-516); sebbene questo principio logico fosse stato analizzato ampiamente già 14 anni prima dal Peano nella stessa rivista (« *Math. Ann.* », 1890, t. 37, p. 210), il quale, in particolare, aveva dimostrato come esso fosse una forma di ragionamento « polisilogistica » nella quale però la catena delle premesse è infinita (non numerabile), e quindi non rientrasse nel tipo classico dei ragionamenti matematici.

Da quanto si è detto risulta come la definizione V di « limite dedotto dalle successioni » non equivalga — dal punto di vista logico — alla definizione I di « limite ordinario »; e ciò risulterà ancor più chiarito dal teorema con cui si chiude la presente Nota.

3. — Limiti delle funzioni plurivoche.

Richiamati questi concetti vengo ad accennare all'estensione della teoria dei limiti alle funzioni *plurivoche*. Della cosa ho avuto occasione di occuparmi ampiamente⁽¹⁾. Ma qui, per semplicità, mi riferirò soltanto alle funzioni *plurivoche numeriche*, cioè alle funzioni che ad ogni numero reale fanno corrispondere una classe non vuota di numeri reali; e fisserò la mia attenzione soltanto su alcuni casi particolari della definizione della « classe limite »; e delle proprietà da me stabilite mi limiterò a ricordare quelle che servono ad illuminare ancor meglio i concetti di limite delle funzioni univoche.

Così: « se si suppone che f sia una funzione numerica plurivoca definita per ogni numero reale e che x sia un numero reale; allora la « *classe dei valori limiti* di f quando la variabile tende ad x » è costituita da ogni numero reale a tale che, preso ad arbitrio le quantità positive k ed h , esista sempre almeno un numero reale y diverso da x , tale che il valore assoluto della differenza $x - y$ sia minore di h e che la *distanza* fra fy ed a sia minore di k ».

Ove per « *distanza* del numero reale a dalla classe fy » si intende il *limite inferiore* della classe formata dai numeri del tipo $a - \chi$ al variare di

(1) Cfr. i lavori citati nella prima postilla.

α nel campo fy . Da notarsi che questa definizione di *classe limite* (da indicarsi con Lmf) è, al pari della II, caratterizzata dalla successione: $\supset_k \supset_b \exists_y$.

Dopo ciò, conviene considerare la funzione Λf , prodotto funzionale della funzione plurivoca f per Λ — che definisco ⁽¹⁾ come « la funzione che applicata ad un qualunque numero reale y lo trasforma nella minima classe chiusa (nel senso di G. Cantor) contenente fy »; ed introdurre inoltre il concetto di « funzione (univoca) subordinata dalla funzione plurivoca f . Precisamente dico che « g è una funzione (univoca) subordinata dalla nostra funzione plurivoca f , quando è tale che se y è un numero reale, allora qualunque sia questo y , avvenga che il suo corrispondente in g (cioè gy) sia un valore appartenente alla classe fy ».

Si dimostra allora facilmente che « le funzioni plurivoche f e Λf hanno classi limiti eguali »; e, dopo alcuni lemmi preliminari, si giunge a dimostrare esattamente, e senza fare uso del principio delle infinite scelte arbitrarie, il teorema fondamentale sulla costituzione della classe limite delle funzioni plurivoche. Cioè che:

« Nelle ipotesi precedenti, la classe dei valori limiti di f è costituita « da tutti e soli i numeri reali a , per i quali esiste almeno una funzione « subordinata da Λf e sia g , tale che a sia un valore limite di g ».

Sotto forma abbreviata, leggendo « figura variabile » al posto di « funzione plurivoca », può dirsi:

I valori limiti d'una figura variabile sono tutti e soli i valori limiti degli elementi variabili appartenenti alla minima figura chiusa che la contiene.

Vengo ora ad accennare alla definizione di « classe dei limiti unici » della funzione plurivoca f (per cui ho fatto uso della notazione « $\lim f$ »), che è la generalizzazione del concetto di limite ordinario per le funzioni univoche.

Definisco tale classe come « la classe formata da tutti i numeri a per i quali esiste almeno una funzione subordinata da Λf e sia g ammettente a come limite ordinario ». Dopo di che, dimostro che « la classe dei limiti unici è sempre contenuta nella classe dei valori limiti » ed inoltre — ed ecco una prima differenza notevole con la teoria dei limiti delle funzioni univoche —, mentre per le funzioni univoche il limite ordinario esiste quando e soltanto quando la classe dei valori limiti è composta da un solo elemento, ora si trova che « possono esistere entrambe le classi “ $\lim f$ ” e “ Lmf ” senza essere eguali ».

Ciò è messo in luce dal semplice esempio seguente:

La funzione f sia quella che ad ogni numero reale x fa corrispondere la classe composta dai numeri $\sin(1/x)$ e $\cos x$; allora la classe dei valori limiti di f quando la variabile tende a zero si compone di tutti i numeri reali compresi fra -1 e $+1$ (estremi inclusi); mentre la classe dei limiti unici di f quando la variabile tende a zero si compone del solo numero 1 .

(1) Nota c. della R. Accademia di Torino, § 3.

Infine, come caso particolare d'una proposizione stabilita per le funzioni plurivoche, giungo ad un risultato che precisa ancor meglio il legame fra il *limite ordinario* ed il *limite dedotto dalle successioni* di una funzione univoca. Invero ottengo:

« Sia f una funzione univoca definita nel campo u ed x un elemento « di condensazione di $u^{(1)}$ ed a un valore limite di f quando la variabile « variando in u tende ad x ; allora esiste un campo v contenuto in u , avente « x come elemento di condensazione e tale che a sia il *limite ordinario* della « f quando la variabile variando nel campo v tende ad x ».

Dunque:

« Se a è un valore limite della funzione univoca f quando la variabile tende ad x variando in u , in generale *non è vero* che esista una classe v appartenente ad u , costituita dai valori che assume una *successione infinita* avente x come limite ordinario e tale che il limite ordinario della f calcolato quando la variabile tende ad x assumendo i valori di v sia eguale ad a ; invece la proposizione enunciata diventa vera se si toglie la restrizione che questa classe v debba essere formata dai valori di una certa successione infinita ».

Calcolo funzionale. — *Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti.* Nota I di L. FANTAPPIÈ, presentata ⁽²⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Come risulta dalle recenti ricerche di Heisenberg, Born, Jordan ⁽³⁾, si è ritenuto utile rappresentare le grandezze fisiche, che intervengono nei fenomeni atomici, non più con *numeri* (le loro misure), ma con *matrici infinite* $A = || a_{rs} ||$ ($r, s = 0, 1, 2, \dots$). D'altra parte il Wiener ⁽⁴⁾, e lo Schrödinger ⁽⁵⁾ colla sua *meccanica ondulatoria*, hanno mostrato come le stesse grandezze fisiche possono rappresentarsi con *operatori funzionali lineari*.

Mi propongo ora di far vedere come queste teorie possano trattarsi non solo con espressioni formali (serie simboliche), ma con espressioni aventi sempre uno o più significati, ben definiti, mediante la teoria matematica dei *funzionali analitici* ⁽⁶⁾, da me sviluppata recentemente.

(1) Cioè appartenente alla classe derivata di u .

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(3) W. HEISENBERG, « Zeitsch. f. Physik », 33, 1925, p. 879; M. BORN u. P. JORDAN, *ibid.*, 34, 1925, p. 858, e 35, 1926, p. 557.

(4) M. BORN u. N. WIENER, *ibid.*, 36, 1926, p. 174.

(5) E. SCHRÖDINGER, « Annalen der Physik », Bd. 79, 80, 81, 1926.

(6) L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*, « Rend. del Seminario mat. », Roma 1926, e varie Note preventive sui « Rendiconti dei Lincei » dal 1925 ad oggi.

2. Ricorderò perciò che un operatore funzionale si dice *analitico* quando, applicato a una funzione $y(t, \alpha, \beta, \dots)$ che dipenda analiticamente da alcuni parametri α, β, \dots , dà sempre per risultato una funzione *ancora analitica* di questi parametri. Questa condizione è soddisfatta da tutti gli operatori funzionali lineari, finora presentatisi (in generale sotto forma di integrali di Riemann, di Lebesgue, di Stieltjes, ecc.). Nel caso che il campo di applicazione dell'operatore si restringa alle funzioni $y(t)$ *analitiche* (dalle quali, del resto, si può, con successivi passaggi al limite, risalire alle funzioni continue, o anche discontinue delle successive classi di Baire) si ha che, indicando con $F[y(t)] = f$ l'operatore lineare («funzionale», come si dice comunemente) che a una funzione $y(t)$ fa corrispondere un numero f , in modo però che sia

$$(1) \quad F[y_1(t) + y_2(t)] = F[y_1(t)] + F[y_2(t)]$$

l'espressione più generale dell'operatore stesso è data dalla formula integrale

$$(2) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t) dt$$

in cui la funzione v , che si chiama la *funzione indicatrice* del funzionale, è data dalla relazione

$$(3) \quad v(\alpha) = F_t \left[\frac{1}{t - \alpha} \right]$$

mentre C è una curva del piano complesso (curva *separatrice*) che contiene nell'interno tutti i punti singolari della v , ma lascia all'esterno tutti quelli della v , l' ∞ intendendosi singolare, anche quando la funzione è regolare secondo la definizione ordinaria, ma è ivi $\neq 0$. La formazione integrale (2) si indica anche col nome di *prodotto funzionale emisimmetrico* delle due funzioni $v(t)$ e $y(t)$, e coi simboli

$$(4) \quad v(t) y(t)^* = \left\{ \frac{v(t)}{*} \right\} v(t)^* = v(t)^* \left\{ \frac{y(t)}{*} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t) dt = - y(t)^* v(t)$$

Posto

$$(5) \quad w(t) = - \frac{1}{t} v \left(\frac{1}{t} \right)^* \quad , \quad v(t) = - \frac{1}{t} w \left(\frac{1}{t} \right)$$

si chiama invece *prodotto funzionale simmetrico* $w(\hat{t}) v(\hat{t})$ delle due funzioni $w(t)$ e $y(t)$ l'espressione

$$(6) \quad w(\hat{t}) y(\hat{t}) = \left\{ \frac{- \frac{1}{t} w \left(\frac{1}{t} \right)}{*} \right\} y(\hat{t})^* = v(\hat{t})^* y(\hat{t})^*$$

essendo

$$(7) \quad w(\overset{\circ}{t})y(\overset{\circ}{t}) = y(\overset{\circ}{t})w(\overset{\circ}{t}) = \left\{ \frac{-\frac{1}{t}y\left(\frac{1}{t}\right)}{*} \right\} w(\overset{*}{t}).$$

Se $w(t)$ e $y(t)$ sono due funzioni analitiche regolari per $t = 0$, e gli sviluppi in serie di potenze

$$(8) \quad w(t) = \sum_0^\infty a_n t^n, \quad y(t) = \sum_0^\infty y_n t^n$$

sono convergenti entro due cerchi di raggi R, R' rispettivamente, tali che

$$(9) \quad RR' > 1$$

si dimostra facilmente che la serie

$$(10) \quad \sum_0^\infty a_n y_n$$

è assolutamente convergente, ed è precisamente

$$(11) \quad \sum_0^\infty a_n y_n = w(\overset{\circ}{t})y(\overset{\circ}{t}).$$

Può però accadere, e anzi questo sarà il caso generale, che, *pure non convergendo la serie (10), il prodotto simmetrico $w(\overset{\circ}{t})y(\overset{\circ}{t})$ conservi sempre un significato*, bastando, per la (6), che sia possibile trovare una curva separatrice C dei punti singolari delle due funzioni $v(t) = -\frac{1}{t}w\left(\frac{1}{t}\right)$ e $y(t)$, bastando cioè soltanto che *le due funzioni $w(t)$ e $y(t)$ non abbiano punti singolari reciproci* (nel qual caso $v(t)$ e $y(t)$ avrebbero punti singolari comuni, e la curva separatrice non esisterebbe più).

Sostituendo alle due successioni di numeri a_n e y_n (tali che $\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|y_n|}$ si mantengano limitate) le due funzioni analitiche $w(t)$ e $y(t)$, definite dalle (8), vediamo dunque che *la più naturale generalizzazione delle forme lineari (10) di infinite variabili y_n , studiate particolarmente dall' Hilbert ⁽¹⁾, è data appunto dal prodotto simmetrico (11) delle due funzioni w e y* . Quando infatti la forma lineare è una serie convergente, e il prodotto simmetrico $w(\overset{\circ}{t})y(\overset{\circ}{t})$ esiste, il suo valore coincide colla somma della serie, ma esso può esistere anche in molti casi, in cui, invece, la serie non converge.

(1) D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig u. Berlin, 1912.

Dalla (2) e dalla (6) si ha, inoltre, che, se è $F[y(t)]$ un qualunque funzionale analitico lineare, posto

$$(12) \quad w(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} v\left(\frac{1}{\alpha}\right) = F_1\left[\frac{1}{1-t\alpha}\right]$$

(funzione che si dice *indicatrice simmetrica* del funzionale lineare F), l'espressione generale di $F[y(t)]$, per qualunque funzione del suo campo di esistenza, è data semplicemente dal prodotto simmetrico

$$(13) \quad F[y(t)] = w(\hat{t})y(\hat{t}).$$

Se il funzionale F dipende, oltre che dalla funzione $y(t)$, anche da un parametro ζ (è un funzionale misto), a ogni funzione $y(t)$ il funzionale F farà corrispondere non più un numero ma una funzione $f(\zeta)$, che supporremo pure *analitica*

$$(14) \quad f(\zeta) = F[y(t); \zeta].$$

Anche per ogni funzionale lineare misto F (i quali sono poi quelli che più propriamente si indicano col nome di « operatori funzionali ») può però definirsi una *funzione indicatrice simmetrica* $w(\zeta, \alpha)$

$$(15) \quad w(\zeta, \alpha) = F_1\left[\frac{1}{1-t\alpha}; \zeta\right]$$

che lo caratterizza completamente colla formula

$$(16) \quad f(\zeta) = F[y(t); \zeta] = w(\zeta, \hat{t})y(\hat{t})$$

bastando considerare sempre il parametro ζ , volta per volta, come una costante.

In conclusione possiamo dunque dire che *ad ogni operatore funzionale lineare (analitico) $F[v(t); \zeta] = f(\zeta)$ viene in ogni caso a corrispondere una funzione analitica $w(\zeta, \alpha)$ di due variabili complesse, mentre, viceversa, a ogni tale funzione corrisponde sempre un operatore F , definito dalla (16), di cui essa è l'indicatrice simmetrica.*

3. Tornando al calcolo delle matrici di Heisenberg, Born, Jordan, ricordiamo che date due matrici infinite $A = a_{rs}$, $B = b_{rs}$ questi autori definiscono la matrice *somma* $A + B$, *prodotto* (righe per colonne) AB , colle relazioni

$$(17) \quad A + B \equiv \|a_{rs} + b_{rs}\|, \quad (18) \quad AB \equiv \left\| \sum_k a_{rk} b_{ks} \right\|$$

e, in modo ovvio, la *potenza* A^n , mentre data una funzione analitica

$f(\tilde{\lambda}) = \sum_n f_n \tilde{\lambda}^n$ (regolare per $\tilde{\lambda} = 0$), si definisce la matrice $f(A)$ coll'espressione

$$(19) \quad f(A) = \sum_n f_n A^n \equiv \left| \sum_n f_n a_{rs}^{(n)} \right|$$

se $a_{rs}^{(n)}$ è l'elemento generico della matrice A^n . Infine un'altra formazione particolarmente importante, anche per la formulazione variazionale dei principi della meccanica quantistica, viene introdotta dai detti autori, e cioè la « somma diagonale » (Diagonalsomme) $D(A)$ di una matrice $A \equiv \|a_{rs}\|$ (detta anche *traccia*), definita dalla serie,

$$(20) \quad D(A) = \sum_n a_{nn}.$$

In tutte queste definizioni non viene però esaminata la questione della *convergenza* delle serie considerate (funzioni lineari di infinite variabili) e quindi nemmeno quella dell'*esistenza* degli enti analitici da esse definiti. Volendo cercare una sistemazione rigorosa di questa teoria, cominceremo col sostituire ad ogni *matrice infinita* $A \equiv \|a_{rs}\|$ una *funzione di due variabili complesse* $a(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$, definita dalla serie doppia

$$(21) \quad a(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = \sum_{rs} a_{rs} \tilde{\lambda}_1^r \tilde{\lambda}_2^s$$

la quale è anche l'indicatrice simmetrica dell'operatore lineare che alla funzione $y(t) = \sum_n y_n t^n$ fa corrispondere la funzione $f(\tilde{\lambda}) = \sum_n f_n \tilde{\lambda}^n$, dato da

$f(\tilde{\lambda}) = a(\tilde{\lambda}, \tilde{i}) y(\tilde{i})$. Con ciò sostituiamo al quadro degli ∞ numeri a_{rs} , difficile a maneggiarsi, un'entità matematica molto meglio dominabile, anche nelle sue proprietà qualitative, qual'è la funzione analitica $a(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$; in particolare, per ciò che seguirà, risulteranno d'importanza fondamentale le *varietà singolari* di questa funzione, che invece restavano completamente mascherate colla rappresentazione data della matrice infinita. Viceversa, data una funzione $a(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$, regolare nell'intorno di $\tilde{\lambda}_1 = 0, \tilde{\lambda}_2 = 0$, essa potrà sempre pensarsi coordinata alla matrice infinita dei suoi coefficienti a_{rs} , nello sviluppo (21), in serie doppia di potenze. Se allora a due matrici $A \equiv \|a_{rs}\|$ e $B \equiv \|b_{rs}\|$ sono coordinate le due funzioni $a(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$, $b(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$ rispettivamente, alla matrice *somma* $A + B$ risulterà coordinata la *funzione somma* $a(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) + b(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$ mentre al *prodotto* $AB = C$ delle due matrici sarà coordinata la funzione

$$(22) \quad a(\tilde{\lambda}_1, \tilde{i}) b(\tilde{i}, \tilde{\lambda}_2) = c(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$$

che si ottiene con un prodotto funzionale simmetrico dalle due funzioni a e b , coordinate alle matrici A e B , e che si dirà il *prodotto di composizione sim-*

metrica di queste due funzioni, in questo ordine. Similmente si definisce il prodotto di composizione simmetrica di un numero qualunque n di funzioni di due variabili (in un certo ordine), prodotto che sarà ancora una funzione di due variabili, coordinata alla matrice prodotto delle n matrici, cui sono coordinate le funzioni date. In particolare, alla potenza A^n della matrice A sarà coordinata la funzione che indicheremo con $\overset{\circ}{a}^n(\zeta_1, \zeta_2)$

$$(23) \quad \overset{\circ}{a}^n(\zeta_1, \zeta_2) = a(\zeta_1, \overset{\circ}{t}_1) a(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2) \cdots a(\overset{\circ}{t}_{n-1}, \zeta_2)$$

e che chiameremo *potenza n -esima di composizione simmetrica della funzione $a(\zeta_1, \zeta_2)$* .

Queste nozioni sono in perfetta analogia con quelle sviluppate dal prof. Volterra⁽¹⁾ nel campo reale, colla sua *teoria della composizione* (di 1^a e 2^a specie).

4. Vi è però una diversità sostanziale tra le proprietà del prodotto di composizione simmetrica di due funzioni a e b , e quello di due matrici *finite*. Mentre infatti il prodotto righe per colonne di due matrici quadrate finite è *sempre eseguibile*, e porta a una terza matrice *univocamente determinata*, può accadere che il prodotto di composizione $a(\zeta_1, \overset{\circ}{t}) b(\overset{\circ}{t}, \zeta_2)$ non sia eseguibile, oppure porti a più funzioni analitiche $c(\zeta_1, \zeta_2)$. Il primo caso si presenterà quando la funzione $a(\zeta_1, \zeta_2)$ sia singolare per ogni ζ_1 in un punto $\bar{\zeta}_2$, e la funzione $b(\zeta_1, \zeta_2)$ sia singolare per ogni ζ_2 in un punto $\bar{\zeta}_1$, che sia il reciproco di $\bar{\zeta}_2$ ($\bar{\zeta}_1 = \frac{1}{\bar{\zeta}_2}$), nel qual caso, non esistendo il prodotto di composizione delle due funzioni, non avrà assolutamente senso (se le due funzioni sono monodrome) nemmeno il prodotto delle due matrici A e B a cui esse sono coordinate. Il secondo caso invece si presenterà quando almeno una delle due funzioni, per es. la $a(\zeta_1, \zeta_2)$, risulta *polidroma* (con punti di diramazione in $\zeta_2 = \bar{\zeta}_2$, che non si spostano al variare di ζ_1)⁽²⁾. In questo caso non potrà più parlarsi di un'unica matrice (*infinita*) AB , prodotto delle due A e B , ma di *più matrici*, ognuna individuata dai coefficienti dello sviluppo in serie di potenze nell'intorno di $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0$, di altrettante funzioni $c(\zeta_1, \zeta_2)$ (anche quando esiste una sola funzione $c(\zeta_1, \zeta_2)$ *polidroma*, ognuno dei suoi rami, regolari per $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, individua una diversa matrice, prodotto delle due A e B).

Tutti questi fatti, relativi alla non esistenza e alla determinazione multipla della matrice prodotto di due matrici infinite A e B ci sono rivelati solo dalla *posizione e dalla natura delle varietà singolari delle funzioni* ad esse coordinate. Nel caso delle matrici finite, le funzioni coordinate sono *polinomi* (funzioni monodrome, singolari solo per $\zeta_1 = \infty$ o $\zeta_2 = \infty$) e quindi è sempre possibile eseguire, e in un modo unico, il loro prodotto di composizione.

(1) V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Leçons sur la composition*, Coll. Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

(2) L. FANTAPPIÈ, *La polidromia dei funzionali analitici lineari*, « Rendiconti Accad. dei Lincei », vol. IV, serie 6^a, 2^o sem. 1926.

Matematica. — *Dimostrazione di un teorema d'analisi di cui è fatto uso in fisica piana.* Nota di M. PICONE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il collega Signorini mi ha fatto rilevare tutta l'opportunità di una rigorosa dimostrazione — che, a quanto consta a lui e a me, non pare sia stata mai data — del seguente teorema d'analisi, fondamentale in parecchie ricerche di fisica piana, ed ammesso anche in recenti lavori di idrodinamica.

I. Siano: \mathbf{C} una curva regolare semplice e chiusa del piano (x, y) , \mathbf{D} il dominio illimitato luogo dei punti non interni a \mathbf{C} , n la normale alla curva \mathbf{C} volta verso l'interno di \mathbf{D} , α , β e γ tre costanti; se $u(x, y)$ è una funzione armonica in \mathbf{D} , verificante le condizioni

$$\int_{\mathbf{C}} \frac{du}{dn} ds = \gamma,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial y} = \beta,$$

comunque si fissi un punto (x_0, y_0) interno a \mathbf{C} , esiste una funzione $w(\tilde{z})$ della variabile complessa $\tilde{z} = x + iy$, olomorfa in \mathbf{D} e *regolare all'infinito* ⁽²⁾ che ha per parte reale la funzione armonica

$$u(x, y) - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) - \gamma \log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Riconosciuto, Signorini ed io, che la rigorosa dimostrazione di questo teorema è tutt'altro che immediata ⁽³⁾, ho poi potuto vedere che essa si consegue, nel modo più semplice e più completo, facendo ricorso ad un'antica formola del Dini ⁽⁴⁾ che fornisce la soluzione del problema di Neumann per la corona circolare e mettendosi inoltre dal nuovo punto di vista, nell'analisi del comportamento all'infinito delle funzioni armoniche, adottato nel cap. II

(1) Nella seduta del 16 dicembre 1928.

(2) Cioè, detta z_0 l'affissa complessa del centro del cerchio di minimo diametro contenente \mathbf{C} , sviluppabile all'esterno di tale cerchio in serie precedente secondo le potenze di $\frac{1}{z - z_0}$.

(3) Il prof. Mouskhelichvili asserisce però — senza dimostrazione — il contrario a p. 996 (nella riga 2^a dall'alto) della sua recentissima Nota: *Sur le problème fondamental d'Hydrodynamique à deux dimensions* [questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a (1928), pp. 995-1002].

(4) DINI, *Sull'integrazione della equazione $\Delta^2 u = 0$* [« Annali di matematica pura ed applicata », t. V, serie II (1871-1873), pp. 305-345], p. 322.

(pp. 78-86 e 96-105) dei miei *Appunti d'analisi superiore* che saranno pubblicati dal coraggioso editore dott. Edoardo Stolfi e la cui stampa inoltrata già mi consente di citarne talune pagine.

In questa breve Nota mi permetto di comunicare la rigorosa dimostrazione del teorema enunciato, stabilendo altresì il teorema d'unicità concernente un notevole particolare problema esterno per il Δ_2 che si collega alla questione ed accennando in principio a ciò che è essenziale, per l'analisi qui compiuta, del mio punto di vista sopra indicato, ed in ultimo ad alcune notevoli conclusioni sulle singolarità isolate dalle funzioni armoniche in due variabili.

1. Per ogni insieme \mathbf{I} di punti del piano (x, y) designeremo con \mathbf{FI} la frontiera. Una funzione $f(x, y)$, definita in \mathbf{I} , sarà detta ivi di classe $C^{(n)}$ se essa, in ogni punto di \mathbf{I} , è continua con tutte le sue derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine n . Una funzione $u(x, y)$, definita in un insieme aperto \mathbf{A} , sarà detta ivi armonica se essa è di classe C'' in \mathbf{A} , verificandovi l'equazione $\Delta_2 u = 0$. Una funzione $u(x, y)$ sarà detta armonica in un dominio $\mathbf{D}^{(1)}$ se essa è continua in \mathbf{D} ed è armonica in $\mathbf{D} - \mathbf{FD}$. Secondo queste locuzioni una funzione $u(x, y)$ armonica e di classe C' in un dominio \mathbf{D} è continua in ogni punto di \mathbf{D} , con le sue derivate parziali del primo ordine ed, in ogni punto di $\mathbf{D} - \mathbf{FD}$, con le sue derivate parziali del second'ordine, verificandovi l'equazione $\Delta_2 u = 0$.

Date nel piano (x, y) un certo numero p di curve regolari semplici e chiuse $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_p$, l'una esterna all'altra, prenderemo a considerare quei particolari domini illimitati luogo dei punti del piano non interni a ciascuna di quelle curve. Un tale dominio, che è connesso ed ha per frontiera $\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \dots + \mathbf{C}_p$, sarà in seguito designato con la notazione $\mathbf{D}_e(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_p)$. Per ogni punto $\mathbf{P}(x, y)$ del piano designeremo con $\delta(\mathbf{P})$ la massima distanza di \mathbf{P} dai punti di $\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \dots + \mathbf{C}_p$.

Sia $u(x, y)$ una funzione armonica e di classe C' nel dominio $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_e(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_p)$, per ogni punto $\mathbf{P}(x, y)$ del piano e per ogni $r \equiv \delta(\mathbf{P})$, indicheremo con $\mu(\mathbf{P}, r)$ la media dei valori di u sulla circonferenza $\mathbf{C}(\mathbf{P}, r)$ di centro in \mathbf{P} e di raggio r , porremo cioè

$$(1) \quad \mu(\mathbf{P}, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathbf{C}(\mathbf{P}, r)} u \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) \, d\theta \quad , \quad \text{per } r \geq \delta(\mathbf{P}).$$

Si ha ⁽²⁾:

$$(2) \quad \mu(\mathbf{P}, r) = a'(\mathbf{P}) + a'' \log r,$$

(1) Intendo per *dominio* [cfr. le mie *Lezioni d'analisi infinitesimale* («Circolo matematico di Catania», Catania, R. Università, 1923), vol. I, p. 65] ogni insieme perfetto di cui ciascun punto è punto d'accumulazione di punti interni all'insieme.

(2) Cfr. PICONE, a) *Sulle singolarità delle funzioni armoniche* [questi «Rendiconti», vol. III, serie 6^a (1926), pp. 655-660]; b) *Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche in tre o più variabili* [ibidem, vol. IV serie 6^a (1926), pp. 18-21]; c) *Appunti d'analisi superiore*, loc. cit.

ove $a'(P)$ e a'' si mantengono costanti al variare di r e, designando n la normale a FD volta verso l'interno di D , riesce:

$$(3) \quad a'' = \frac{1}{2\pi} \int_{FD} \frac{du}{dn} ds = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi} \int_{C_k} \frac{du}{dn} ds.$$

Chiamo: la quantità $\mu(P, r) = a'(P) + a'' \log r$ residuo all'infinito della funzione, armonica u , rispetto al polo P , la costante $a'(P)$ il primo e la costante a'' il secondo indice all'infinito della u rispetto al polo P . Il secondo indice all'infinito è una costante assoluta che, come dice la (3), non dipende dal polo P . Evidentemente: Se la funzione armonica u converge all'infinito, essa, come dicono le (1) e (2), deve avervi nullo il suo secondo indice mentre il primo è il limite verso cui converge la funzione.

Si ricava facilmente da qui (cfr. i miei citati *Appunti*, p. 80) che basta la semplice ipotesi della convergenza all'infinito della funzione armonica $u(x, y)$ per potere dedurre la sua **regolarità all'infinito**, col preciso significato, certamente artificioso, comunemente dato a tale regolarità, secondo il quale ⁽¹⁾ si deve ammettere *a priori* che la funzione

$$u \left(\frac{X}{X^2 + Y^2}, \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right),$$

trasformata di Lord Kelvin della $u(x, y)$, risulti armonica in un intorno del punto $X = Y = 0$.

Ne segue che: 1° Una funzione $u(P)$ armonica nel dominio illimitato $D \equiv D_e(C_1, C_2, \dots, C_p)$, convergente all'infinito, è dotata di massimo e di minimo in D , che sono conseguiti su FD ; 2° comunque si fissi un punto $P_0(x_0, y_0)$ esterno a D , esiste una costante K per la quale si ha sempre in D

$$(4) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \overline{P_0 P} < K, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \overline{P_0 P} < K.$$

2. Ciò posto, passiamo a stabilire tre teoremi dai quali seguono immediatamente l'enunciato teorema I, nonché il teorema d'unicità e i teoremi sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche ai quali ho alluso in principio.

II. Se la funzione $u(P)$ è armonica nel dominio illimitato

$$D \equiv D_e(C_1, C_2, \dots, C_p)$$

ed è infinitesima all'infinito, ad ogni punto P_0 esterno a D , si può far corrispondere una costante positiva K tale da risultare, in D ,

$$(5) \quad |u(P)| \overline{P_0 P} < K.$$

(1) Cfr. PICARD, *Traité d'analyse*, t. II, p. 62, 3^{me} édition [Gauthier-Villars, Paris (1925)].

Riferiremo il piano ad un sistema di coordinate polari ρ e θ col polo in P_0 . Essendo nullo il residuo della u all'infinito, rispetto a qualsiasi polo, comunque si fissi una quantità $r \equiv \delta(P_0)$, si ha, per $\rho > r$,

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \tau) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\tau - \theta) + r^2} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \tau) d\tau = \\ &= \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \tau) \frac{\rho \cos(\tau - \theta) - r}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\tau - \theta) + r^2} d\tau, \end{aligned}$$

$$(6) \quad |u(\rho, \theta)| < \frac{r}{\pi} \frac{\rho + r}{(\rho - r)^2} \int_0^{2\pi} |u(r, \tau)| d\tau.$$

Detto $r_0 (> r)$ un valore tale che, per $\rho \geq r_0$, riesca sempre

$$(\rho^2 + \rho r)/(\rho - r)^2 \leq 2,$$

si trae dalla (6)

$$(7) \quad \rho |u(\rho, \theta)| < \frac{2r}{\pi} \int_0^{2\pi} |u(r, \tau)| d\tau, \quad \text{per } \rho \geq r_0.$$

Sussiste dunque la (5) in \mathbf{D} quando si prenda per K un numero che non sia minore del secondo membro della (7) e del massimo valore di $\rho |u(\rho, \theta)|$ nella parte di \mathbf{D} contenuta nel cerchio di centro in P_0 e di raggio r_0 .

III. Una funzione $u(P)$ armonica nel dominio illimitato

$$\mathbf{D} \equiv D_e(C_1, C_2, \dots, C_p)$$

la quale abbia nullo il suo secondo indice all'infinito, riesce convergente all'infinito se vi sono infinitesime entrambe le sue derivate parziali del primo ordine.

Fissato a piacere un punto $P_0(x_0, y_0)$ esterno al dominio \mathbf{D} , riferiamo il piano ad un sistema di coordinate polari ρ e θ col polo in P_0 . In virtù del teorema precedente, per un certo numero K , si ha in \mathbf{D}

$$(8) \quad \rho |u_\rho(\rho, \theta)| < K.$$

Fissati una circonferenza c di centro in P_0 e di raggio $r > \delta(P_0)$ e un punto $P(\rho, \theta)$ esterno alla c , consideriamo una circonferenza C di centro in P_0 e di raggio R variabile maggiore di ρ . In virtù della citata formola del Dini, applicata alla corona circolare limitata dalle circonferenze c e C , si ha, per essere nullo il secondo indice all'infinito della u ,

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \theta) = u(r, 0) &= \frac{R}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/R)^k + (r^2/\rho R)^k}{k [1 - (r/R)^{2k}]} \int_0^{2\pi} u_\rho(R, \tau) \cos k(\tau - \theta) d\tau - \\
 &= \frac{r}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r\rho/R^2)^k + (r/\rho)^k}{k [1 - (r/R)^{2k}]} \int_0^{2\pi} u_\rho(r, \tau) \cos k(\tau - \theta) d\tau - \\
 &= \frac{R}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(r/R)^k}{k [1 - (r/R)^{2k}]} \int_0^{2\pi} u_\rho(R, \tau) \cos k\tau d\tau + \\
 &+ \frac{r}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r/R)^k + 1}{k [1 - (r/R)^{2k}]} \int_0^{2\pi} u_\rho(r, \tau) \cos k\tau d\tau.
 \end{aligned}$$

In questa relazione passiamo al limite per $R \rightarrow \infty$. Poichè, per esempio, in virtù della (8), si ha

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{R}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/R)^k + (r^2/\rho R)^k}{k [1 - (r/R)^{2k}]} \int_0^{2\pi} u_\rho(R, \tau) \cos k(\tau - \theta) d\tau \right| < \\
 &< 2K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/R)^k + (r^2/\rho R)^k}{k [1 - (r/R)^{2k}]} < 2K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/R)^k + (r/\rho)^k}{1 - (r/R)} = \\
 &= 2K \left(\frac{\rho}{R - \rho} + \frac{r}{R - r} \right) \frac{1}{1 - (r/R)},
 \end{aligned}$$

è subito visto che, col detto passaggio al limite, si ricava

$$u(\rho, \theta) - M = -\frac{r}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r/\rho)^k}{k} \int_0^{2\pi} u_\rho(r, \tau) \cos k(\tau - \theta) d\tau,$$

ove M designa la costante

$$M = u(r, 0) + \frac{r}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} u_\rho(r, \tau) \cos k\tau d\tau.$$

Ne segue, di nuovo per la (8),

$$u(\rho, \theta) - M < \frac{2Kr}{\rho - r}.$$

IV. Se la frontiera del dominio illimitato $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_e \mathbf{C}$ consiste in un'unica curva regolare semplice e chiusa \mathbf{C} , ad ogni funzione $u(\mathbf{P})$ armonica e di classe \mathbf{C}' in \mathbf{D} , convergente all'infinito si può far corrispondere una funzione $w(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$, olomorfa in \mathbf{D} e regolare all'infinito, che ha per parte reale la u ⁽¹⁾.

(1) Avendo già osservato che la convergenza all'infinito di una funzione armonica equivale alla sua regolarità, questo teorema può riguardarsi come sostanzialmente ben noto. Se lo enuncio e lo dimostro è solo perchè lo completo in taluni punti e perchè vorrei che qui nulla mancasse al rigore che desidero raggiungere.

Ed invero, per essere nullo il residuo della u all'infinito e constando la frontiera di \mathbf{D} di una sola curva regolare semplice e chiusa, nullo risulterà l'integrale della forma differenziale $-u_y dx + u_x dy$ esteso ad una qualunque curva regolare chiusa interna a \mathbf{D} . Ciò basta per potere asserire che esiste in \mathbf{D} la funzione v coniugata della u , armonica e di classe C' , per la quale riesce $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$ ⁽¹⁾. Tale v ha nullo il secondo indice all'infinito e, in base alle (4), ivi infinitesime entrambe le sue derivate parziali del primo ordine. La v è dunque (teorema III) convergente all'infinito, e, data la convergenza ivi della u , la funzione $w(z) = u + iv$ riesce olomorfa in \mathbf{D} e (convergente e quindi) regolare all'infinito.

3. Il teorema I è immediata conseguenza dei teoremi III e IV. Ed invero la funzione $U = u - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) - \gamma \log \overline{P_0} P$ è armonica nel dominio $D_e C$ e di residuo nullo all'infinito, con ivi infinitesime entrambe le derivate parziali del primo ordine. La U è dunque (teorema III) convergente all'infinito.

4. Immediata conseguenza del teorema III è pure, evidentemente, il seguente teorema d'unicità:

V. Comunque si assegnino la costante γ e, nel dominio

$$\mathbf{D} \equiv D_e(C_1, C_2, \dots, C_p),$$

le funzioni continue $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $f(x, y)$, su \mathbf{FD} , la funzione continua $g(x, y)$, detta n la normale alla \mathbf{FD} volta verso l'interno di \mathbf{D} , non può esistere più di una funzione $v(x, y)$ di classe C' in \mathbf{D} e C'' in $\mathbf{D} - \mathbf{FD}$, verificante le equazioni:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 v = f(x, y), \quad \text{in } \mathbf{D} - \mathbf{FD}, \\ v = g(x, y), \quad \text{su } \mathbf{FD}, \\ \int_{\mathbf{FD}} \frac{dv}{dn} ds = \gamma, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \alpha(x, y) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \beta(x, y) \right) = 0. \end{array} \right.$$

Sussiste il seguente teorema d'esistenza:

VI. Se le assegnate funzioni $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ sono, rispettivamente, le derivate V_x e V_y di una soluzione V della prima delle (9), di classe C' in \mathbf{D} e C'' in $\mathbf{D} - \mathbf{FD}$, esiste la soluzione delle (9).

(1) Per una completa dimostrazione di ciò cfr. la trattazione del problema dell'integrazione delle forme differenziali lineari che trovasi ai numeri 122 e 124 delle citate mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale*.

Fissato, invero, un punto P_0 esterno a D , diciamo $\bar{g}(x, y)$ i valori che assume su FD la funzione

$$V(P) + \left(\gamma - \int_{FD} \frac{dV}{dn} ds \right) \frac{\log \overline{P_0 P}}{2\pi},$$

$u(x, y)$ la funzione armonica e di classe C' in D , convergente all'infinito, che assume su FD i valori $g(x, y) - \bar{g}(x, y)$, allora la funzione

$$v(P) = u(P) + V(P) + \left(\gamma - \int_{FD} \frac{dV}{dn} ds \right) \frac{\log \overline{P_0 P}}{2\pi},$$

è evidentemente soluzione delle (9).

5. Da quest'ultimo teorema, tenendo presenti i risultati delle citate mie Note sulle singolarità delle funzioni armoniche, subito si deduce il seguente che compete alla stessa teoria:

VII. Se nel dominio $D \equiv D_e(C_1, C_2, \dots, C_p)$ la funzione $u(P)$ è armonica e di classe C' , con derivate parziali del primo ordine limitate, comunque si fissi un punto $P_0(x_0, y_0)$ esterno a D , sussiste in D la seguente formola di decomposizione in somma:

$$u(P) = U(P) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma \log \overline{P_0 P},$$

ove $U(P)$ è armonica e di classe C' in D ed è convergente all'infinito, designando α, β, γ delle costanti.

Con la trasformazione di Lord Kelvin se ne ricava:

VIII. Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto dell'insieme aperto A e $u(P)$ sia armonica in $A - P_0$. Se i prodotti $u_x \cdot \overline{P_0 P}^2$, $u_y \cdot \overline{P_0 P}^2$ riescono limitati in un intorno di P_0 , la $u(P)$, in un certo intorno I di P_0 , è suscettibile della seguente decomposizione in somma

$$u(P) = U(P) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \log \overline{P_0 P} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \log \overline{P_0 P} + \gamma \log \overline{P_0 P},$$

ove $U(P)$ è armonica in I , designando α, β, γ delle costanti.

Se quindi, considerando il campo compreso tra due rette p, t riusciamo ad assegnare una limitazione per la derivata normale $\frac{\partial W}{\partial n}$ della funzione armonica W uguale ad M in un tratto σ_1 di p , nulla sulla rimanente parte di p e su t , questa limitazione sarà valida per la derivata normale sul contorno di qualunque campo convesso.

Se poi a questa limitazione aggiungiamo la dimostrazione che la funzione armonica U' nulla in σ_2 , uguale ad M in $\overline{P_1 P_2}$, ha le linee di livello tutte convesse, allora la limitazione ottenuta sarà valida per la derivata $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_A$ ove si indichi con A un punto interno qualunque e con x una direzione arbitraria.

3. Sia O l'intersezione di p e t e si indichi con x la retta p , con y la perpendicolare ad x per o . La funzione armonica

$$(I) \quad W_A = \frac{M}{\pi} \int_{x_2}^{x_1} \frac{y}{d^2} dx_P$$

($d^2 = (x_A - x_P)^2 + y_A^2$, A punto generico del semipiano dalla parte delle y positive, P punto di $\sigma_1 = x_2 - x_1$) è uguale ad M in σ_1 nulla sulla rimanente parte di x e all'infinito.

Si eseguisca ora sulla (I) la trasformazione (conforme)

$$x = \rho^n \cos n\theta, \quad y = \rho^n \sin n\theta.$$

L'integrale (I) diviene

$$W_A = \frac{M}{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{n \rho_P^{n-1} \rho_A^n \sin n\theta d\rho_P}{\rho_A^{2n} + \rho_P^{2n} - 2 \rho_A \rho_P \cos n\theta}$$

e rappresenta la funzione armonica W nel campo limitato dalle semirette $p = x$ e t comprendenti l'angolo θ tale che $n\theta = \pi$.

Eseguiamo la derivata rispetto a θ in un punto A situato sulla retta t : semplificando si trova

$$\frac{\partial W}{\partial n} \Big|_A = - \frac{1}{\rho_A} \frac{\partial W}{\partial \theta} \Big|_A = \frac{M}{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho_A \rho_P^{n-1} d\rho_P}{(\rho_A^n + \rho_P^n)^2}.$$

Indichiamo con r la distanza \overline{AP} : posto $\alpha \equiv \widehat{r, \rho_A}$, $\beta \equiv \widehat{r, \rho_P}$ è

$$\rho_A = \frac{r \sin \alpha}{\sin \theta}, \quad \rho_P = \frac{r \sin \beta}{\sin \theta} = \frac{r \sin(\theta + \alpha)}{\sin \theta}$$

e quindi

$$\frac{\partial W}{\partial n} \Big|_A = \frac{M}{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{n^2 \sin^2 \theta [\sin \alpha \sin(\theta + \alpha)]^{n-1} d\rho_P}{r^2 [\sin^n \alpha + \sin^n(\theta + \alpha)]^2}.$$

Ora il massimo dell'espressione $\frac{[\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\theta + \alpha)]^{n-1}}{[\operatorname{sen}^n \alpha + \operatorname{sen}^n(\theta + \alpha)]^2}$ si ha per $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\theta + \alpha)$ e poichè θ è diverso da zero ne segue $\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$. Per questo valore di α si ha

$$\left. \frac{\partial W}{\partial n} \right|_A = \frac{M}{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{n^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{4 r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\rho = \frac{M}{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{r^2} d\rho.$$

Se θ tende a zero $\frac{\partial W}{\partial n}$ tende a $\frac{M\pi}{4} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{r^2}$; ma per θ diverso da zero il fattore numerico dell'integrale risulta sempre minore di $\frac{\pi}{4} M$; si deduce così che in ogni caso ⁽¹⁾ è

$$(2) \quad \left. \frac{\partial W}{\partial n} \right|_A \leq \frac{\pi}{4} \frac{M \sigma_1}{r^2}.$$

ove si ponga $\overline{P_1 P_2} = \sigma_1$ e r sia la minima distanza di A da un punto P di $\overline{P_1 P_2}$.

Se ricordiamo che in un campo generico si può sempre scrivere

$$W_A = \frac{1}{2\pi} \int_s W(P) \frac{\partial G_P^A}{\partial n_P} ds$$

e quindi

$$\left. \frac{\partial W}{\partial n} \right|_A = \frac{1}{2\pi} \int W(P) \frac{\partial^2 G_P^A}{\partial n_P \partial n_A} ds$$

si deduce dalla (2) la limitazione

$$(3) \quad \left| \frac{\partial^2 G_P^A}{\partial n_A \partial n_P} \right| \leq \frac{\pi^2}{2r^2}.$$

4. La limitazione precedente si estende senza difficoltà al caso che il punto A sia interno al campo. Si considerino infatti gli estremi P_1, P_2 , di σ_1 e alla funzione armonica U posta uguale ad M in σ_1 , nulla in σ_2 si sostituisca la funzione U' che essendo sempre nulla in σ_2 è uguale ad M su $\overline{P_1 P_2}$. È chiaro che U' tende ad U quando σ_1 tende a zero. Ed è anche evidente come la dimostrazione che le linee di livello della U' sono

(1) La deduzione è ottenuta per $\theta \neq 0$ ma piccolo a piacere; si estende quindi per continuità al caso in cui p e t siano parallele.

tutte convesse (quando il campo C è convesso) sia sufficiente ad affermare che la limitazione (2) per le derivate di U' (e quindi di U) in punti del contorno vale per un punto generico interno al campo, ove si intenda con n una direzione qualunque, perchè si può allora ripetere per ogni punto di ciascuna linea di livello il ragionamento svolto per σ_2 . Ora si osservi come l'affermazione che le linee di livello della U' in C siano tutte convesse equivalga all'altra che segnando il campo C con una retta r (arbitraria), la U' non possa avere su r e internamente a C nessun minimo (relativo). Questa proposizione si dimostra per assurdo. Infatti nella ipotesi opposta consideriamo la retta q tangente alla curva intersezione della U' col piano verticale per r nel suo punto di minimo Q e le rette n, n' tangenti in due punti di massimo N, N' nel cui intervallo è compreso Q . La q esiste per ipotesi; la esistenza delle n, n' , è invece assicurata dal fatto che la U' non negativa e crescente nell'intorno di P deve annullarsi nei punti estremi di C su r . Facciamo muovere la r nel fascio determinato da essa e dalla $\overline{P_1 P_2}$: le rette q, n, n' si muovono anche esse descrivendo tre rigate. Ma poichè la U' è armonica e nei punti di massimo è $\frac{\partial U'}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial^2 U'}{\partial r^2} < 0$ ne segue che indicando con θ l'angolo della r con una retta fissa del fascio sarà $\frac{\partial^2 U'}{\partial \theta^2} > 0$ cioè le rigate descritte da n, n'

sono *concave verso l'alto*. Analogamente si osserva che la rigata descritta da q è invece *convessa verso l'alto*. Ora la q è distinta da n, n' sulla \bar{r} data ed è a quota più bassa di esse; ma quando la \bar{r} si muove avvicinandosi alla $\overline{P_1 P_2}$ e fino a sovrapporsi ad essa le tre rette vengono a coincidere; nel moto in senso opposto i punti Q, N, N' tendono tutti e tre a punti di σ_2 ; allora la quota delle tre rigate tende allo zero per valori positivi e poichè il campo è convesso ed il segmento finito $\overline{NN'}$ comprende P , questo punto verrà necessariamente a coincidere con uno dei punti N, N' prima di giungere al contorno.

Ma dalle osservazioni precedentemente svolte sulla convessità e concavità delle tre rigate risulta facilmente che, corrispondentemente a possibili differenze nel valore iniziale (cioè su \bar{r}) di $\frac{\partial U'}{\partial \theta}$ si potrà avere *al più* da una sola parte di \bar{r} la coincidenza di una retta p con una retta appartenente ad una qualunque delle altre due rigate; invece la costruzione ora indicata mostra come la coesistenza della p e delle condizioni imposte al contorno presupponga che dalle due parti di \bar{r} si abbiano rette di p che appartengano ad una almeno delle due rigate n, n' . In questa contraddizione consiste l'assurdo. Resta così dimostrato che le linee di livello di U' sono convesse; perciò la (2) e quindi la (3) sono estese ad un punto generico del campo.

5. I risultati precedenti devono essere completati con alcune osservazioni. In primo luogo si consideri la dimostrazione del numero precedente;

da essa si intuisce come il numero costante che compare nella (2) a fattore di $\frac{M\sigma_1}{r^2}$ possa essere ancora ridotto quando si proceda verso l'interno del campo; ciò che del resto risulta dal lavoro del Lévy altra volta ricordato (1).

In secondo luogo si osservi che la condizione adottata nel presente lavoro che il campo C sia *convesso*, non dipende dai particolari della dimostrazione, ma è insita nel problema. Si comprende che in un dato campo non convesso si avrà una limitazione analoga con la sola differenza nel fattore costante di $\frac{M\sigma_1}{r^2}$, ma tale limitazione non può essere la stessa per tutti i campi come è dimostrato dal fatto che essa non vale affatto nei campi doppiamente connessi.

Infatti se si considera una corona circolare ed in essa la funzione U uguale ad M sulla circonferenza esterna di raggio a , nulla sulla circonferenza interna di raggio b si trova, prendendo l'origine nel centro comune alle due circonferenze,

$$U = \frac{M}{\log \frac{a}{b}} (\log r - \log b) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{M}{\log \frac{a}{b}} \cdot \frac{1}{r} .$$

Se il punto A si trova sulla circonferenza b e se b tende a zero si trova che $\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_A$ tende all'infinito perchè $b \log \frac{a}{b}$ tende a zero con b . Se invece valesse una formula analoga alle (9) si dovrebbe avere $\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_A < \frac{kMa}{(b-a)^2}$ e questa espressione si mantiene finita per b tendente a zero (2).

(1) Cfr. LÉVY, « Acta Math. », vol. 42 (1919). Si osservi che anche applicando le considerazioni dei numeri precedenti si deduce subito che se A è sulla linea di livello a quota K la (2) si può ridurre alla forma $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_A < \frac{\pi}{4} \frac{(M-K)\sigma_1}{r^2}$.

(2) Questo risultato poteva essere preveduto ricordando un lavoro del KRALL (*Sulle funzioni di Green in campi pluriconnessi*, « Rendiconti dei Lincei », vol. VI, 1927), dal quale discende immediatamente, che se si considera un punto P interno alla corona circolare e vicino alla circonferenza di raggio b e si fa tendere b a zero lasciando fisso P la U in P tende al valore che vi avrebbe la funzione U' definita nel campo semplicemente connesso limitato dalla circonferenza esterna con i valori che su di essa sono assegnati per la U; poichè nel nostro caso U' sarebbe sempre uguale ad M così è evidente come $\frac{\partial U}{\partial r}$ debba essere molto grande su b . La differenza di comportamento dei campi pluriconnessi da quelli semplicemente connessi corrisponde al fatto che non è sempre possibile risolvere il problema di Diriclet per un'area pluriconnessa per mezzo di un potenziale di doppio strato; la presenza del contorno chiuso interno dà luogo infatti a tutte le irregolarità che si presentano nella risoluzione del problema di Diriclet esterno. Si hanno così autovalori nella distribuzione di μ sul contorno interno e limitazioni nei valori prescritti al contorno.

6. Le considerazioni precedenti, come quelle della mia prima Nota su questo argomento si estendono tutte allo spazio ⁽¹⁾, invece nei soli campi in due dimensioni i risultati ottenuti si possono applicare anche alle funzioni armoniche assegnate per mezzo dei valori assunti sul contorno dalla loro derivata normale. Infatti se è data sul contorno la derivata normale, della funzione armonica U si può considerare la funzione V coniugata ad U :

è $\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial s}$ per cui, quadrando, si ottiene V sul contorno. Quando sia noto un valore maggiorante per la derivata di V secondo una direzione arbitraria, questo valore serve anche per le derivate di U poichè $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$; $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$.

Supponiamo ora che $\frac{\partial U}{\partial n}$ sia nulla in σ_2 e diversa da zero in σ_1 , e sia M il massimo valore assunto in questo tratto.

Poichè $\int_{\sigma_1} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma_1 = 0$ ne segue che $V = -\int_0^s \frac{\partial U}{\partial n} ds$ è certamente nulla su σ_2 ed eguale, al più, ad $M\sigma_1$ in σ_1 ; dalla (2) si ricava allora che

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_A \leq \frac{\pi}{4} \frac{M\sigma_1}{R^2}$$

essendo R la distanza di A da σ_1 . Per questa via si potrebbe anche ritrovare qualcuno dei risultati di Cisotti relativamente alla funzione di Neumann ⁽²⁾.

(1) Si deve peraltro osservare che mentre le formule (1), (4) e (5) della mia prima Nota estese allo spazio hanno per unico cambiamento r^2 al posto di r a denominatore (sicchè nello spazio e in un campo convesso è $\frac{\partial G}{\partial n} \leq \frac{2 \cos(n, r)}{r^2}$) la formula (3) di questo studio subisce un cambiamento anche nel valore del fattore costante. Si trova così nello spazio $\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_A < \frac{\pi}{4} \frac{M\sigma_1}{R^2}$ e quindi $\left| \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial x} \right| < \frac{\pi^2}{R^3}$.

(2) Cfr. U. CISOTTI, *Sul comportamento della funzione di Neumann in punti prossimi al contorno*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. 31 (1° sem. 1927), pp. 201-233.

Matematica. — *Equazioni reciproche a matrice.* Nota di L. TOSCANO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

In ciò che segue, denoteremo con Burgatti ⁽²⁾, *equazione a matrice* (equazione secolare nel senso lato della parola), un'equazione del tipo

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x & , & a_{12} & , & \dots & , & a_{1n} \\ a_{21} & , & a_{22} + x & , & \dots & , & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & , & a_{n2} & , & \dots & , & a_{nn} + x \end{vmatrix} = 0,$$

o brevemente

$$(1) \quad |a_{ik} + \delta_i^k x| = 0,$$

con $D = |a_{ik}|$ matrice quadrata ad elementi reali e δ_i^k uguale all'unità o a zero secondochè $i = k$ o $i \neq k$.

Se $D = |a_{ik}|$ è matrice simmetrica, emisimmetrica, ortogonale, ... si avranno equazioni a matrice simmetrica, emisimmetrica, ortogonale, ... Un'equazione a matrice simmetrica è un'equazione secolare.

Le equazioni a matrice ortogonale furono studiate da Brioschi ⁽³⁾ e Colucci ⁽⁴⁾ ne completò i risultati dimostrando che tutte le radici di un'equazione a matrice ortogonale hanno il modulo uno.

Vedremo qui che quest'ultima proprietà non è caratteristica per le equazioni a matrice ortogonale, ma vale per tutte le radici complesse di un'equazione reciproca a coefficienti reali, supposto che dette radici complesse abbiano gli argomenti tutti diversi.

Sfruttando poi questa proprietà dimostreremo l'esistenza di una classe di equazioni a matrice (non simmetrica) le cui radici sono reali.

1. Sia

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

un'equazione a coefficienti reali e reciproca.

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(2) Cfr. P. BURGATTI, *Sulle equazioni algebriche a matrice*, « Boll. Un. Mat. It. », 1928, fasc. 2°, pp. 65-69.

(3) Cfr. E. PASCAL, *I determinanti*, Hoepli, 1923, pp. 243-247.

(4) Cfr. A. COLUCCI, *Sopra un teorema di Brioschi*, « Boll. Un. Mat. It. », 1927, fasc. 5°, pp. 258-260.

La supporremo di grado pari e di prima specie⁽¹⁾, in quanto ogni equazione reciproca a meno dei fattori $x + 1$, $x - 1$ può sempre ridursi a questo tipo.

Limitandoci alla considerazione delle radici immaginarie, osserviamo dapprima che ad ogni radice

$$x_k = \rho_k e^{i\theta_k}$$

corrisponde l'altra

$$\rho_k e^{-i\theta_k}$$

per cui le radici immaginarie dell'equazione si possono distribuire nei due gruppi

$$\begin{aligned} & \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad \dots, \quad \rho_r e^{i\theta_r} \\ & \rho_1 e^{-i\theta_1}, \quad \rho_2 e^{-i\theta_2}, \quad \dots, \quad \rho_r e^{-i\theta_r}. \end{aligned}$$

D'altra parte, poichè l'equazione è reciproca, se

$$x_k = \rho_k e^{i\theta_k}$$

è radice dell'equazione, lo deve essere anche

$$\frac{1}{x_k} = \frac{1}{\rho_k} e^{-i\theta_k},$$

e poichè gli argomenti di dette radici si suppongono diversi, questa radice che ha l'argomento $-\theta_k$ dovrà coincidere colla sua coniugata $\rho_k e^{-i\theta_k}$ e quindi sarà necessariamente $\rho_k = 1$.

Così: *Se le radici immaginarie di un'equazione reciproca hanno gli argomenti diversi, esse avranno tutte per modulo l'unità. Una siffatta equazione reciproca si dirà semplice.*

Allora

$$x_k + \frac{1}{x_k} = 2 \cos \theta_k$$

e quindi: *La trasformata di un'equazione reciproca semplice, di grado pari e di prima specie, mediante la sostituzione*

$$y = x + \frac{1}{x},$$

ha tutte le sue radici reali.

(1) Per equazione reciproca di prima specie intendiamo un'equazione reciproca in cui i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali in valore e segno.

Concludiamo pertanto (e con dimostrazione semplice) il teorema di Rados⁽¹⁾:

Le due equazioni

$$(1) \quad |a_{ik} - \delta_i^k \bar{x}| = 0, \quad (2) \quad |A_{ik} - \delta_i^k \bar{x}| = 0,$$

sono tali che le radici della (2) sono i prodotti a $n-1$ a $n-1$ di quelle della (1).

Cambiando di segno in (2) tutti gli elementi di posto dispari, cioè quelli la cui somma degli indici è dispari, e ponendo

$$(-1)^{i+k} A_{ik} = \alpha_{ik}$$

si deduce che la

$$(2') \quad |\alpha_{ik} - \delta_i^k \bar{x}| = 0$$

gode la stessa proprietà della (2).

Il teorema di Rados si trova enunciato nella seconda forma (2') ma è preferibile per le applicazioni pratiche la prima forma (2).

3. Se

$$D = |a_{ik}|$$

è matrice ortogonale, si ha

$$A_{ik} = a_{ik} D;$$

la $\varphi(y) = 0$ diventa

$$|a_{ik} + \delta_i^k y| = 0$$

con $y = \frac{1}{x}$, e poichè coincide con la $f(x) = 0$, concludiamo con Brioschi che la $f(x) = 0$ è reciproca.

4. Escludiamo ora questo caso ed eseguiamo il prodotto

$$f(x) \varphi(x).$$

Si ha

$$f(x) \varphi(x) = |a_{ik} + \delta_i^k x| \cdot |A_{ik} + \delta_i^k x| =$$

$$= \begin{vmatrix} D + x^2 + (a_{11} + A_{11})x & , & (a_{12} + A_{12})x & , & \dots & , & (a_{1n} + A_{1n})x \\ (a_{21} + A_{12})x & , & D + x^2 + (a_{22} + A_{22})x & , & \dots & , & (a_{2n} + A_{2n})x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1} + A_{1n})x & , & (a_{n2} + A_{2n})x & , & \dots & , & D + x^2 + (a_{nn} + A_{nn})x \end{vmatrix} =$$

$$= x^n |a_{ik} + A_{ki} + \delta_i^k \lambda|,$$

$$\text{con } x + \frac{D}{x} = \lambda.$$

(1) Cfr. « Mathematische Annalen », vol. XLVIII, pp. 417-424; o meglio W. BURNSIDE, *On the characteristic equations of certain linear substitutions*, « The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics », vol. XXIII, 1902.

Vale quindi il teorema:

Se l'equazione

$$|a_{ik} + \delta_i^k x| = 0$$

è reciproca semplice di prima specie, l'equazione (a matrice in generale non simmetrica)

$$|a_{ik} + A_{ki} + \delta_i^k x| = 0$$

ammette radici reali.

Troviamo così una classe di equazioni a matrici non simmetriche, le cui radici sono reali.

Se

$$D = |a_{ik}| = 1$$

è matrice ortogonale, si ha l'equazione

$$|a_{ik} + a_{ki} + \delta_i^k x| = 0$$

considerata da Colucci (cfr. loc. cit.).

In ogni caso per cui sia $D = 1$ si ha

$$x + \frac{1}{x} = \lambda,$$

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0$$

e risolvendo

$$x = \frac{1}{2} (\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 4}).$$

Per $-2 < \lambda < 2$ le radici corrispondenti di $f(x) = 0$ sono immaginarie e per $\lambda < -2$, $\lambda > 2$ sono invece reali.

Come nel caso di Colucci se $\lambda = -2$ si ha $x = -1$, mentre la radice

$$\lambda = -2$$

è multipla.

Infatti derivando rispetto a x la

$$\overline{f(x)}^2 = x^n |(a_{ik} + A_{ki}) + \delta_i^k \lambda| = x^n \psi(\lambda)$$

si ha

$$2 f(x) f'(x) = n x^{n-1} \psi(\lambda) + x^n \psi'(\lambda) \left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

$$2 f(x) f'(x) = x^{n-1} \left[n \psi(\lambda) + \left(x - \frac{1}{x}\right) \psi'(\lambda) \right].$$

Sostituendo in questa una radice $x = -1$ e la corrispondente λ di $\psi(\lambda) = 0$, risulta

$$\psi'(\lambda) = 0;$$

e quindi l'equazione

$$\psi(\lambda) = 0$$

ammette radici reali $\lambda = -2$ multiple.

Matematica. — *Seconda forma quadratica fondamentale di una varietà anolonomica ed applicazioni.* Nota di G. VRANCEANU, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Lo scopo di questa Nota è di far vedere in primo luogo, come la nozione di seconda forma fondamentale di una V_{n-1} in V_n del Bianchi, si può estendere ad una varietà anolonomica V_n^m , la quale estensione contiene come caso particolare la seconda forma quadratica fondamentale di una V_m in V_n ⁽²⁾.

Sia data una varietà metrica V_n nella quale supponiamo di aver scelto un sistema di n congruenze ortogonali (λ) . Sappiamo che uno spostamento qualunque di V_n è determinato, sia dalle sue componenti dx^1, dx^2, \dots, dx^n , sia dalle sue proiezioni secondo le congruenze (λ) , che sono date in funzione delle dx^i dalle formule

$$(1) \quad ds_h = \sum_{i=1}^n \lambda_{h/i} dx^i \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

dove le $\lambda_{h/i}$ sono i momenti delle n congruenze (λ) . La lunghezza dello spostamento è data in funzione delle ds_h dalla forma quadratica

$$(2) \quad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \dots + ds_n^2.$$

Consideriamo adesso la varietà anolonomica V_n^m determinata dalle equazioni ⁽³⁾

$$(3) \quad ds_{h'} = \sum_{i=1}^n \lambda_{h'/i} dx^i = 0 \quad (h' = m+1, \dots, n).$$

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(2) Da non confondersi con la seconda forma fondamentale del quarto grado. Cfr. E. BOMPIANI, *Studi sugli spazi curvi, seconda forma fondamentale di una V_m in V_n* , « Atti dell'Istituto Veneto », t. LXXX, anno 1920-21, parte seconda, 1113.

(3) Vedi la mia Memoria *Studio geometrico dei sistemi anolonomi*, « Annali di Matematica », novembre 1928.

Uno spostamento generico di V_n^* è evidente caratterizzato dai valori delle sole ds_1, ds_2, \dots, ds_m , le altre essendo sempre nulle, e la sua lunghezza è data dalla formula

$$(4) \quad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \dots + ds_m^2.$$

la quale si può chiamare anche la metrica di V_n^* , ossia la prima forma fondamentale. Sia P un punto generico di V_n di coordinate x^1, x^2, \dots, x^n , e sia \bar{P} un punto vicino di coordinate

$$(2') \quad \bar{x}^i = x^i + \sum_{\alpha=1}^m \varepsilon_{\alpha} \lambda_{\alpha}^i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove le quantità costanti ε_{α} sono a considerarsi come quantità del primo ordine. Si deve osservare, che il punto \bar{P} si ottiene da P , per uno spostamento esteriore a V_n^* , e cioè le sue proiezioni sopra le prime m congruenze sono nulle e le proiezioni sopra le ultime $n - m$ congruenze (1) sono le costanti ε_{α} . A qualunque spostamento di $V_n^*(ds_1, \dots, ds_m)$ passante per P , corrisponde, in base alle formule (2') differenziate, uno spostamento passante per \bar{P} , le cui proiezioni sopra le prime m congruenze (1) sono date dalle formule

$$(3) \quad d\bar{x}^i = dx^i + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \varepsilon_{\alpha} (\gamma_{\alpha\beta}^i - \gamma_{\beta\alpha}^i) ds_{\beta} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e le cui proiezioni sopra le ultime $n - m$ congruenze (1) sono degli infinitesimi del primo ordine nelle ε_{α} . Nel calcolo delle formule (3), non si è tenuto conto dei termini del secondo ordine nelle ε_{α} ed i valori dei coefficienti di rotazione di Ricci $\gamma_{\alpha\beta}^i$, sono a calcolarsi nel punto P . Ne risulta senz'altro che la lunghezza dello spostamento \bar{d} si esprime, se si tiene conto solamente dei termini di primo ordine nelle ε_{α} , mediante la formula

$$(6) \quad d\bar{s}^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \dots + ds_m^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \varepsilon_{\alpha} \frac{\gamma_{\alpha\beta}^{m+1} + \gamma_{\beta\alpha}^{m+1}}{2} ds_{\beta} ds_{\alpha}.$$

La simmetria del secondo membro, la quale è una forma quadratica nelle m componenti ds_1, ds_2, \dots, ds_m , dello spostamento generico di V_n^* passante per P , si dirà la seconda forma quadratica fondamentale della varietà anisotropa V_n^* . Essa si può infatti interpretare come la variazione della prima forma fondamentale (4) di V_n^* , per il passaggio dal punto P al punto vicino \bar{P} .

Indicando con φ_{α} gli $n - m$ coefficienti delle costanti ε_{α} ,

$$(6') \quad \varphi_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\gamma_{\alpha\beta}^{m+1} + \gamma_{\beta\alpha}^{m+1}}{2} ds_{\beta} ds_{\alpha},$$

possiamo dire che la seconda forma di una V_n^m è composta da $n - m$ forme quadratiche (6') corrispondenti ognuna ad una delle $n - m$ congruenze $(\lambda_{\alpha'})$.

Supponiamo adesso che le relazioni (3) siano completamente integrabili, nel quale caso i coefficienti $\gamma_{\alpha'\beta'}$ sono simmetrici negli ultimi indici, e le nostre forme quadratiche si scrivono

$$(7) \quad \gamma_{\alpha'} = \sum_{b,k} \gamma_{\alpha'bk} ds_b ds_k.$$

Ma in questo caso la varietà V_n^m si riduce ad ∞^{n-m} varietà V_m , e per qualunque punto passa solamente una di queste varietà V_m , cosicchè le (7) rappresentano in un dato punto, le $n - m$ seconde forme fondamentali della varietà V_m passante per quel punto, e basta esprimere le ds_b per le formule (1), e ulteriormente le variabili x per m variabili u di V_m , per avere le seconde forme riferite ai differenziali du .

Ritorniamo alla seconda forma di una varietà anolonomica, e osserviamo che essa non può essere identicamente zero, se non si ha separatamente

$$(7') \quad \gamma_{\alpha'bk} + \gamma_{\alpha'kb} = 0 \quad (\alpha' > m, b, k \leq m),$$

e queste condizioni esprimono precisamente⁽¹⁾ che le geodetiche di V sono anche geodetiche di V_n . Tale V_n^m , se ne esistono, si possono chiamare totalmente geodetiche in V_n . Per il caso integrabile, le condizioni (7') sono equivalenti alle condizioni trovate da Hadamard e da Bompiani⁽²⁾.

Per dare un'altra applicazione della seconda forma fondamentale, supponiamo che il numero delle equazioni (3) sia uguale a $n - 2$, e che esse risultino completamente integrabili, e per conseguenza la V_n^2 si riduca a ∞^{n-2} superficie V_2 . La curvatura riemanniana K_r della superficie passante per un dato punto, è rappresentata, come ben sappiamo, dal valore in quel punto del coefficiente a quattro indici $\gamma_{12,12}$ di Ricci relativo alle n congruenze (λ) . In quanto alla curvatura intrinseca K della superficie, essa è data dal coefficiente $\gamma_{12,12}$ relativo solamente alle congruenze (1) e (2) della superficie, e tra queste due curvature passa la relazione

$$(8) \quad K_r = K_i - \sum_{b,c}^n (\gamma_{b'11} \gamma_{b'22} - \gamma_{b'12}^2),$$

dove le quantità entro parentesi sono precisamente i determinanti delle $n - 2$ forme quadratiche (7).

(1) Vedi Y. A. SCHOUTEN, *On non-holonomic connexions*, «Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings», vol. XXXI, n. 3, p. 298.

(2) Cfr. E. BOMPIANI, *Spazi riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche*, «Rendiconti dei Lincei», vol. XXXII, serie 5^a, 2^o sem. (1923), p. 14.

La formula (8) generalizza la formula ben nota, che dà la curvatura di Gauss di una superficie dello spazio ordinario, come il rapporto dei determinanti delle due forme, il determinante della prima forma essendo uguale ad uno, nel nostro caso.

Supponiamo adesso che la nostra superficie V_n contenga una geodetica (B) di V_n e che la congruenza (1) si confonda con questa geodetica lungo la geodetica stessa, vale a dire che lungo B i coefficienti $\gamma_{h'11}$ sono nulli. In questo caso lungo la geodetica B la formula (8) assume, per la nostra superficie, la forma elegante

$$(9) \quad K_e = K_i + \sum_3^n \gamma_{h'12}^2,$$

che dice che lungo (B) la curvatura riemanniana della superficie è sempre maggiore della curvatura intrinseca. La superficie diventa geodetica lungo (B), solamente nel caso in cui lungo (B) sono nulle le quantità $\gamma_{h'12}$, ossia nel caso in cui la congruenza (2) della superficie, si trasporta lungo (B) per parallelismo.

In altre due Note precedenti⁽¹⁾, occupandomi della stabilità delle geodetiche, io avevo supposto che, data una geodetica (B) di V_n e una geodetica vicina (g), esiste sempre una superficie, geodetica lungo (B), che contiene queste due geodetiche, vale a dire una superficie la cui curvatura intrinseca sia data lungo (B) dai valori del coefficiente $\gamma_{12,12}$ delle n congruenze (λ). La formula (9) ci dice precisamente che questo non è possibile in generale, perchè la direzione della congruenza (2) dipende dalla geodetica vicina (g), e non si trasporti in generale per parallelismo in V_n , ma esiste sempre una superficie, che li contiene, la quale si può formare col procedimento indicato dal prof. Levi-Civita⁽²⁾.

Ora l'equazione di Jacobi di questa superficie di cui (g) è una soluzione, si scrive⁽³⁾

$$(10) \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + K_i y = 0,$$

dove y è lo scostamento normale a (B), s l'arco di (B) e K_i la curvatura intrinseca della superficie, che interviene coi suoi valori, lungo (B). Dalle

(1) *Stabilità geodetica*, questi « Rendiconti », vol. V, serie 6^a, 1° sem., 1927, pagine 107, 275. Cfr. anche *Sullo scostamento geodetico*, vol. VII, 1928, p. 134.

(2) Vedi T. BOGGIO, *Sullo scostamento geodetico*, vol. IV, 2° sem., 1926, p. 259 (la nota in calce).

(3) Il primo che abbia trovato che nella equazione di Jacobi di una superficie passante per una geodetica di V_n , non c'entra solamente la curvatura riemanniana della superficie, è O. ONICESCU, *Scostamento geodetico, stabilità, ecc.*, vol. V, 1927, p. 562 (formule II). Cfr. anche U. CRUDEL, *Sopra lo scostamento geodetico*, « Rendiconti », vol. VI, 1927, p. 572.

note proprietà delle equazioni (10) ne risulta che la geodetica (B) sarà stabile in prima approssimazione, se tutte le K_i sono positive. Tenendo conto della formula (9), dobbiamo modificare il nostro criterio di stabilità come segue:

La condizione necessaria, purchè una data geodetica di V_n sia stabile in prima approssimazione, è che le $n - 1$ curvatures principali associate alla geodetica, siano positive.

Matematica. — *Sur la loi des grands nombres dans les espaces fonctionnels.* Nota ⁽¹⁾ di V. GLIVENKO, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Considérons l'espace fonctionnel aux voisinages en moyenne quadratique, de fonctions de carrés sommables définies dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$. Dans cet espace la distance de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, que nous désignerons par

$$f \sim g,$$

est définie par l'expression:

$$\sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt}.$$

1. Soit donné une suite de quantités éventuelles, deux à deux indépendantes,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

A chaque valeur de chacune de ces quantités, faisons correspondre une fonction de notre espace, et soient

$$(f) \quad f_{x_1}(t), f_{x_2}(t), \dots, f_{x_n}(t), \dots$$

ces fonctions (que nous supposerons mesurables B par rapport aux paramètres éventuels).

Désignons par $\mathfrak{P}\{\mathfrak{E}\}$ la probabilité d'un événement \mathfrak{E} , et prenons, une fois pour toutes, pour la valeur probable d'une quantité éventuelle y dont la fonction des probabilités totales est $V(y)$, l'intégrale

$$\mathfrak{M}[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y dV(y) \quad (2).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.

(2) Sur les relations de cette forme de la définition avec des autres employées dans la théorie des probabilités, voir ma Note précédente, *Sur les valeurs probables de fonctions*, ces « Rendiconti », fasc. 10, 1928, pp. 484-487.

La valeur probable d'une fonction de t sera, elle-aussi, une fonction de t , et l'on aura évidemment les égalités suivantes concernant les fonctions dépendant de n'importe quels paramètres éventuels :

$$(1) \quad \mathfrak{M} \left[\int_0^1 g(t)^2 dt \right] = \int_0^1 \mathfrak{M} [g(t)^2] dt,$$

$$(2) \quad \mathfrak{M} [f(t) + g(t)] = \mathfrak{M} [f(t)] + \mathfrak{M} [g(t)],$$

et, si les paramètres éventuels desquels dépend l'une et l'autre fonction sont indépendants :

$$(3) \quad \mathfrak{M} [f(t) \cdot g(t)] = \mathfrak{M} [f(t)] \cdot \mathfrak{M} [g(t)].$$

Il s'agit d'établir⁽¹⁾, pour la suite (f) , la loi des grands nombres dans la forme du théorème de Markoff, convenablement modifiée :

Proposons-nous de choisir successivement, au hasard, les valeurs des quantités $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$: alors, si l'on a :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [(f_{x_i} \sim \mathfrak{M} [f_{x_i}])^2] \rightarrow 0;$$

on a aussi, quel que soit le nombre positif ε :

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{i=n} f_{x_i}}{n} \sim \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [f_{x_i}]}{n} \geq \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

En effet, d'après l'inégalité célèbre de Tchebichef,

$$\mathfrak{S} \{ y \geq 1 \} \leq \mathfrak{M} [y^2]$$

dès que la quantité y n'est jamais négative.

Si maintenant nous posons

$$y = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n} f_{x_i}}{n} \sim \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [f_{x_i}]}{n} \right),$$

la première partie de l'inégalité devient l'expression dont la convergence vers zéro nous voulons établir, et la seconde partie prend la forme :

$$\frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \mathfrak{M} \left[\left(\sum_{i=1}^{i=n} f_{x_i} \sim \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [f_{x_i}] \right)^2 \right].$$

(1) Ce problème n'a été posé par M. A. Khintchine.

Or, cette dernière expression peut se transformer successivement comme il suit: on obtient d'abord, en vertu de (1), en tenant compte de la définition de la distance:

$$\frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \int_0^1 \mathfrak{M} \left[\left(\sum_{i=1}^{i=n} (f_{x_i} - \mathfrak{M} [f_{x_i}]) \right)^2 \right] dt;$$

puis, en vertu de (2) et de (3), en se servant des procédés usuels dans la théorie des probabilités:

$$\frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \int_0^1 \mathfrak{M} \left[\sum_{i=1}^{i=n} (f_{x_i} - \mathfrak{M} [f_{x_i}])^2 \right] dt,$$

et enfin, en vertu de (2) et de (1):

$$\frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} \left[\int_0^1 (f_{x_i} - \mathfrak{M} [f_{x_i}])^2 dt \right];$$

mais c'est justement l'expression:

$$\frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [(f_{x_i} \sim \mathfrak{M} [f_{x_i}])^2],$$

ce qui prouve notre assertion.

2. Soit maintenant $O(f)$ une opération distributive. Considerons un champ fonctionnel C où cette opération est définie et où elle possède, outre la distributivité, la propriété suivante:

$$(4) \quad \mathfrak{M} [O(f)] = O(\mathfrak{M} [f]),$$

et adoptons une nouvelle définition de la distance de deux fonctions f et g du champ C , que nous déterminerons ici comme il suit:

$$(5) \quad f \approx g = O(f) \sim O(g).$$

Le théorème qui vient d'être démontré nous apprend que, si l'on a:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [(O(f_{x_i}) \sim \mathfrak{M} [O(f_{x_i})])^2] \rightarrow 0,$$

on a aussi:

$$\mathfrak{G} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{i=n} O(f_{x_i})}{n} \sim \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [O(f_{x_i})]}{n} \geq \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

Or, en vertu de (4) et (5), on en obtient immédiatement que, si l'on a :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathfrak{M} [(f_{x_i} \approx \mathfrak{M} [f_{x_i}])^2] \rightarrow 0,$$

on a aussi :

$$\mathfrak{B} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n f_{x_i}}{n} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \mathfrak{M} [f_{x_i}]}{n} \right\} \rightarrow 0.$$

Ainsi, par exemple, la loi des grands nombres reste valable dans certains champs tionnels aux voisinages en moyenne quadratique de divers ordres.

Matematica. — *Sopra l'equivalenza di due equazioni che si presentano nella determinazione della terna principale del Vitali per una superficie generica dello spazio Hilbertiano.* Nota di M. PREVIATTI-BORTOLOZZI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Transports isoclines et directions associées.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Soit B une courbe quelconque de la variété riemannienne V_n ; $d\sigma$ l'arc élémentaire de B; a et a' deux directions quelconques définies le long de B; α et α' les directions associées respectives; $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'}$ les courbures associées avec les directions a et a' . On aura ⁽²⁾

$$(1) \quad \frac{d \cos(\widehat{aa'})}{d\sigma} = \frac{\cos(\widehat{\alpha a'})}{R} + \frac{\cos(\widehat{a\alpha'})}{R'}.$$

Si les directions a et a' font un angle constant :

$$(2) \quad \frac{\cos(\widehat{\alpha a'})}{\cos(\widehat{a\alpha'})} = -\frac{R}{R'} = -\frac{c'}{c}$$

en mettant $c = \frac{1}{R}$ et $c' = \frac{1}{R'}$.

(1) Nella seduta del 17 giugno 1928.

(2) Cfr. Note de l'auteur, dans ces « Rendiconti » (1928, VI, fascic. 6, du vol. VII).

C'est-à-dire :

Les courbures associées à deux directions quelconques, qui font entre elles un angle constant, sont (en changeant le signe de l'un des rapports) proportionnelles aux cosinus des angles que chacune fait avec l'associée de l'autre.

Si a' coïncide avec α , $\widehat{\alpha a'} = 0$

et

$$(3) \quad \cos(\widehat{a \alpha'}) = -\frac{c}{c'}.$$

Le cosinus de l'angle d'une direction a avec l'associée α' de son associée a' est égale et de signe contraire au quotient des courbures associées à a et a' .

Si a' est tangente à la courbe B de transport, en remplaçant a' par T et α' par N (normale principale), on aura

$$(4) \quad \frac{\cos(\widehat{a, N})}{\cos(\widehat{\alpha, T})} = -\frac{c}{c'}.$$

Pour qu'une direction a fasse un angle constant avec la courbe B de transport, il faut et suffit que les courbures associées avec la direction a et avec la tangente à la courbe (flexion) soient (en changeant le signe de l'un des rapports) proportionnelles aux cosinus des angles de la direction donnée avec la normale principale et de son associée avec la tangente à la courbe.

2. Enfin, si B est une géodésique, on aura, dans la formule (4) $c' = 0$ et

$$(5) \quad \frac{\cos(\widehat{\alpha, T})}{R} = 0.$$

D'où

$$\frac{1}{R} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(\widehat{\alpha, T}) = 0.$$

Donc :

Pour qu'une direction a fasse un angle constant avec la géodésique B de transport, il faut et suffit que cette direction ait un déplacement parallèle, ou que son associée soit constamment normale à B; c'est-à-dire, que la direction a se déplace parallèlement dans une variété V_m , subordonnée de V_n , renfermant la géodésique B et la direction donnée.

DIRECTIONS ASSOCIÉES.

3. Supposons en particulier que a' soit l'associée de a , et changeons de notation — la convenance va apparaître tout à l'heure — en désignant a par a_1 et a' par a_2 .

Soit aussi a_1 l'associée de a_2 , etc.; $\frac{1}{R_1} = c_1$ la courbure associée avec la direction a_1 , $\frac{1}{R_2} = c_2$ la courbure associée avec a_2 , etc. On aura

$$(6) \quad \frac{d \cos (\widehat{a_1 a_2})}{d\sigma} = \frac{\cos (\widehat{a_2 a_3})}{R_1} + \frac{\cos (\widehat{a_1 a_3})}{R_2}$$

ou bien, parceque $\widehat{a_1 a_2} = \frac{\pi}{2}$.

$$(6') \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos (\widehat{a_2 a_3})}{R_1} = c_1.$$

C'est-à-dire

$$(7) \quad \cos (\widehat{a_1 a_3}) = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{c_2}{c_1}.$$

Le cosinus de l'angle d'une direction a_1 avec l'associée a_3 de son associée a_2 est égal et de signe contraire au quotient des courbures associées avec a_1 et a_2 .

On aura aussi

$$(7') \quad \begin{cases} \cos (\widehat{a_2 a_4}) = -\frac{c_3}{c_2} \\ \cos (\widehat{a_3 a_5}) = -\frac{c_4}{c_3} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Donc

$$(8) \quad \cos (\widehat{a_1 a_3}) \cdot \cos (\widehat{a_2 a_4}) \dots \cos (\widehat{a_{p-2} a_p}) = (-1)^p \frac{c_p}{c_{p-1}}.$$

4. Si a_1 ne se déplace pas parallèlement le long de B, il en sera de même pour les associées successives a_2, a_3 , etc.

En effet, par suite de (6'), si a_2 se déplaçait parallèlement, on aurait $\frac{1}{R_2} = 0$; donc $\frac{1}{R_1} = 0$ et a_1 aurait un déplacement parallèle le long de B.

5. Il résulte aussi de la formule générale (1)

$$\frac{d \cos (\widehat{a_1 a_3})}{d\sigma} = \frac{\cos (\widehat{a_2 a_3})}{R_1} + \frac{\cos (\widehat{a_1 a_4})}{R_3};$$

ou, parceque $\widehat{a_2 a_3} = \frac{\pi}{2}$,

$$(8) \quad \frac{d \cos (\widehat{a_1 a_3})}{d\sigma} = c_3 \cos (\widehat{a_1 a_4}).$$

L'angle $(\widehat{a_1 a_3})$ sera constant si l'on a $(\widehat{a_1 a_3}) = \frac{\pi}{2}$.

On conclut aussi de l'équation (6') que l'angle $(\widehat{a_1 a_3})$ ne peut être constamment droit, car, dans ce cas, on aurait $\frac{I}{R_1} = 0$, contre l'hypothèse.

Dans l'espace ordinaire, la binormale n'est jamais la direction associée avec celle de la normale principale.

6. Si $c_1 = \pm c_2$, a_3 coïncidera avec $\pm a_1$.

Dans l'espace ordinaire, $\frac{I}{T}$ étant la torsion de B, c_1 la courbure associée avec la direction de la tangente (flexion) et c_2 la courbure associée avec la direction de la normale principale, on a

$$(10) \quad c_2^2 = c_1^2 + \frac{I}{T^2} \text{ (formules de Frenet).}$$

Donc a_3 coïncide avec $\mp a_1$, si la courbe est plane $\left(\frac{I}{T} = 0\right)$.

Meccanica. — *Su una terza equazione cardinale nella Dinamica dei sistemi materiali.* Nota di F. LAMBERTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nel 1872 sugli autorevoli « Comptes-Rendus » di Parigi due illustri scienziati, Clausius e Villarceau, dei quali il primo aveva due anni prima reso noto il teorema da lui chiamato *del viriale*, il secondo annunciava un nuovo teorema di *Meccanica generale* costituito dall'equazione sul moto di un sistema materiale:

$$(1) \quad \sum mv^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum mr^2 - \sum (Xx + Yy + Zz)$$

(ove s'indica con m la massa, x, y, z le coordinate, r la distanza dall'origine O degli assi coordinati e v la velocità del generico punto materiale; X, Y, Z , sono le componenti della forza totale agente sullo stesso punto), dissentendo nel paragonare i rispettivi teoremi circa la loro generalità sostanzialmente si contendevano la paternità dell'equazione riportata ⁽²⁾.

In realtà delle Note che erano fondamento nella controversia l'equa-

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(2) « Comptes-Rendus », t. LXX, p. 1314; e t. LXXV, pp. 232, 237 e 912.

zione (1) si trova, annunciata esplicitamente come un *nuovo teorema*, soltanto in quella del Villarceau, il quale inoltre ne deduce l'altra

$$(2) \quad \sum m w^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum m \varphi^2 - \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

per il moto relativo del sistema materiale rispetto al sistema di assi mobili che passano continuamente per il baricentro e conservano direzioni fisse. L'A. commenta questa proprietà dicendo che è *comune col principio delle aree e col principio delle forze vive*.

È da notare che Villarceau, al quale il teorema *sembrava dover prendere posto a lato del principio delle forze vive*, non ne stabilì in alcun modo il significato fisico. La presente Nota mira a colmare questa lacuna cui dovesi se le equazioni (1) e (2) non ebbero finora il posto che loro compete fra i teoremi generali della Dinamica. Nella esposizione che segue ci atterremo alle notazioni adottate nelle *Lezioni di Meccanica Razionale* dai professori Levi-Civita e Amaldi.

Sia il sistema S costituito dai punti materiali P_i ($i = 1, 2 \dots N$) per i quali indichiamo con m_i , \mathbf{v}_i , \mathbf{e}_i , rispettivamente, la massa, la velocità ed il vettore $P_i - G$, essendo G il baricentro di S; con \mathbf{v}_G la velocità assoluta di G , e $\mathbf{v}_i^{(r)}$ quella relativa di P_i rispetto al solito sistema di assi mobili baricentrici. Saranno fondamentali le note relazioni, scritte vettorialmente:

$$(3) \quad \sum_i^N m_i (P_i - G) = \sum_i^N m_i \mathbf{e}_i = 0,$$

$$(4) \quad \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(r)} = 0.$$

Immaginiamo, istante per istante, decomposta ciascuna delle $\mathbf{v}_i^{(r)}$ in due $\mathbf{v}_i^{(2)}$, $\mathbf{v}_i^{(\tau)}$, di cui la prima ha la direzione di \mathbf{e}_i , e $\mathbf{v}_i^{(\tau)}$ direzione ortogonale alla precedente, e consideriamo ciascuno dei moti di S per i quali il punto P_i ha ad ogni istante rispettivamente le velocità $\mathbf{v}_i^{(2)}$, $\mathbf{v}_i^{(\tau)}$. Indicheremo con \mathfrak{M} , \mathfrak{M}_G , \mathfrak{M}_r , \mathfrak{M}_p , \mathfrak{M}_τ , rispettivamente, i moti assoluto, di traslazione, relativo, ed i moti componenti dell'ultimo dianzi specificati, e talvolta anche determinati atti di moto appartenenti ai suddetti moti, per cui si avrà (con manifesto significato della notazione simbolica):

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_G + \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_G + \mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_\tau;$$

inoltre conveniamo, una volta per tutte, di distinguere corrispondentemente, cioè o non apponendo alcun indice oppure ponendo gli indici sopra usati ai simboli scelti a rappresentarle, le espressioni e grandezze vettoriali e scalari che derivano al sistema S in virtù dei precedenti moti.

Si sa già che, per definizione di baricentro:

$$\sum_i^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G \sum_i^N m_i,$$

la quale esprime che la quantità di moto \mathbf{Q} di S per il moto \mathfrak{M} è data unicamente dal moto \mathfrak{M}_G , ossia:

$$(5) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_G.$$

D'altronde se si ha presente la (3) facilmente si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{e}_i &= \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(r)} \times \mathbf{e}_i = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(p)} \times \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J_G, \\ \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{e}_i &= \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(r)} \wedge \mathbf{e}_i = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(\tau)} \wedge \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

(J_G momento polare d'inerzia del sistema S rispetto al baricentro G) eguaglianze che, indicando con H lo scalare espresso dal primo membro della prima, e \mathbf{K} il vettore che ha per espressione il primo membro dell'altra, si scriveranno:

$$(6) \quad H = H_r = H_p = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J_G,$$

$$(7) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_r = \mathbf{K}_\tau.$$

Assumendo come polo un punto ad arbitrio O' , e posto $P_i - O' = \mathbf{P}'_i$, in virtù della (4) si ha per il moto \mathfrak{M}_r :

$$\begin{aligned} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(r)} \times \mathbf{e}'_i &= \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(r)} \times \mathbf{e}_i = H_r, \\ \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(r)} \wedge \mathbf{e}'_i &= \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(r)} \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{K}_r, \end{aligned}$$

ossia i primi membri delle precedenti eguaglianze non dipendono dal particolare polo scelto O' , circostanza che possiamo rilevare dicendo che H_r e \mathbf{K}_r sono *intrinseche* all'atto di moto \mathfrak{M}_r cui esse si riferiscono.

I moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, per cui sono soddisfatte le (6), (7), hanno di particolare, in confronto con altre coppie di moti componenti di \mathfrak{M}_r con le quali potrebbero essere soddisfatte relazioni analoghe alle suddette, che nei loro riguardi il baricentro, sotto aspetti distinti che non richiedono di essere delucidati, compie una funzione paragonabile a quella di un *cardine*. In relazione a ciò il primo moto, \mathfrak{M}_p , può evidentemente chiamarsi *moto componente di dilatazione*; l'altro, \mathfrak{M}_τ , il quale ad ogni istante ammette fra gli atti di moto che possono appartenergli qualsiasi rotazione rigida di S attorno a G , sembra opportuno denominarlo *moto componente di turbolenza*.

Le grandezze funzioni del tempo \mathbf{Q} , \mathbf{K} (di cui sono note le denominazioni) e H (che appresso denomineremo), le quali perchè appartenenti a moti distinti componenti di \mathfrak{M} sono indipendenti fra loro, e considerate nelle loro specie sono diverse, perchè \mathbf{Q} ha dimensioni fisiche differenti di H e \mathbf{K} , e di queste H è scalare e \mathbf{K} un vettore, sono, riferite per ogni istante al simultaneo atto di moto del sistema S , da riconoscersi come *entità meccaniche elementari* di diversa specie.

Il significato o principio fisico corrispondente alla (2) deriva in quanto essa dà la derivata temporale dell'entità H , finora non considerata, come le notissime equazioni denominate cardinali:

$$(8) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}_c \quad ; \quad (9) \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}_c ;$$

(ove, circa la seconda, intendiamo che i momenti \mathbf{K} , \mathbf{M} , siano riferiti al baricentro G come polo) danno le analoghe derivate di \mathbf{Q} e \mathbf{K} . Il primo, termine del secondo membro della (2), scritto in coordinate vettoriali può trasformarsi:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_i^N m_i \mathbf{e}_i^2 = \frac{d}{dt} \sum_i^N m_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i^{(r)} = \frac{d}{dt} H_r = \frac{d}{dt} H,$$

quindi la (2) può scriversi nella forma di cui faremo uso

$$(2') \quad \frac{dH}{dt} = 2 T_r + \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{e}_i,$$

dove T_r è la forza viva relativa di S , e \mathbf{F}_i la risultante di tutte le forze che sono esercitate nel generico punto P_i .

Convien però dare alla (2') un'altra forma in cui è eliminata un'incongruenza formale che si può riscontrare nella precedente.

Operiamo la decomposizione espressa da

$$(10) \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(r)} + m_i \mathbf{a}_G = \mathbf{F}_i^{(r)} + \mathbf{F}_i^{(G)}$$

in cui \mathbf{a}_G è l'accelerazione di G , e $\mathbf{F}_i^{(r)}$ la forza che determina per P_i l'accelerazione relativa $\mathbf{a}_i^{(r)}$, ed osserviamo che, per la (3),

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i^{(G)} \times \mathbf{e}_i = 0.$$

Ponendo

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i^{(r)} \times \mathbf{e}_i = \mathbf{L},$$

ed H in luogo di H_0 (formalmente $H - H_0 = \sum_{i=1}^N m_i v_i \times v_i = 0$) in (2) diventa:

$$\frac{dH}{dt} = 2 T_0 - L_0.$$

Le grandezze nelle quali transitano funzionalmente indissolubilmente legate al tempo, ossia le velocità e accelerazioni che implicitamente si figurano, sono tutte riferite riferendosi allo stesso sistema materiale solidale con gli assi baricentrici. L'incongruenza è così eliminata.

Il passaggio dalla (2') alla (2'') ha valore anche perché mette in evidenza che si può, ed è logico, nell'applicare l'equazione di cui si tratta ad un qualsiasi sistema materiale, trascurare ogni sistema di forze che determini soltanto un'accelerazione traslativa.

Osservazione. Le espressioni del genere di

$$H = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \quad L = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_i,$$

si ritiene appropriato chiamarle col nome di *momenti cinematici*, facendole seguire dall'indicazione della specie dei vettori e dal polo cui si riferiscono. La denominazione di *risultante*, ora usata quando i vettori sono forze, non può, per evidenti ragioni etimologiche, essere usata generalmente.

Se si considera il momento scalare del sistema di forze applicato \mathbf{F} (relative) rispetto ad un polo qualunque (O') si trova che, per la relazione:

$$(11) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(r)} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i^{(r)} = 0,$$

esso è eguale ad L , e non dipende dalla posizione di (O'), ossia è intrinseco al suddetto sistema di forze.

Possiamo ora concisamente esprimere il significato dell'equazione (2'') enunciando il teorema della Dinamica relativa:

La derivata temporale del momento cinematico baricentrico della quantità di moto (relative) di un sistema materiale è data dall'istante meccanico di forze (relative) agenti sul sistema, ovvero dal doppio della forza cinetica relativa del sistema.

Anticipo una parentesi osservando che della stessa equazione è possibile eseguire gl'integrali nel caso in cui $\mathbf{F}_i^{(r)} = 0$ per $i = 1, 2 \dots N$ ad ogni istante dell'intervallo temporale in cui si considera S , perché allora il moto relativo di ogni punto sarà rettilineo uniforme e $2 T = \text{cost.}$. Se ne deducono successivamente le relazioni:

$$(12) \quad \begin{cases} H = ct + c_1 \\ L = ct^2 + 2c_1t + c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ cost. d'integrazione})$$

le quali possono chiamarsi *integrali*, rispettivamente, *del momento scalare intrinseco delle quantità di moto* e *del momento d'inerzia baricentrico*.

Passiamo ora all'equazione (1), in simboli vettoriali

$$(1') \quad \frac{d}{dt} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i = 2\mathbf{T} + \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_i$$

che scriveremo

$$(1'') \quad \frac{d}{dt} H = 2\mathbf{T} + L$$

ove H, L sono rispettivamente i momenti scalari, rispetto al polo fisso O , delle quantità di moto e delle forze. Se, in relazione a ciò, anche H la consideriamo *entità meccanica*, può dirsi che la (1), messa nella forma (1''), è fisicamente interpretata, e che essa completa la terna di equazioni cardinali, accanto all'equazione (8) e all'altra equazione cardinale nota

$$(13) \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}_e$$

nella quale si trovano i soliti momenti \mathbf{K}, \mathbf{M}_e , rispetto al precedente polo O , che converrà distinguere con la qualifica di *vettoriali*.

Ma è d'uopo rilevare che le entità $\mathbf{Q}, H, \mathbf{K}$, non sono indipendenti fra loro come quelle della precedente terna $\mathbf{Q}, H, \mathbf{K}$, perciò chiamate elementari. Ci varremo per H della relazione, facile a dedurre, fra i momenti scalari di un sistema di vettori, di risultante \mathbf{R} , rispetto a due distinti poli O, O' :

$$\lambda = \lambda' + (\mathbf{O}' - \mathbf{O}) \times \mathbf{R}. \quad (\alpha)$$

Da essa, se i vettori del sistema sono le quantità di moto $m_i \mathbf{v}_i$ in S , ed il polo O' è situato in G , si avrà

$$(14) \quad H = H' + \mathbf{r}_G \times \mathbf{Q},$$

avendo posto $G - O = \mathbf{r}_G$, il che ci mostra come H dipenda da \mathbf{Q} tranne nelle condizioni in cui il prodotto $\mathbf{r}_G \times \mathbf{Q}$ è nullo, per le quali $H = H'$. E facilmente si verifica che se nella derivata della (14):

$$(15) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{dH'}{dt} + \mathbf{v}_G \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}_G \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt},$$

si tiene conto dell'identità $\mathbf{v}_G \times \mathbf{Q} = 2\mathbf{T}_G$ e si sostituiscono i valori di $\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ ($= \sum_i^N \mathbf{F}_i$) e di $\frac{dH'}{dt}$, dato dalla (2'), si ottiene la (1'). Da cui risulta che questa è formata nel modo che si vede chiaramente dal secondo membro della (15), cioè è somma di una speciale combinazione (lineare geometrica) delle equazioni cardinali (8), (2'), e della suddetta identità.

Analoghe deduzioni, in conformità con ciò che è noto, si otterrebbero nei riguardi di \mathbf{K} , $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$, salvo la divergenza delle circostanze (eccetto se $\mathbf{r}_G = 0$) in cui si annullano i prodotti $\mathbf{r}_G \times \mathbf{Q}$, $\mathbf{r}_G \wedge \mathbf{Q}$, cui è da aggiungere che nell'espressione di $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$ corrispondente alla (15) il termine $\mathbf{r}_G \wedge \mathbf{Q}$ è identicamente nullo.

Se ne conclude che fra le terne di equazioni cardinali (8), (1''), (13), delle quali per le due ultime il polo è un punto qualunque dello spazio, quella formata dalle (8), (2''), (9), alla quale la prima si riduce se $\mathbf{r}_G = 0$, tiene il posto di terna fondamentale.

Per la vecchia equazione (13) la circostanza che nel secondo membro trovasi soltanto il momento delle forze agenti ne rendeva chiaro il significato fisico in quanto, già considerandosi \mathbf{K} come entità meccanica, la stessa equazione traduce, sotto uno speciale aspetto ma direttamente, il principio dell'uguaglianza dell'effetto alla causa. Si può pervenire ad analoga evidenza per la (1) mediante un artificio non nuovo in Meccanica, dal quale sorgeranno interessanti osservazioni e l'indicazione di un secondo caso particolare - il primo è quello che, sul precedente esempio della (2''), si presenta se, durante l'intervallo in cui si considera S , $\mathbf{F}_i = 0$ per $i = 1, 2 \dots N$ - in cui la (1) diventa facilmente integrabile. Sia il generico punto mobile P_i di S , di cui per brevità ometteremo l'indice i , e consideriamo la retta OP ruotante attorno ad O in modo da passare sempre per P . Indicheremo con r la distanza OP e con \mathbf{v}' , di componente \dot{r} , la velocità del moto relativo di P sulla retta, e \mathbf{v}'' quella di trascinamento. Dell'accelerazione di P avremo da considerare soltanto la componente in direzione di OP , composta della relativa, \ddot{r} , e della centripeta espressa da $-\frac{v''^2}{r}$. Se la componente nella stessa direzione della forza \mathbf{F} agente su P è F' e si introduce, conforme alla teoria dei moti relativi, la forza fittizia espressa da $m \frac{v''^2}{r}$, combinando la relazione:

$$m\ddot{r} = F' + m \frac{v''^2}{r}$$

coll'identità:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\dot{r}^2 + m\ddot{r}r,$$

risulta:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}' \times \mathbf{r}) = \left(F' + m \frac{v'^2 + v''^2}{r} \right) \mathbf{r}.$$

In questa, facilmente interpretabile nei suoi singoli termini, si vede che al termine $m \frac{v'^2}{r}$, pur essendone distinta la causa, compete significato analogo a quello del termine $m \frac{v'^2}{r}$, ossia anch'esso deve considerarsi espressione di una forza fittizia. Indicando con f la forza fittizia risultante delle due, avente la direzione di OP, e considerando OP come vettore r , la precedente relazione si può scrivere:

$$(16) \quad \frac{d}{dt}(mv \times r) = (F + f) \times r = F^* \times r,$$

dove si è posto F^* per $F + f$. E finalmente mediante analoghe considerazioni per tutti i punti di S la (1') diventa:

$$\frac{d}{dt} H = L^*,$$

in cui $L^* = \sum_i F_i^* \times r_i$, che per la sua forma dimostra l'asserto.

Tornando al generico punto P sorge un'osservazione. Se considerazioni analoghe alla precedente le facciamo, invece che per O, per un altro punto qualunque A, il momento scalare della forza fittizia f rispetto a detto polo A sarà ancora mv^2 . Nel piano $\Pi \equiv (O, v)$ esiste un punto A, ed uno solo, per cui determinando come prima la f , anche il suo momento rispetto ad O è mv_i^2 . Questo punto si dimostra, mediante la relazione (α), che è il vertice del triangolo rettangolo OAP di cui il cateto OA è parallelo e quello PA perpendicolare a v . Detta forza fittizia avrà, come forza d'inerzia, un preciso significato se facciamo l'ipotesi che all'istante t_0 , e aggiungiamo che lo stesso sia per l'intervallo Δt successivo, agisca su P la forza $F = -f$ che obbliga P a ruotare attorno ad A su Π . Se analoga ipotesi si fa per gli altri intervalli successivi $\Delta' t, \Delta'' t, \dots$, in numero indefinito, in cui si sia decomposto l'intervallo (t_0, t_1) , considerando a ciascun istante $t' = t_0 + \Delta t, t'' = t' + \Delta' t, \dots$ i triangoli OA'P, OA''P, \dots formati nell'identico modo di OAP, e si fanno tendere tutti i Δt a zero, i punti A', A'', \dots tenderanno a trovarsi sulla circonferenza di raggio OA, sul piano Π , e la traiettoria di P, con velocità di grandezza costante, sarà l'evolvente $E \equiv (O, \hat{\mathcal{S}})$, dove $\hat{\mathcal{S}}$ indica, ad un istante qualunque compreso nell'intervallo, la direzione e il punto di applicazione del vettore v . Con tale ipotesi il secondo membro della (16) è nullo e quindi si ha $mv \times r = \text{costante}$. Sia ora qualunque la forza F e immaginiamola, all'istante generico t , decomposta nella terna ortogonale φ, η, χ , avendo φ la direzione di v , e η essendo sul piano Π ; e decomponiamo ancora η in due, delle quali una eguale a $-f$, l'altra a $\psi = \eta + f$. Nei riguardi di dette componenti riferendoci a qualunque istante dell'intervallo (t_0, t_1) , può particolarmente pre-

sentarsi: 1°) Il caso di prima, corrispondente alla condizione $\varphi + \psi + \chi = 0$. 2°) $\psi + \chi = 0$: la traiettoria di P è ancora l'evolvente E, ma $m\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ non è in generale costante. 3°) $\varphi + \psi = 0$: saranno ancora costanti il modulo di \mathbf{v} e $m\mathbf{v} \times \mathbf{r}$, ma la traiettoria di P non sarà in generale un'evolvente, perchè non piana.

Ritorniamo ora ad S ed estendiamo le condizioni che precedono a tutti i suoi punti, singolarmente. Se per $i = 1, 2, \dots, N$ si verifica il primo od il terzo dei casi speciali suddetti consegue l'esistenza degli integrali:

$$H = C, \text{ costante}$$

$$J = 2Ct + C_1 \quad (J \text{ mom. pol. d'in. di S risp. ad O}),$$

cioè gli stessi che valgono se soltanto, ad ogni istante, $L^* = 0$.

È ovvio che analoghe considerazioni ed ipotesi nei riguardi delle forze $\mathbf{F}_i^{(r)}$ che si trovano nella (2''), per il moto \mathcal{M}_r , danno come integrali di detta equazione espressioni per H, J_G, identiche a quelle sopra scritte per H, J.

Meccanica. — *Sulla estensione al moto continuo del teorema di Lagrange-Bertrand relativo al moto impulsivo.* Nota di E. GUGINO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Tra i teoremi generali sul moto impulsivo è particolarmente notevole, per la sua compendiosa espressività, il teorema del Robin. Sia S un qualsivoglia sistema materiale di N punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) di masse m_i , a vincoli bilaterali privi di attrito, comunque sollecitato; supponiamo che ad un determinato istante t_0 intervengano delle percosse attive \mathbf{F}_i caratterizzate dai corrispondenti impulsi istantanei:

$$\mathbf{I}_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{F}_i dt.$$

Ove si denoti: con \mathbf{v}_i una generica distribuzione delle velocità compatibile coi legami, a partire dalla configurazione del sistema all'istante t_0 ; con \mathbf{v}_i^- le determinazioni delle velocità anteriori dei punti P_i , il teorema del Robin stabilisce, che l'atto di moto posteriore \mathbf{v}_i^+ , fra tutti gli atti di moto \mathbf{v}_i compatibili coi legami, è quello che rende minima la funzione:

$$G = \frac{1}{2} \sum_i^N \frac{1}{m_i} \{ \mathbf{I}_i - m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^-) \}^2$$

(1) Nella seduta del 16 dicembre 1928.

considerata come funzione quadratica delle sole v_i essendo \mathbf{I} e \mathbf{v}_i quantità prefissate (1).

È importante rilevare che siffatto teorema sul moto impulsivo, corrisponde al principio della minima costrizione del Gauss pel moto dei sistemi sollecitati da forze ordinarie (2) senz'alcuna restrizione circa la natura dei vincoli, purchè bilaterali e privi di attrito. Ricordiamo che tali vincoli risultano espressi da equazioni lineari, in generale non omogenee, nelle componenti delle velocità v_i . Se inoltre, riferendoci al moto impulsivo, facciamo l'ulteriore ipotesi che i vincoli siano reversibili, vale a dire esprimibili per mezzo di analoghe equazioni lineari ed omogenee — come ad. es. se trattasi di vincoli indipendenti dal tempo — ha luogo, come è noto, l'importante teorema di Lagrange-Bertrand (3), in virtù del quale si stabilisce il confronto fra la forza viva T^+ del sistema, per l'effettivo atto di moto posteriore \mathbf{v}_i^+ e la forza viva \mathcal{T} che competerebbe allo stesso sistema per un ipotetico atto di moto \mathbf{v}_i , compatibile coi vincoli, realizzato, a partire dal medesimo atto di moto anteriore, mercè la brusca imposizione di nuovi legami opportunamente scelti, rimanendo immutati gli impulsi attivi. Il teorema afferma che T^+ è massima rispetto a tutte le possibili \mathcal{T} .

Ora ci proponiamo di mostrare come il teorema di Lagrange-Bertrand, nella particolare ipotesi che i vincoli siano indipendenti dal tempo, possa estendersi ai moti dei sistemi sollecitati da forze ordinarie. Tale estensione sarà immediata ove si tenga conto del teorema del massimo effetto cinetodinamico di cui ci siamo occupati in una recente Nota (4). In altri termini, dato un qualsivoglia sistema materiale S a legami bilaterali privi di attrito e indipendenti dal tempo, se si fissa un generico istante t ed un successivo intervallo di tempo τ abbastanza piccolo, ci proponiamo di stabilire il confronto tra la forza viva effettiva $T(t + \tau)$ del sistema all'istante $t + \tau$ e la forza viva $\mathcal{T}(t + \tau)$ che competerebbe al medesimo sistema nello stesso istante $t + \tau$, qualora a partire dall'atto di moto relativo all'istante t , rimanendo immutate le forze attive, il sistema subisse, nell'intervallo di tempo τ , un generico movimento virtuale, realizzato mercè l'aggiunta di vincoli opportunamente scelti. Faremo vedere che $T(t + \tau)$ è massima rispetto a tutte le possibili $\mathcal{T}(t + \tau)$.

Adoperando le notazioni della precedente Nota, essendo:

M_i la posizione generica del punto P_i all'istante t ,

N_i la posizione del punto P_i all'istante $t + \tau$ nel moto reale vincolato (moto naturale),

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II (2ª parte), p. 623.

(2) *Id.*, *Id.*, p. 624.

(3) *Id.*, *Id.*, p. 629.

(4) Cfr. E. GUGINO, *Sopra una nuova interpretazione ecc.* «Rend. Acc. Lincei», vol. VIII, p. 558, 1928.

V_i la posizione dello stesso punto P_i all'istante $t + \tau$ per effetto del generico movimento virtuale sopra caratterizzato, abbiamo dimostrato che per τ abbastanza piccolo ha luogo la disuguaglianza

$$(I) \quad \sum_i^N m_i \overline{M_i N_i^2} > \sum_i^N m_i \overline{M_i V_i^2}$$

qualunque sia il generico movimento virtuale $M_i V_i$ e l'istante t che si considera. Se entro i limiti di validità della (I) indichiamo con 2τ l'intervallo di tempo al quale la (I) stessa intendosi riferita, e dividiamo inoltre entrambi i membri per $4\tau^2$ si ottiene:

$$(I') \quad \sum_i^N m_i [\mathbf{v}_{m/i}^{(2\tau)}]^2 > \sum_i^N m_i [\mathbf{v}_{m/i}^{(2\tau)}]^2$$

essendo $\mathbf{v}_{m/i}^{(2\tau)}$ e $\mathbf{v}_{m/i}^{(2\tau)}$ rispettivamente le velocità medie relative all'intervallo di tempo 2τ , del generico punto P_i , nei moti naturale e virtuale considerati. D'altra parte si ha:

$$(II) \quad \mathbf{v}_{m/i}^{(2\tau)} = \mathbf{v}_i + \frac{\Delta \mathbf{v}_i}{2} \quad \text{ove} \quad \Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t + 2\tau) - \mathbf{v}_i(t)$$

ed applicando la formola di Taylor ed arrestando lo sviluppo ai termini di primo grado in τ , si può scrivere:

$$\mathbf{v}_i(t + 2\tau) = \mathbf{v}_i(t) + 2\mathbf{a}\tau$$

e per la seconda delle (a) la prima diviene:

$$\mathbf{v}_{m/i}^{(2\tau)} = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}\tau.$$

D'altra parte per la formola di Taylor relativa però all'intervallo τ si ha:

$$\mathbf{v}_i(t + \tau) = \mathbf{v}_i(t) + \mathbf{a}\tau$$

onde

$$\mathbf{v}_{m/i}^{(2\tau)} = \mathbf{v}_i(t + \tau).$$

Con procedimento analogo si ottiene:

$$\mathbf{v}_{m/i}^{(2\tau)} = \mathbf{v}_i(t + \tau).$$

La (I') assume la forma definitiva:

$$\sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2(t + \tau) > \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2(t + \tau)$$

che manifestamente equivale alla:

$$(2) \quad T(t + \tau) > T(t + \tau).$$

La proposizione è così dimostrata.

Si può quindi affermare che come al teorema del Robin sul moto impulsivo corrisponde nella dinamica dei sistemi sottoposti a forze ordinarie il principio del Gauss, così al teorema di Lagrange-Bertrand si può fare corrispondere il teorema del massimo effetto cineto-dinamico precedentemente menzionato.

Ciò posto, sottraendo da entrambi i membri della (2) la forza viva $T(t)$ del sistema all'istante generico t , si perviene alla diseuguaglianza:

$$\Delta T(t) > \Delta \mathcal{E}(t)$$

la quale esprime la notevole proprietà che a partire dall'istante t , il moto naturale, nel successivo intervallo di tempo τ , è quello, che rende massima la variazione di forza viva, in confronto di qualunque altro movimento virtuale nello stesso intervallo di tempo, a partire dall'atto di moto relativo all'istante t , ferme restando le forze direttamente applicate; di guisa che, se si verifica la circostanza che durante l'intervallo di tempo τ , la forza viva $T(t)$, per effetto del moto naturale, subisce un aumento, siffatto aumento risulta massimo, se invece subisce una diminuzione, siffatta diminuzione risulta minima, in confronto di qualsivoglia movimento virtuale avente i caratteri sopra indicati.

D'altra parte essendo i vincoli indipendenti dal tempo, potremo applicare il teorema delle forze vive:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta T(t) = \int_t^{t+\tau} \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{v}_i dt \\ \Delta \mathcal{E}(t) = \int_t^{t+\tau} \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{v}_i dt \end{array} \right.$$

ove i due integrali a secondo membro indicano rispettivamente i lavori complessivi eseguiti dallo stesso sistema di forze attive \mathbf{F}_i , nell'intervallo di tempo τ in virtù dei moti naturale e virtuale considerati; dalla (2) tenendo conto delle (3) si deduce che il moto naturale, nell'intervallo di tempo τ , è quello per cui il lavoro complessivo effettuato dalle forze attive risulta massimo, se trattasi di lavoro motore risulta minimo, se trattasi invece di lavoro resistente, in confronto del lavoro eseguito dallo stesso sistema di forze, nell'intervallo di tempo τ , per qualsivoglia movimento virtuale sopra caratterizzato.

Se in particolare la sollecitazione cui è sottoposto il sistema si suppone conservativa, si conclude che per effetto del moto naturale l'energia potenziale, durante l'intervallo di tempo τ , subisce la massima diminuzione od il minimo aumento, in confronto di qualsivoglia movimento virtuale più volte considerato; tale proposizione esprime l'esistenza, nell'intervallo di tempo τ , di una particolare tendenza, di un senso ben determinato nelle

trasformazioni di energia potenziale in cinetica e viceversa, per effetto del moto naturale del sistema dotato esclusivamente delle due forme di energia meccanica (potenziale e cinetica). Ove si stabilisca una classifica delle due dette forme di energia e si attribuisca alla energia potenziale una qualità superiore rispetto all'energia cinetica, si potrà allora affermare che per effetto del moto naturale del sistema considerato, durante l'intervallo di tempo τ , vi è una tendenza alla massima degradazione della energia di forma superiore. Tale enunciato, in un senso però molto ristretto e dentro i limiti della meccanica pura, potrà servire di preparazione, quasi come premessa, alla celebre proposizione ⁽¹⁾ di W. Thomson conosciuta sotto il nome di « postulato della degradazione della energia » che esprime in forma concisa il secondo principio della termodinamica: Vi è attualmente nel mondo materiale una tendenza universale alla degradazione della energia meccanica.

Astrofisica. — *Deduzione della legge sperimentale delle durate dei colori crepuscolari delle nuvole e probabile discriminazione tra la teoria di uno schermo diffrangente macroscopico (globo terracqueo) e quella di schermi microscopici (pulviscolo).* Nota di P. BARRECA, presentata dal Corrisp. M. LA ROSA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Sulla definizione della gravità normale.* Nota di G. SILVA, presentata ⁽²⁾ dal Socio C. SOMIGLIANA.

1. Lo Helmhert nel suo classico trattato di Geodesia superiore (vol. II, 1884) ⁽³⁾ ha considerato come superficie matematica della Terra uno sferoide di rotazione al quale corrisponde sulla superficie e nei punti esterni (supposte naturalmente tutte le masse interne) l'espressione seguente del potenziale della gravità, proveniente da uno sviluppo in serie, fondato sulle funzioni sferiche, della espressione generale del potenziale stesso:

$$(1) \quad U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{C0^2 r^3}{2Mk^2} \cos^2 \varphi' + \right. \\ \left. + \frac{D}{r^4} \left(\sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35} \right) \right\}.$$

(1) W. THOMSON, « Proc. R. Soc. », Edinburgh, aprile 1852.

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(3) V. anche *Die Schwerkraft und die Masse vertheilung der Erde* (« Encycl. Math. Wiss. », Bd. VI, 1 B, H. 2, p. 92).

In questa espressione φ' è la latitudine geocentrica e gli altri simboli hanno significati noti che non starò qui a richiamare. Per punti prossimi alla superficie terrestre il secondo e il terzo termine tra le graffe della (1) sono del primo ordine, cioè dell'ordine dello schiacciamento terrestre, l'ultimo è presupposto *a priori* del secondo ordine. I termini successivi dello sviluppo sono trascurati.

Il Pizzetti nel suo trattato del 1913: *Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti*, ha considerato invece l'espressione del potenziale della gravità da lui trovata da tempo e valevole rigorosamente se una delle superficie di livello racchiudente tutte le masse è un ellissoide di rotazione.

Dalle due espressioni del potenziale scendono quelle della gravità alla superficie dello sferoide e rispettivamente dell'ellissoide considerati come superficie di riferimento per l'effettivo geode terrestre, cioè quelle che potrebbero chiamarsi le *formole teoriche sferoidica ed ellissoidica della gravità normale*.

Le ricerche del Pizzetti sono state largamente e brillantemente continuate in questi ultimi anni dal prof. Somigliana, il quale sostiene la convenienza di fondare su di esse la definizione della gravità normale ¹⁾. Una proposta analoga e con analoga motivazione è stata fatta anche dalla Unione geofisica americana alla Conferenza internazionale di Praga nel 1927 ²⁾, ma la questione è ancora aperta. Mi propongo in questa Nota di esaminarla da vari punti di vista.

2. È anzitutto da osservare che la definizione ellissoidica della gravità normale è un caso particolare della definizione sferoidica. Infatti, in entrambe le definizioni, la gravità g alla latitudine astronomica φ può essere espressa fino ai termini di secondo ordine mediante la formola:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi).$$

Essendo g_e e g_p i valori della gravità all'equatore e al polo, il coefficiente di primo ordine $\beta = (g_p - g_e) : g_e$ e quello di secondo ordine β_1 possono esprimersi mediante lo schiacciamento $\alpha = (a - c) : a$, mediante il rapporto tra la forza centrifuga e la gravità entrambe calcolate all'equatore: $\gamma = a\omega^2 : g_e$ e infine, nel caso dello sferoide, mediante un terzo parametro f del secondo ordine. Con il Darwin ³⁾ definirò f indicando con $1, a_1$ la massima sopraelevazione dello sferoide sull'ellissoide, la quale si presenta alla latitudine $\varphi = 45^\circ$.

(1) C. SOMIGLIANA, I) *Sulla definizione della gravità normale*. II) *Sulla gravità normale e la formola di Helmert*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », ser. 6^a, vol. VII, 1^o sem., 1928.

(2) « Bulletin géodésique », 1927, n. 14, pp. 86, 89.

(3) G. H. DARWIN, *The theory of the Figure of the Earth*, ecc. « Monthly Notices of the R. A. S. », vol. LX, 1899-1900, p. 98.

Le espressioni di β e di β_1 , quali sono date dal Darwin e quali possono facilmente dedursi dalle formole stabilite dallo Helmhert nei §§ 12-14 del volume II del suo trattato⁽¹⁾ sono

$$(2) \quad \beta = \frac{5}{2} \gamma - \alpha - \frac{17}{14} \alpha \gamma - \frac{2}{7} f \quad \beta_1 = \frac{1}{8} \alpha^2 - \frac{5}{8} \alpha \gamma + \frac{3}{4} f.$$

Per $f=0$ si ottengono le note espressioni del caso ellissoidico, che ad es. si possono ricavare dalla formola del Pizzetti data nel § 22 del suo trattato, ponendo per i^2 [che è il rapporto $(a^2 - c^2) : c^2$] la sua espressione in funzione dello schiacciamento, cioè $2\alpha + 3\alpha^2$.

Approfittando del parametro che l'equazione dello sferoide contiene in più dell'ellissoide, lo Helmhert considera particolarmente (§ 17) tre sferoidi e precisamente: 1° quello per cui $\beta_1 = 0$, sulla cui superficie l'espressione della gravità è esattamente $g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi')$; 2° quello già studiato dal Bruns che corrisponde al caso in cui nella (1) manca il termine di secondo ordine ($D=0$); 3° quello per il quale $f=0$, avente cioè la forma ellissoidica.

Ad una qualunque delle tre forme lo Helmhert attribuisce la denominazione di *sferoide normale*, ed osserva come dall'espressione (1) di U si possano poi trarre r e g per una qualunque altra superficie di livello esterna allo sferoide, restando così definita la gravità normale non solo sulla superficie, ma anche in tutto il campo gravitazionale esterno.

3. La definizione ellissoidica della gravità normale è dunque, come si è asserito, un caso particolare della definizione sferoidica, ma è un caso particolare notevole. La formola ellissoidica infatti scende da una espressione rigorosa del potenziale della gravità e può essere estesa a quanti si vogliano termini⁽²⁾, mentre l'espressione (1) di questo potenziale, da cui scende la formola sferoidica, è soltanto approssimata. Anzi lo sviluppo di cui la (1) comprende i primi termini si dimostra valido per i punti esterni ad una sfera racchiudente tutte le masse terrestri e può essere esteso anche allo spazio compreso tra la superficie terrestre e quella sfera solo con un'ipotesi restrittiva sulla distribuzione delle masse che si trovano al di fuori di un'altra sfera inscritta nello sferoide.

In contrapposto la formola ellissoidica presenta forse lo svantaggio di non rispondere con rigore a quella che potrebbe dirsi la *definizione teorico-meccanica della gravità normale*.

(1) Le quantità α , β , γ sono indicate dallo Helmhert (in caratteri gotici) con α , β , γ , dal Darwin con e , β , m ; in luogo di f , lo Helmhert introduce il parametro $\vartheta = D : 4$ ed è:

$$f = \alpha \left(\frac{5}{2} \alpha - \beta \right) - \vartheta.$$

(2) Il CASSINIS in una lettera al prof. SOMIGLIANA, pubblicata negli « Atti della R. Accademia di Torino » (*Sulla determinazione dello schiacciamento terrestre*, ecc., vol. LXII, 1627) dà appunto anche il termine di terzo ordine.

Infatti, dal punto di vista teorico-meccanico, si dovrebbe supporre la Terra ancora fluida e con le masse di diversa densità distribuite come è richiesto dall'idrostatica; la superficie esterna di equilibrio di questa Terra fluida sarebbe la *superficie matematica normale* della Terra attuale, pur sapendosi che la solidificazione delle masse non ha mantenuto, almeno nella crosta, la distribuzione teorica della densità. Ora l'ellissoide di rotazione può bensì essere superficie di equilibrio per una massa fluida ruotante omogenea e quindi anche per una massa che si possa considerare come la riunione di una massa fluida omogenea e di un corpo di attrazione esterna nulla ⁽¹⁾, ma, come osserva lo Helmholtz ⁽²⁾, esso non può essere a rigore superficie di equilibrio per una massa fluida ruotante nella quale la densità vada crescendo verso il centro come avviene per la nostra Terra.

Il Wiechert ⁽³⁾ e il Darwin ⁽⁴⁾ hanno studiato quale dovrebbe essere la detta superficie matematica della Terra, il primo nell'ipotesi che questa consista di un nucleo interno di ferro e di una crosta esterna di roccia dello spessore di $\frac{1}{5}$ circa del raggio, il secondo nell'ipotesi che la densità all'interno della Terra segua la legge di Roche ed anche nell'ipotesi di una massa omogenea e di un nucleo puntiforme pesantissimo. In tutti e tre i casi quella superficie è uno sferoide leggermente depresso alle medie latitudini rispetto all'ellissoide di eguali raggi equatoriale e polare. La massima depressione per $\varphi = 45^\circ$ è: 1° m. 2.79 con l'ipotesi di Wiechert, assunti $\alpha = \frac{1}{297}$, la densità del nucleo di ferro = 8.2, quella della crosta = 3.2; 2° m. 3.26 con l'ipotesi di Roche; 3° m. 8.8 con l'ipotesi del nucleo di dimensioni minime e pesantissimo nel caso che rende massima quella depressione (massa nucleare = $\frac{457}{1000}$ di quella totale).

Dal punto di vista pratico si tratta evidentemente di depressioni trascurabili di fronte alle deviazioni del geoide effettivo rispetto ad una qualunque superficie matematica *normale*.

4. I valori dei due coefficienti β e β_1 della formola della gravità normale possono essere facilmente calcolati mediante le (2) quando si conoscano lo schiacciamento α , le grandezze a e g_e che occorrono, ma non con estrema esattezza, per il calcolo pratico di γ_e , nel caso sferoidico, il quarto parametro f . Ma sarebbe evidentemente molto più importante poter dedurre sperimentalmente dai valori di g determinati a diverse latitudini i coefficienti g_e , β e β_1 della formola della gravità normale e con essi, e con un valore approssimato di a , dedurre lo schiacciamento α e il parametro f dello sferoide terrestre. Senonchè le irregolarità del geoide e l'esistenza di masse

(1) PIZZETTI, trattato citato, p. 101.

(2) HELMHOLTZ, trattato citato, vol. II, § 36.

(3) E. WIECHERT, *Ueber die Massenvertheilung im Innern der Erde*. « Nachr. d. K. Gesell. der Wissensch. zu Göttingen », 1897, p. 221.

(4) DARWIN, op. cit.

terrestri anche fuori di esso fa deviare i valori misurati g da quelli teorici troppo fortemente perchè, anche con le riduzioni al mare o con le riduzioni isostatiche della gravità osservata, sia possibile determinare con sufficiente sicurezza il coefficiente di secondo ordine β_1 . Per questa ragione lo Helmert limitò la determinazione sperimentale ai valori di g_e e di β e nella prima ricerca del 1884 si attenne allo sferoide normale indicato con 1° nel § 2, sferoide che alle latitudini medie è sopraelevato sull'ellissoide, mentre nel 1901, adottando il risultato teorico concorde delle ricerche del Wichert e del Darwin (ipotesi di Roche); che conducono a uno sferoide leggermente depresso, assunse $\beta_1 = -0.000007$. In realtà la depressione, per $\varphi = 45^\circ$, di m. 3.0 media dei due risultati del Wichert e del Darwin altera il β_1 ellissoidico di $\frac{3}{4} f = 0.0000014$ e conduce al valore $\beta_1 = -0.0000073$; l'arrotondamento a -0.000007 riduce già la depressione da m. 3.0 a m. 2.4.

Gli altri due coefficienti, determinati sperimentalmente da Helmert nel 1901, e che costituiscono con il precedente la *formola pratica della gravità normale* usata tuttora, sono, come è noto, $\beta = 0.005302$ e $g_e = 978.046$ secondo il valore assoluto della gravità determinato a Vienna e $g_e = 978.030$ secondo quello più recente e più sicuro di Potsdam.

Con i valori a ed α dell'ellissoide internazionale e assumendo $g_e = 978.030$ si ha:

$$\beta = 0.0052885 \quad \beta_1 = -0.0000059.$$

Il valore di β_1 concorda con quello calcolato dal prof. Somigliana nella seconda delle Note citate⁽¹⁾; il primo ne differisce alquanto perchè il Somigliana, pur fondandosi sull'ipotesi ellissoidica, accetta i valori della gravità al polo e all'equatore della formola di Helmert, dalla quale risulta per lo schiacciamento del geoide, supposto ellissoidico, il valore $\frac{1}{298.2}$ anzichè quello $\frac{1}{297}$ dell'ellissoide internazionale.

Il massimo divario tra i valori della gravità normale ottenuti con i precedenti dati relativi all'ellissoide internazionale e quelli della formola di Helmert del 1901 si ha per $\varphi = 90^\circ$ ed è 0.013 cm. s.⁻²; esso potrebbe essere ridotto a ± 0.007 assumendo eguale nelle due formole, anzichè il valore della gravità per $\varphi = 0^\circ$, quello 980.616 che si ha alla latitudine di 45° .

5. Le diverse definizioni che si possono dare della gravità normale, o il diverso criterio che si segua nella determinazione dei coefficienti β e β_1 portano dunque a divari ben piccoli e, come si disse, trascurabili di fronte alle anomalie della gravità. Più sensibile sembra essere l'effetto di un termine aggiuntivo funzione della longitudine e corrispondente all'adozione di un ellissoide a tre assi per superficie di riferimento, ma su questo termine vi è per ora troppa incertezza perchè se ne possa tener conto. Poichè una

(1) V. sopra.

definizione precisa di gravità normale non è ancora stata data, nè potrà essere data dall'esperienza, conviene fissarla una volta per tutte. Ora il vantaggio di una maggiore uniformità fra risultati conseguiti dalle deviazioni della verticale e dalle anomalie della gravità e soprattutto, come dice il prof. Somigliana, il vantaggio concettuale di dare per il vettore «gravità normale» uno stesso significato sia quando se ne considera la direzione, sia quando se ne considera l'intensità, conduce a mio parere a preferire, per gli scopi geodetici, la definizione della gravità normale fondata sulla forma ellissoidica della superficie di riferimento e a determinarne i coefficienti β e β_1 in base agli elementi dell'ellissoide internazionale. Occorre però fissare anche il valore g_e della gravità all'equatore o quello di g a una qualunque altra latitudine, il che porta a fissare anche il valore della densità media della Terra.

La difficoltà sperimentale di ottenere una misura della gravità assoluta più precisa di quella fatta a Potsdam e, indipendentemente da ciò, la impossibilità di ricavare un valore definitivo di g_e , mediante i valori della gravità che con le misure relative sono stati dedotti e si deducono dal valore di Potsdam per le varie stazioni, consigliano di fissare una volta per sempre questo valore da parte dell'Unione geodetica con lo stesso criterio e agli stessi fini con cui sono stati fissati i parametri dell'ellissoide internazionale.

Biologia. — *Alcuni esperimenti di amplificazione e rivelazione delle correnti bioelettriche mediante l'impiego delle valvole termoioniche.* Nota II: *Sulla registrazione fotografica delle curve delle correnti amplificate* ⁽¹⁾. Nota di E. BENEDETTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

In una Nota precedente ⁽³⁾ descrissi alcuni esperimenti di amplificazione delle correnti bioelettriche a mezzo di valvole termoioniche, e di rivelazione con mezzi acustici quali il telefono e l'altoparlante. L'apparecchio amplificatore consisteva di 5 stadi, a trasformatori, e la corrente bioelettrica si faceva passare attraverso il primario del trasformatore di entrata. Riuscii, con questo dispositivo e con una opportuna derivazione, a far udire la corrente di azione prodotta dalle contrazioni dei muscoli di una mano, quella dei muscoli linguali e, infine, in una cavia e in gattini neonati e nella rana, le correnti di azione prodotte dalle pulsazioni cardiache, dal movimento dei muscoli respiratori, dalla contrazione di quelli degli arti, di quelli addominali, ecc.

• (1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 16 dicembre 1928.

(3) «Rend. R. Accad. Naz. Lincei», Cl. Sc. Fis., vol. VIII, Serie 6^a, fasc. 5, 1928.

In questi ultimi tempi ho continuato le esperienze, con l'intento particolare di rendere registrabili, sotto forma di curve, le correnti bioelettriche amplificate.

Evitai di adoperare metodi registratori impiegati da altri autori, quello col tubo di Braun usato dal Gasser e da altri, e quello coll'elettrometro capillare adottato dall'Adrian e dai suoi collaboratori, per i vari inconvenienti propri di tali apparecchi, cioè la scarsa luminosità del punto fluorescente del tubo di Braun, che rende particolarmente difficile la registrazione fotografica di movimenti molto rapidi, e la instabilità di regolazione nell'elettrometro capillare, che rende oltremodo laboriose le lunghe operazioni eseguite con esso. Pensai invece di adottare la registrazione luminosa a raggio riflesso da uno specchietto mobile messo in movimento da un complesso elettrodinamico simile a quelli adottati per far muovere la membrana negli altoparlanti radiofonici. Tali apparecchi, oltremodo perfezionati in questi ultimi tempi e resi praticamente aperiodici fino a delle frequenze superiori ai 8000 Hertz, possono venir adoperati con tutta sicurezza per la registrazione di correnti biologiche discontinue la cui frequenza rimane costantemente molto al di sotto della detta cifra.

Richiedendo però questi complessi elettrodinamici una quantità di energia piuttosto rilevante per il loro funzionamento, gli stadi di amplificazione devono essere necessariamente numerosi, possedere un rendimento altissimo, e funzionare senza provocare la minima distorsione della corrente amplificata.

Mercè il vivo interessamento del direttore dell'Istituto prof. Giacomini, che con ogni mezzo favorì queste mie ricerche, potè essere costruito su mio progetto un amplificatore a 8 stadi, corrispondente a tali esigenze. Esso è del tipo a resistenza-capacità, con tre valvole bigriglie in collegamento ad anodo schermato, tre altre valvole Telefunken RE 054 ad alta resistenza interna, speciali per il collegamento a resistenza-capacità, una valvola funzionante da rettificatrice, uno stadio di uscita di potenza a trasformatori bilanciati sul tipo push-pull, preceduto da uno stadio a forte emissione e bassa resistenza interna. Con opportuni commutatori è possibile inserire, partendo da un minimo di due, il numero di valvole più corrispondente all'amplificazione che si vuole ottenere.

Le resistenze anodiche sono fisse, del tipo a vuoto (Loewe) di 50000 Ohm; le resistenze di griglia invece sono regolabili, in tutti gli stadi; disposizione un po' insolita questa, ma che si rivelò molto utile per ottenere il massimo rendimento con le frequenze più varie. I condensatori intervalvolari, di qualità ottima, con dielettrico di mica, posseggono una capacità piuttosto elevata (10000 cm.) indispensabile per le frequenze molto basse (fino a 10 Hertz).

Un commutatore multiplo di entrata permette di applicare la corrente, che deve venire amplificata, tra griglia e filamento della prima valvola, oppure di avviarla attraverso al primario di un trasformatore di entrata, il cui

secondario è collegato nel modo solito colla prima valvola. In derivazione coi morsetti di questo trasformatore, come pure in derivazione coll'ultimo di uscita, stanno due resistenze variabili che permettono di variare la sensibilità di tutto il complesso. La corrente anodica dalla tensione di 140 V è fornita da batterie di accumulatori e così pure la corrente di accensione per i vari triodi e tetrodi.

L'apparecchio registratore si compone di una unità elettrodinamica da altoparlante comprendente il magnete permanente e la bobina percorsa dalla corrente amplificata, che per mezzo di una sottile asticella metallica e un filo di seta tenuto teso da una molla, trasmette le proprie oscillazioni allo specchietto girevole del peso complessivo di 40 mg. Data l'esiguità della massa messa in giuoco, e la potenza relativa della corrente impiegata, la trasmissione e la trasformazione degli impulsi elettrici in movimenti dello specchio si compie senza inerzia apparente. La registrazione fotografica avviene su strisce di carta sensibile applicate sul cilindro di un chimografo mosso da un motorino elettrico. Il raggio luminoso, proveniente da una lampada ad arco e calibrato da un diaframma ad iride, viene, dopo essere stato riflesso dallo specchietto mobile, fatto convergere su di un condensatore cilindrico dietro al quale scorre la carta sensibile.

Per rendersi conto della aperiodicità, della sensibilità e dell'esattezza di questo complesso registratore, furono eseguite numerose esperienze preliminari. Così venne inserito nel circuito amplificatore un microfono molto sensibile e registrati gli oscillogrammi di note musicali emesse da un diapason e da un fischio di Edelmann. Poi si passò alla registrazione delle cinque vocali parlate dinanzi al microfono, e di alcune consonanti. Gli oscillogrammi ottenuti in tutte queste prove risultarono perfetti — specialmente le difficilissime riproduzioni delle lettere articolate risultarono molto evidenti e superiori a quelle ottenute col metodo delle fiamme del König.

Si procedette poi alla registrazione di cardiogrammi nella cavia. Le correnti vennero derivate, come nelle esperienze precedenti, con degli aghi infissi per qualche millimetro sotto la pelle (derivazione cutanea) oppure infissi più profondamente (derivazione muscolare). Il valore medio della corrente amplificata veniva indicato da un galvanometro che, inserito sul circuito di uscita, attraverso un trasformatore, accoglieva una parte della corrente rettificata da un cristallo di galena.

Eseguii numerosi cardiogrammi con derivazioni diverse — così infiggendo gli aghi in corrispondenza della regione pettorale, derivando la corrente dagli arti anteriori, dall'arto anteriore destro e dal posteriore sinistro, dall'arto anteriore sinistro e dal posteriore destro, e, infine, da ambedue gli arti posteriori. Con tutte le derivazioni, ad eccezione di quest'ultima, la corrente cardiaca viene chiaramente registrata. L'aspetto del cardiogramma è simile a quello ottenuto col galvanometro a corda, ma offre più dettagli. Le principali curve segnate dal Einthoven risultano ben visibili, ma esse

appaiono composte da altre oscillazioni più piccole, il cui aspetto e la cui posizione varia a seconda dei punti donde viene derivata la corrente.

Nell'intervallo tra una pulsazione e l'altra viene pure rivelata l'esistenza di una corrente discontinua, con una frequenza di circa 300 periodi al secondo, che non scompare mai del tutto.

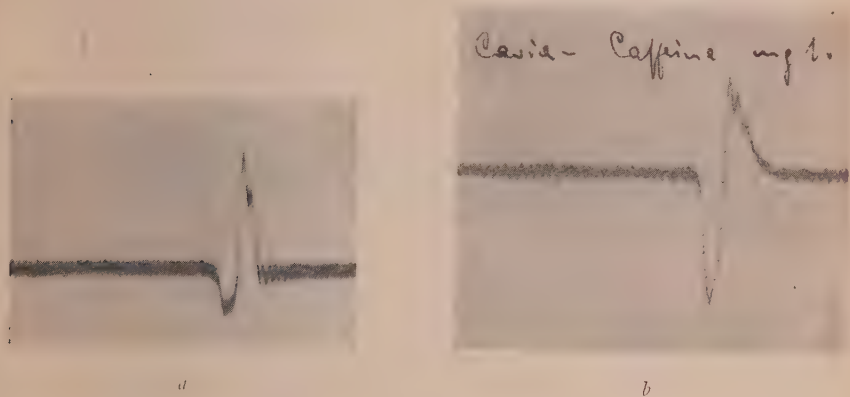


Fig. 1.

Elettrocardiogrammi di una *Cavia* adulta registrati coi dispositivi descritti: *a*) normale, *b*) a 15 minuti dall'iniezione di 0.25 gr. di Caffaina (per errore, nella figura fu scritto mg. 1).

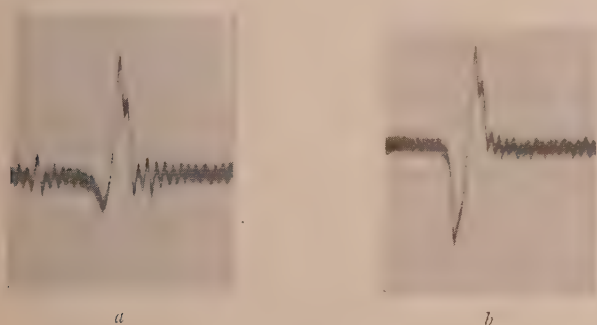


Fig. 2.

Elettrocardiogrammi di altra *Cavia* adulta: *a*) normale, *b*) a 20 minuti dall'iniezione di 1 mg. di adrenalina.

Esperienze ora iniziate, e che saranno oggetto di una prossima comunicazione, nelle quali vennero presi degli oscillogrammi in cavie sottoposte a iniezioni di vari cardiocinetici (caffaina, digitale, stricnina, adrenalina, sparteina, ecc.), dimostrano, oltre a interessantissime modificazioni delle curve

del cardiogramma vere e proprie, delle profonde modificazioni di queste correnti muscolari, come si può osservare nei cardiogrammi qui riportati.

Proiettando il raggio luminoso proveniente dallo specchio su uno schermo bianco, dopo esser stato precedentemente deviato da uno specchio rotante, si rende possibile la dimostrazione immediata della curva dell'elettrocardiogramma e le sue eventuali modificazioni dopo la somministrazione dei predetti cardiocinetici.

Fisiologia. — *Sull'azione dei vapori di alcool etilico e metilico, di etere solforico, di cloroformio e del gas illuminante sui leucociti isolati dall'organismo* ⁽¹⁾. Nota di CLARA FORTI ⁽²⁾, presentata ⁽³⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Cl. Bernard (1857) aveva osservato che quando l'ossido di carbonio aveva impartito al sangue il caratteristico colore rosso ciliegia ed aveva alterato le proprietà chimiche degli eritrociti che presiedono allo scambio dei gas, i corpuscoli bianchi non erano affatto modificati e conservavano immutata la loro attività ameboide. L'azione del cloroformio sui leucociti fu studiata fin dal 1895 da Demoor; aggiungendo alla linfa di rospo acqua cloroformizzata l'A. vide arrestarsi i movimenti ameboidi che ricomparivano se si aggiungeva soluzione fisiologica. Secondo de Haan (1922) l'aggiunta di cloroformio in piccola quantità alla soluzione fisiologica di cloruro di sodio al 0.9 % accelera la fagocitosi; in più forti concentrazioni (circa 1 : 2.000) la inibisce, in quantità ancora maggiori paralizza ed uccide i corpuscoli bianchi senza modificare però affatto il loro potere fagocitario. Soltanto Jolly (1923), però, ha studiato l'azione del cloroformio allo stato di vapore; egli afferma che i vapori della sostanza o non alterano affatto i leucociti, sicchè essi conservano immutati i loro movimenti, o producono l'arresto definitivo delle cellule, che riportate all'aria pura non possono tornare a muoversi, e la morte dei corpuscoli stessi. Più studiata è stata l'azione dell'alcool aggiunto alle soluzioni fisiologiche. Hamburger (1912) trovò che l'alcool diluito 1 : 500, 1 : 1000, 1 : 5000 aumenta il potere fagocitario, mentre le soluzioni 1 : 100 già in un'ora provocano notevoli alterazioni dei corpuscoli bianchi. Arkin (1913) avrebbe osservato una diminuzione della fagocitosi in presenza di alcool. Anche de Haan (1922) aggiungendo piccole quantità di alcool etilico alla soluzione fisiologica ha osservato un aumento della fagocitosi del carbone, che diminuisce invece quando la sostanza è aggiunta in proporzioni maggiori e si arresta completamente alla concentrazione del 10 %; se però dopo circa mezz'ora si allontana questo liquido con la centrifuga e si portano i corpuscoli in siero diluito 1 : 4 con soluzione fisiologica di NaCl dopo 15 minuti la fagocitosi non è inferiore a quella che si ha coi leucociti non trattati con alcool. Di Macco (1922) ha dimostrato che la fagocitosi *in vitro* è ostacolata notevolmente dall'alcool etilico anche in concentrazioni minime; l'alcool esplicherebbe la sua azione nociva tanto sulle opsonine del siero, quanto sull'attività fagocitaria dei leucociti; aggiunto nella proporzione di 1 : 1000 produrrebbe una costante diminuzione della fagocitosi. Anche

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.

(2) In alcune delle osservazioni riferite fui coadiuvata dai signori Enrico Baffa e Luigi Praloran che presentarono i dati raccolti agli esami di laurea.

(3) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

i leucociti trattati con soluzioni di alcool etilico e poi lavati mostrano un potere fagocitario assai inferiore a quello dei corpuscoli bianchi non trattati; l'azione nociva si manifesta già per soluzioni alcooliche di 1:7000; con soluzioni di 1:15.000 la fagocitosi non diminuisce anzi forse aumenta leggermente.

Ricerche eseguite in questo Istituto di Fisiologia Umana sull'azione di alcuni alcool aggiunti alla soluzione fisiologica in cui si facevano sopravvivere i leucociti hanno confermato l'azione nociva esplicata da queste sostanze a forti concentrazioni (soluzioni $\frac{N}{5}$ e $\frac{N}{2}$). Le soluzioni molto diluite ($\frac{N}{200}$) produssero invece quasi sempre lieve aumento dell'attività ameboide modificando di poco la durata della sopravvivenza. Anche le più forti concentrazioni sperimentate (soluzione $\frac{N}{2}$) prima di paralizzare i leucociti ne aumentano l'attività ameboide.

Nessuna osservazione all'infuori di quelle di Cl. Bernard e di Jolly ho trovato nella letteratura sull'azione dei vapori di sostanze volatili, del gas illuminante o dell'ossido di carbonio sui corpuscoli bianchi. Engelmann (1879) ricercò l'azione dei vapori di etere, alcool, nitrito di amile, ammoniac e dell'acido carbonico e Nagai (1907) quelle dei vapori di alcool, etere e dell'ossido di carbonio sui movimenti delle ciglia vibratili.

I. — Azione dei vapori di alcool etilico e metilico, di etere solforico e di cloroformio.

Metodo. — Si ponevano in un vetrino da orologio cm.3 0.10 di una sospensione di leucociti di *bufo vulgaris* commisti a pochi corpuscoli rossi, in siero dello stesso animale. Si portava poi il vetrino da orologio in un cristallizzatore ben chiuso della capacità di 50 cm.3 in cui si versava una piccola e ben determinata quantità della sostanza in esame; si teneva conto mediante un cronometro del tempo durante il quale si lasciavano agire i vapori. Nelle ricerche che riferisco si adoperò sangue prelevato sterilmente e raccolto da pochi minuti o conservato in ghiacciaia per non più di 24 ore. I risultati variano se le sostanze tossiche si fanno agire su cellule alterate per essere state tenute a lungo fuori dell'organismo. Prima di sottoporre i leucociti all'azione dei vapori o dei gas tossici, ci si assicurava con l'osservazione preliminare di un preparato di controllo che quasi tutti i corpuscoli bianchi delle sospensioni in esame avessero movimenti ameboidi bene attivi.

Riassumo nella seguente tabella i risultati ottenuti:

TABELLA I.

Percentuale dei leucociti con movimenti ameboidi nel controllo	Sostanza posta nel cristallizzatore	Tempo per cui agirono i vapori	Percentuale dei leucociti con movimenti ameboidi nei preparati trattati	Tempo per cui furono esposti all'aria	Percentuale dei leucociti con movimenti ameboidi nei preparati trattati e poi esposti all'aria
98 % movimenti vivaci	0.10 cm. ³ alcool etilico	2'	57 % movimenti vivaci 65 % » lenti	30'	85 % movimenti lenti
80 % »	0.10 » » »	8'	86 % » » »	30'	76 % » » »
100 % »	0.50 » » »	5'	88 % » » »	45'	100 % » » vivaci
97 % »	0.50 » » »	10'	58 % » » »	35'	54 % » » lenti
96 % »	0.50 » » »	15'	tutti immobili	60'	83 % » » vivaci
98 % »	0.10 » » metilico	1'	97 % movimenti vivaci	—	—
100 % »	0.10 » » »	2'	98 % » » lenti	—	—
95 % »	0.10 » » »	8'	tutti immobili	35'	90 % movimenti vivaci
100 % »	0.10 » etere solforico	2'	100 % mov. vivaci	—	—
81 % »	0.10 » » »	5'	90 % » vivacissimi	—	—
90 % »	0.10 » » »	10'	47 % » lentissimi	30%	68 % movimenti vivaci
88 % »	0.50 » » »	15'	tutti immobili	30'	tutti immobili
88 % »	0.50 » » »	15'	» » »	60'	» » »
96 % »	0.05 » cloroformio	3'	27 % movimenti lenti	60'	28 % movimenti vivaci
100 % »	0.10 » » »	2'	53 % » » vivaci 47 % » » lenti	60'	87 % » » »
97 % »	0.10 » » »	2' 30''	54 % » » »	20'	21.8 % » » » 15 % » » lenti
98 % »	0.20 » » »	5'	51 % » » »	55'	tutti immobili
95 % »	0.50 » » »	10'	tutti immobili	30'	» » »
95 % »	0.50 » » »	10'	» » »	60'	» » »

Si può dunque concludere che i vapori svolti da quantità minime (da 0.10 a 0.50 cm.³) di alcool etilico e metilico, di etere solforico e di cloroformio sono sufficienti per paralizzare in pochi minuti l'attività ameboide dei leucociti. Col cloroformio e con l'alcool metilico si ottennero diminuzione ed arresto completo dell'attività ameboide con quantità minori di sostanza ed in più breve tempo che con l'etere solforico e con l'alcool etilico; è sufficiente infatti sottoporre le cellule per 2' all'azione dei vapori svolti da $\frac{1}{10}$ di cm.³ di cloroformio e di alcool metilico per ottenere una dimi-

nuzione dell'attività dei movimenti ameboidi; i vapori svolti da $\frac{1}{10}$ di cm.³ di etere o di alcool etilico fatti agire per 2' sui leucociti non esplicano invece su di essi un'azione evidente. Sottoponendo i preparati per brevissimo tempo (3 minuti) all'azione dei vapori di etere solforico, si notò un aumento della vivacità dei movimenti, ed un aumento lieve anche del numero delle forme mobili, ciò che dimostra l'azione eccitante l'attività ameboide esplicata in primo tempo dall'etere solforico.

In alcune delle osservazioni eseguite con gli alcoli etilico e metilico, ci è stato possibile anche dimostrare il ritorno dell'attività in cellule immobilizzate dai vapori allontanandole dall'azione della sostanza tossica ed esponendo la goccia di liquido in cui erano sospese all'aria atmosferica, lo stesso risultato non ci fu possibile ottenere esponendo all'aria per breve tempo (30' e 60') i corpuscoli bianchi immobilizzati dall'etere e dal cloroformio. Le cellule sottoposte all'azione dei vapori di queste sostanze nei preparati in cui apparivano immobili erano inoltre morfologicamente alterate, più o meno granulose e con nucleo evidente, quest'ultimo era evidentissimo specialmente nei leucociti trattati coi vapori di cloroformio.

II. — Azione del gas illuminante.

Metodo. — Per studiare l'azione dei gas sui leucociti ho costruito il piccolo apparecchio che riporto schematicamente nella fig. 1; è formato da un cilindro *A* della capacità di 125 cm.³ chiuso ermeticamente con un tappo di gomma *B* attraverso il quale si fanno passare due tubi *C* e *D* piegati in alto ad angolo retto; all'estremità libera dei tubi si applicano due prolungamenti di gomma muniti ai morsette a vite. Il tubo *C* giunge fino al fondo del cilindro, l'altro si interrompe $\frac{1}{2}$ cm. al disotto del tappo. Nella parte superiore del cilindro si sospende un piccolo cristallizzatore *E* tenuto *in situ* da due fili di rame innestati al tappo.

Al momento dell'esperimento si pone la sospensione di corpuscoli nel cristallizzatore, e dopo aver riempito il cilindro con acqua fino al livello inferiore del cristallizzatore, si pone il tubo *D* in rapporto con la sorgente del gas in esame (nel nostro caso con un rubinetto di gas illuminante), e mediante una pompa aspirante messa in comunicazione col tubo *C* si fa uscire dall'apparecchio tutta l'acqua che vi era stata posta. Chiusi ermeticamente i tubi di gomma mediante le morsette a vite si circondano tutte le superfici

di chiusura con uno strato di paraffina e si tiene immerso completamente l'apparecchio (per mezzo di un cerchio di piombo applicato al fondo del cilindro *A*) in un recipiente pieno d'acqua per tutta la durata dell'esperimento, in tal modo ci si assicura che non avvengano scambi fra il gas contenuto nel cilindro e l'aria esterna.

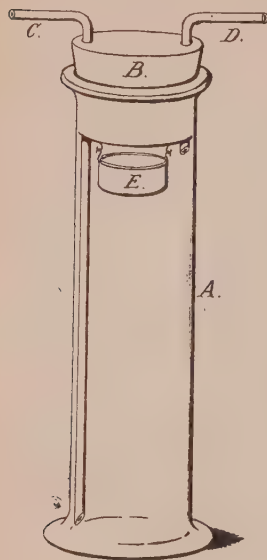


Fig. 1.

Spiegazione nel testo — $\frac{1}{4}$ g. n.

Osservate le alterazioni prodotte dal gas sui leucociti si trasportava la sospensione in esame dal cristallizzatore in una provetta da centrifuga chiusa con un tappo di cotone non idrofilo, l'aria contenuta nella provetta poteva così diffondere attraverso il liquido ed agire sui corpuscoli.

Si studiò l'azione del gas illuminante sui leucociti del sangue del *bufo vulgaris* diluito con soluzione fisiologica (0.5 cm.³ di sangue + 5 cm.³ di NaCl al 0.7 %); 3 cm.³ della diluizione venivano posti nel cristallizzatore *E* occupandovi uno spessore di circa 6 mm.; il gas che si faceva penetrare nel cilindro era gas povero che, com'è noto, contiene dal 40 al 50 % di CO e minime quantità di idrogeno, metano, etilene ed acetilene.

Dai 15 ai 45 minuti dopo l'inizio dell'esperimento si notò all'esame microscopico un aumento della vivacità dei movimenti dei leucociti; la sospensione dei corpuscoli aveva già assunto il caratteristico colore rosso-ciliegia. L'aumento dell'attività ameboide spariva quando l'azione del gas si protraveva al di là dei 45'; dopo alcune ore i movimenti divenivano assai lenti, ma soltanto dopo 8-9 ore si arrestavano del tutto. Se appena avvenuto l'arresto dell'attività si trasportava la sospensione

dei corpuscoli in una provetta per sottrarre le cellule all'azione del gas ed esporle all'aria atmosferica, si poteva osservare un ritorno dell'attività ameboide dei leucociti. Se si prolungava invece ulteriormente l'azione del gas i corpuscoli bianchi (dopo circa 10 ore) perdevano per sempre la loro mobilità.

Poichè il gas da noi adoperato conteneva il 40-50 % di CO, piccole quantità di etilene, e minime di acetilene, idrogeno e metano, i risultati ottenuti si debbono attribuire soprattutto all'azione dell'ossido di carbonio, sebbene non si possa escludere che anche la mancanza di O₂ a cui i corpuscoli venivano sottoposti per l'allontanamento dell'aria atmosferica possa avere avuto parte nella determinazione dei fenomeni di eccitamento, di paralisi e di necrosi delle cellule.

LETTERATURA.

- ARKIN-AARON, « Journ. of infect. Diseases », vol. XXIII, 1913, p. 408.
 BAGLIONI, *Azione degli alcoolii, della glicerina e della nicotina sui leucociti sopravvivenenti*. « Boll. della Soc. Ital. di Biologia Sperimentale », vol. III, fasc. 8, 1927.
 CL. BERNARD, *Leçons sur les effets des substances toxiques et médicamenteuses*, Paris, 1857.

DE HAAN, *Die Phagocytose als Ausdruck des Lebens der Leukocyten*. «Pflüger's Archiv», 1922.

DE MOORE, cit. in JOLLY, *Traité Technique d'Hématologie*, Paris, 1923.

DI MACCO, *Modificazioni del potere fagocitario, del potere opsonico e della fagocitosi spontanea nell'alcoolismo acuto e cronico*. «Ann. di Clin. Med.», a. XII, fasc. I, a. 1922.

ENGLMANN, *Physiol. d. Protoplasma u. Flimmerbewegung*. «Hermann's Handbuch d. Physiol.», Leipzig, 1879.

FORTI C., *L'azione eccitante degli alcool e degli alcaloidi sull'attività ameboidale*. «Boll. della Soc. Ital. di Biologia Sperimentale» vol. III, fasc. 8, 1927.

HAMBURGER, *Physicalisch-chemische Untersuchungen über Phagocyten*. Wiesbaden, A. 1912.

JOLLY, *Traité Technique d'Hématologie*. Paris, 1923.

NAGAI, *Der Einfluss verschiedener Narcotica auf die Schwimmgeschwindigkeit von Paramecium*. «Zeitschr. f. Allgem. Physiol.», Vol. VI, p. 211, a. 1907.

Fisiologia. — *Ricerche sugli effetti circolatorii degli aumenti della pressione atriale*⁽¹⁾. Nota di G. GALATÀ, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Nel corso di alcune mie ricerche sulle reazioni atriali e ventricolari alle variazioni di pressione interna ed esterna⁽³⁾, ho avuto modo di osservare dei fatti che mi sono sembrati interessanti per la fisiopatologia cardiovasale.

In questo lavoro ho maggiormente sviluppata la parte riguardante gli effetti degli aumenti di pressione atriale per meglio accertarli e per stabilirne l'eventuale importanza in rapporto alle cardiopatie.

L'indagine è stata svolta sul cuore isolato del Bufo e della Emys per mezzo del mio tono-pletismografo cardiaco⁽⁴⁾.

Gli aumenti di pressione atriale e quindi del volume di afflusso sono stati ottenuti elevando progressivamente il livello del recipiente di afflusso di detto apparecchio a cominciare dall'altezza di 4-6 cm. d'acqua, *optimum* di pressione atriale per il Bufo e per la Emys, e portandola a 20-30 cm. d'acqua, con aumenti uniformi e progressivi di 2 cm. d'acqua per volta.

Il livello del liquido nel recipiente di afflusso, e quindi il regime volta per volta scelto della pressione atriale, sono stati conservati costanti durante ogni fase dell'esperimento, nonostante l'afflusso cardiaco, mediante il solito dispositivo di scarico detto del « trop plein ».

La pressione ventricolare è stata per tutti gli esami la stessa, e cioè di 30 cm. di acqua pel cuore del Bufo e di 50 cm. d'acqua per quello della Emys.

La soluzione di perfusione adoperata è stata quella di Ringer-Locke con l'aggiunta di un grammo di urea per litro (Baglioni).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(3) « Archivio di fisiologia », vol. XXIV, fasc. 4, 1926.

(4) « Archivio di Fisiologia », vol. XXIV, fasc. 3, 1926.

Gli esperimenti si sono svolti nel periodo più favorevole, in questi animali, per detto genere di ricerche, e cioè nell'aprile-giugno.

I dati raccolti per ogni esame sono stati: la simultanea misura e registrazione delle oscillazioni atriali, delle oscillazioni ventricolari e delle oscillazioni volumetriche, nonchè della frequenza e del volume-sístole, e quindi del volume-minuto di scarico ventricolare.

Perchè i risultati siano resi con maggiore rapidità ed evidenza, riporto qui alcuni tracciati-tipo ottenuti, aggiungendo delle note esplicative in calce.

GRUPPO A.

(*Bufo vulgaris*).

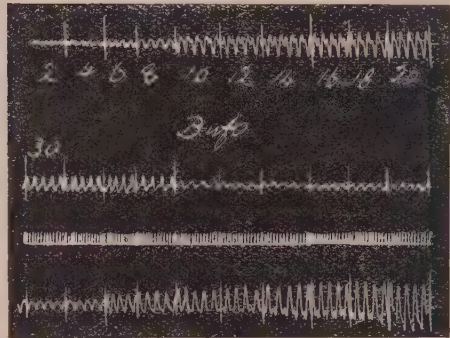
I.

Oscillazioni atriali

Oscillazioni ventricolari
tempo in 1"

Oscillazioni volumetriche

Volumi-minuto



cc. 6¹ 7 7⁶ 5⁶ 3⁵ 3 2⁵ 3¹ 3¹ 3¹

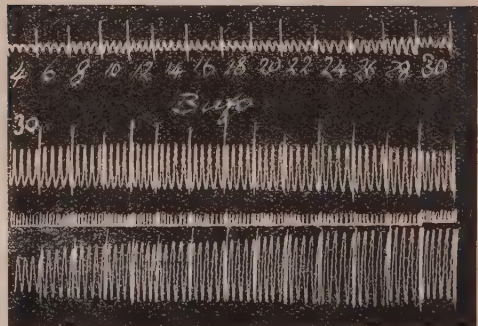
II.

Oscillazioni atriali

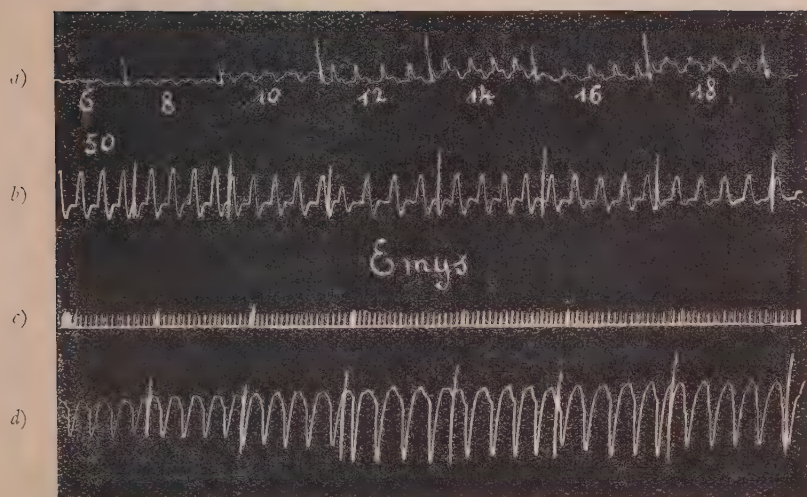
Oscillazioni ventricolari
tempo in 1"

Oscillazioni volumetriche

Volumi-minuto

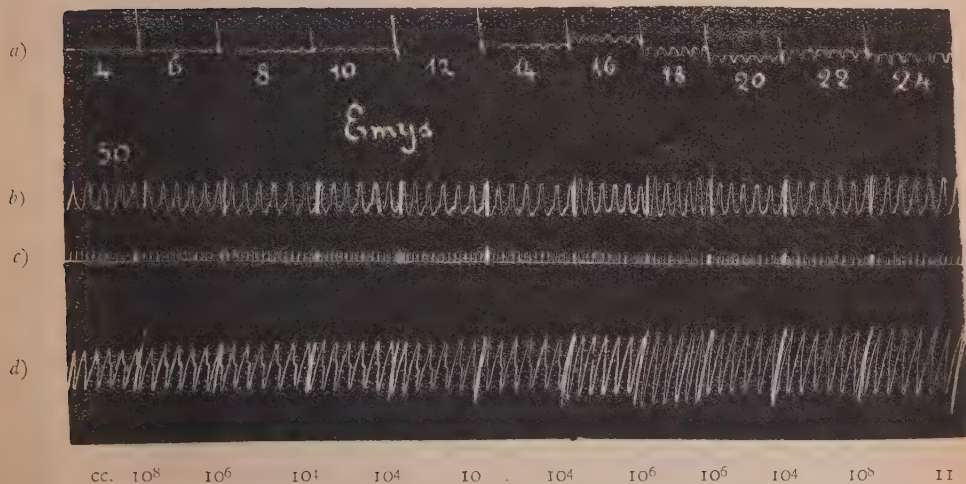


GRUPPO B.
(*Emys europaea*).
III.



a) Oscillazioni atriali - b) Oscillazioni ventricolari tempo in 1''
c) Oscillazioni volumetriche - d) Volumi-minuto.

IV.



a) Oscillazioni atriali - b) Oscillazioni ventricolari tempo in 1'' - c) Oscillazioni volumetriche
d) Volumi-minuto.

N.B. per tutti i tracciati:

Le cifre segnate sotto il tracciato atriale indicano gli aumenti progressivi in cm. di acqua apportati alla pressione atriale.

La cifra a sinistra del tracciato ventricolare indica la pressione ventricolare in cm. d'acqua uguale per tutti gli esami.

Le cifre segnate in basso, fuori del tracciato indicano i corrispondenti volumi-minuto.

Il tracciato I dimostra:

1° un progressivo e parallelo aumento dell'ampiezza delle oscillazioni tanto atriali che volumetriche, con più rapido aumento al raggiungersi dei 10 cm. d'acqua della pressione atriale.

2° un piccolo aumento iniziale d'ampiezza delle oscillazioni ventricolari con rapida diminuzione al raggiungersi dei 10 cm. d'acqua di pressione atriale e successiva stabilità della diminuzione avvenuta.

3° la frequenza pressochè immutata;

4° il volume-minuto di scarico in diminuzione parallela all'ampiezza delle oscillazioni ventricolari.

Il tracciato II, raccolto nelle stesse condizioni dell'esperimento precedente, dimostra:

1° innanzi tutto, un'energia sistolica notevolmente maggiore;

2° un progressivo ma piccolo aumento d'ampiezza delle oscillazioni atriali e volumetriche, con tendenza all'uniformità;

3° una spiccata tendenza all'uniformità d'ampiezza delle oscillazioni ventricolari;

4° la frequenza, pressochè uniforme;

5° i volumi-minuti di scarico, notevolmente maggiori che nel tracciato precedente ma pressochè uniformi anche quando la pressione atriale raggiunge 24 cm. H_2O .

Il tracciato III, raccolto nelle stesse condizioni sperimentali precedenti, dimostra:

1° un aumento progressivo piuttosto rapido, e poi lo stabilizzarsi, dell'ampiezza delle oscillazioni sia atriali che volumetriche;

2° una diminuzione piuttosto rapida d'ampiezza delle oscillazioni ventricolari al raggiungersi dei 10 cm. d'acqua di pressione atriale, seguita da una diminuzione successiva più lenta;

3° la frequenza, pressochè immutata;

4° i volumi-minuto di scarico, in diminuzione parallela con la diminuzione d'ampiezza delle oscillazioni ventricolari.

Il tracciato IV, raccolto nelle stesse condizioni sperimentali precedenti, dimostra:

1° un aumento progressivo e lento, e poi lo stabilizzarsi, dell'ampiezza delle oscillazioni tanto atriali che volumetriche;

2° la quasi uniformità d'ampiezza delle oscillazioni ventricolari;

3° la frequenza pressochè immutata;

4° i volumi-minuto di scarico, in correlazione con l'uniformità d'ampiezza delle oscillazioni ventricolari, pressochè uniformi.

I quattro tracciati devono essere considerati come esempi di risultati estremi che si raggiungono nel cuore del Bufo e in quello della Emys, soprattutto in rapporto al tracciato ventricolare e ai volumi-minuto.

Bisogna aggiungere, però, che la rispettiva frequenza dei due tipi estremi riportati per ognuno dei due gruppi di ricerche è tutt'altro che la stessa, essendo molto più frequente (circa l'80 °, dei casi) raccogliere il tracciato messo in testa ai due gruppi (trac-

ciati I e III) o quelli che ad esso si avvicinano, e molto meno frequente (circa il 20 %, dei casi) raccogliere il secondo tracciato di ogni gruppo (tracciato II e IV) o quelli che ad esso si avvicinano.

Fra i due esponenti estremi riportati si raccoglie, insomma, tutta una serie graduale di tracciati di passaggio che sono, a loro volta, esponenti di risultati intermedi.

Come possiamo interpretare i fatti raccolti?

Per essere guidati ad una loro giusta interpretazione bisogna, innanzi tutto, tener conto di come si modifichi il funzionamento del cuore nella camera pletismografica, nelle successive fasi dell'esperimento.

Si osserverà allora, come col progredire della pressione atriale e a partire dagli 8-10 cm. d'acqua gli atri si vadano contraendo sempre più incompletamente fino a restare immobili, sfiancati dall'eccesso di pressione, allorché si raggiungono i 18-20 cm., mentre che, in pari tempo, le sistoli-diastoli ventricolari vanno diventando, entro ampi limiti, sempre maggiori, per l'aumento progressivo del volume di afflusso.

Questa duplice constatazione ci dà la chiave di tutti i fatti che si notano nella maggior parte dei casi, e cioè ci permette di concludere che:

1° il progressivo aumento d'ampiezza delle oscillazioni atriali non è dovuto, come si potrebbe e sarebbe giustificato pensare, alla maggiore energia delle sistoli-diastoli atriali, provocate dal progressivo aumento del volume di afflusso, ma è dovuto alla trasmissione a monte della maggiore energia delle sistoli-diastoli ventricolari;

2° il progressivo aumento d'ampiezza delle oscillazioni volumetriche, che con quello atriale parallelamente procede, non è, quindi, esponente della maggiore energia sistolica-diastolica degli atri, ma esponente della maggiore energia sistolica-diastolica ventricolare;

3° la progressiva diminuzione che si nota nell'ampiezza delle oscillazioni ventricolari e la parallela diminuzione del volume-minuto di scarico, che abitualmente si osserva nonostante che l'energia sistolico-diastolica ventricolare vada progressivamente aumentando, devono essere spiegate, appunto, col riflusso a monte, dovuto alla dilatazione dell'orificio atrioventricolare provocata dal progressivo aumento di pressione atriale.

Questa è l'interpretazione dei fatti che si sono osservati nella grande maggioranza dei casi e che furono, del resto, già in parte messi in rilievo nel lavoro innanzi citato.

Come si può notare, però, nei tracciati II e IV, in una percentuale di casi notevolmente minore, e cioè nel 20 % circa, il progressivo aumento d'ampiezza dei due tracciati atriale e volumetrico è poco accentuato e piuttosto lento, e, in concordanza con questo fatto, *l'ampiezza delle oscillazioni ventricolari e i volumi-minuto di scarico si conservano uniformi o quasi per tutta la durata dell'esperimento*; e, questo, nonostante il progressivo aumento della pressione atriale.

Come possiamo spiegare la diversità di questo risultato?

È precisamente quello che abbiamo detto fin qui che ce lo dice.

La spiegazione data dei fenomeni che nella maggior parte dei casi si osservano, poggia, come abbiamo visto, sul fatto fondamentale del progressivo stabilirsi della dilatazione orificiale atrio-ventricolare, dovuta al progressivo aumento della pressione atriale.

Lo stabilirsi di questa progressiva dilatazione (che procede di pari passo, è importante notarlo, con quella delle pareti atriali) spiega, da una parte, il progressivo aumento del volume-minuto di afflusso e il conseguente progressivo aumento di energia delle diastoli-sistoli ventricolari, e ci dà ragione, dall'altra, del progressivo aumento del riflusso a monte, durante le sistoli ventricolari.

Nei pochi casi, invece, in cui l'anello orificiale resiste alle cause che tendono a dilatarlo (per la maggiore energia tonica del suo tessuto muscolare e probabilmente anche per la maggior resistenza del suo tessuto elastico) i fenomeni suindicati non si verificano; e quindi:

L'aumento d'ampiezza delle oscillazioni atriali sarà poco o pochissimo apprezzabile perchè vengono a mancare, o quasi, da una parte il maggior volume di afflusso e quindi la ragione delle più energiche diastoli-sistoli ventricolari e, dall'altra, il riflusso atriale; l'ampiezza delle oscillazioni ventricolari ed i volumi-minuto di scarico saranno pressochè uniformi per le stesse ragioni, o aumenteranno solo lievemente in rapporto ad un aumento assai limitato del volume di afflusso;

L'aumento di ampiezza delle oscillazioni volumetriche sarà di tanto ridotto, in confronto dell'aumento che abitualmente si verifica nelle stesse condizioni, di quanto, appunto minori sono l'afflusso e, conseguentemente, l'energia diastolico-sistolica ventricolare.

Questi fatti sono d'innegabile interesse fisiopatologico.

Per avere una prova dimostrativa del significato ch'essi assumono in rapporto alle condizioni morbose del circolo, dobbiamo portare per un momento la nostra attenzione sul risultato più importante ottenuto dal punto di vista della funzione cardiovasale, e cioè sul volume-minuto di scarico e su quella parte del tracciato che può considerarsi il suo esponente grafico, il tracciato ventricolare.

Com'è noto, è, infatti, il volume-minuto di scarico ventricolare quello che soprattutto importa della funzione circolatoria e al quale, in definitiva, tendono i vari momenti di detta funzione, perchè è esso, appunto, che si traduce in volume-minuto di sangue apportato ai tessuti e, quindi, a parità di ogni altra condizione, in capacità-minuto di scambio fra i tessuti e il sangue.

È tale, anzi, l'importanza di questo risultato funzionale che, per mantenerlo il più possibile uniforme, e cioè senza difetto e senza eccessi che

sarebbero ugualmente dannosi, il cuore è dotato, come in altro lavoro cercherò di dimostrare, di un automatismo regolatore e compensatore, di sensibilità e immediatezza veramente notevoli.

Che cosa, ora, osserviamo nelle ricerche fatte, circa i volumi e i tracciati ventricolari?

Nella maggior parte dei casi, a partire da un determinato regime di pressione atriale essi progressivamente diminuiscono, parallelamente agli aumenti progressivi della pressione atriale, e poi tendono a stabilizzarsi sulla diminuzione raggiunta; e, questo, mentre si verifica il fatto, apparentemente paradossale, che l'energia sistolico-diastolica ventricolare, parallelamente, entro ampi limiti, aumenta.

In altri termini, mentre il lavoro del cuore progressivamente aumenta, l'effetto utile a valle progressivamente diminuisce.

In un numero molto più ristretto di casi, invece, i volumi-minuto di scarico ventricolare e l'ampiezza delle oscillazioni ventricolari si conservano pressochè uniformi nonostante il progressivo aumento della pressione atriale.

Trasportando, con le dovute cautele, questi risultati nel campo morboso, dobbiamo dedurne l'importanza che può assumere nel decorso delle cardiopatie, e specie in quelle con prevalente ripercussione sul cuore destro, il grado *individuale*, costituzionale, di resistenza alla dilatazione da parte dell'anello o degli anelli orificiali A-V, fenomeno che fa capo, a sua volta, all'*importanza che ha l'individualità dell'energia tonica del miocardio* nella patogenesi dello scompenso.

Questi risultati, cioè, ci dimostrano che in una minoranza di casi il cuore è capace di mantenere una normale sufficienza circolatoria nonostante il presentarsi di condizioni atte a turbarla più o meno gravemente e, questo, per il solo fatto di un maggior *tono* muscolare e di una conseguente maggiore resistenza alle cause che tendono a dilatare il miocardio.

E ci dimostrano, inoltre, la facilità dello stabilirsi d'uno stato d'insufficienza circolatoria (diminuito volume-minuto d'afflusso e quindi diminuita capacità-minuto di scambio fra sangue e tessuti) per il solo fatto dell'insufficiente *tono orificiale A-V e indipendentemente dall'energia contrattile del miocardio*, la quale non solo può non essere diminuita, ma essere anche, contemporaneamente, maggiore del normale.

Come corollario di questo fatto si deduce anche:

che non sempre il piccolo volume-sistole, rivelatoci dal polso piccolo e depressibile dal basso indice oscillometrico e dall'ipotensione arteriosa, è l'esponente di una debilitazione contrattile del miocardio;

e che il contrasto (non infrequente nei cardiopatici scompensati, anche, beninteso, non stenotici) fra impulsi sistolici energici, rilevabili al comune esame obbiettivo e all'esame radioscopico, e il polso piccolo e depressibile, può esser dovuto allo stabilirsi di detta condizione morbosa.

Fisiologia. — *Massa sanguigna, globuli rossi ed emoglobina, in individui acclimatati, in montagna ed al piano* ⁽¹⁾. Nota di R. MARGARIA ed E. SAPEGNO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. A. HERLITZKA.

Paul Bert ⁽³⁾ fu il primo a riscontrare che la capacità di assumere ossigeno è maggiore nel sangue di animali che vivono ordinariamente a basse pressioni barometriche, in confronto di animali mantenuti alla pressione ordinaria. Questo fatto il Bert interpretò come una forma di compensazione del sangue alla diminuita saturazione dell'ossiemoglobina che in tali condizioni si osserva, per la bassa pressione parziale dell'ossigeno.

Più tardi Viault ⁽⁴⁾, osservò nell'uomo un aumento nel numero dei corpuscoli rossi del sangue per un soggiorno di qualche settimana ad un'altezza di 4,400 metri, e Müntz ⁽⁵⁾ riscontrò che il sangue di animali viventi ad un'altezza di circa 3000 metri sui Pirenei, contiene una percentuale di ferro superiore a quelli che vivono al piano.

Questi primi reperti, che stanno ad esprimere un aumento nella concentrazione dei corpuscoli rossi e dell'emoglobina nel sangue, a basse pressioni barometriche, sono poi stati confermati da numerosissime osservazioni che fino ad oggi si sono susseguite.

L'ipotesi di P. Bert, che questo fenomeno fosse dovuto alla diminuita pressione di ossigeno, venne confermata da Jolyet e Sellier ⁽⁶⁾, che riscontrarono policitemia in animali tenuti a pressione barometrica normale, in aria nella quale si era previamente ridotta la percentuale di ossigeno, mentre non riscontrarono alcuna modificazione nel numero dei globuli rossi circolanti in animali sottoposti a depressione barometrica, i quali però si trovavano in un'aria a contenuto percentuale di ossigeno proporzionalmente elevato.

Stabiliti questi fatti, venne posta la questione se l'aumento percentuale riscontrato dei corpuscoli rossi e dell'emoglobina, sia dovuto ad una sem-

(1) Dal Laboratorio di Fisiologia di Torino e dall' « Istituto Angelo Mosso » al Col d'Olen.

(2) Nella seduta del 17 giugno 1928.

(3) BERT P., *Sur la richesse en hémoglobine du sang des animaux vivant sur les hauts lieux*, « C. R. Acad. des Sciences », 94, p. 803, 1882.

(4) VIAULT F., *Sur l'augmentation considérable du nombre des globules rouges dans le sang chez les habitants des hauts plateaux de l'Amérique du Sud*. « C. R. Acad. des Sciences », 111, p. 917, 1890.

(5) MÜNTZ A., *De l'enrichissement du sang en hémoglobine, suivant les conditions d'existence*, « C. R. Acad. des Sciences », 112, p. 298, 1891.

(6) JOLYET et SELLIER, *L'hyperglobulie dans l'asphyxie expérimentale*, « C. R. Soc. de Biologie », 47, p. 381, 1895.

plice perdita di liquido dal sangue, o se si tratti di un veto e proprio aumento assoluto della quantità di emoglobina contenuta nell'organismo. Weiss⁽¹⁾, in animali tenuti ad un'altezza di 1,200 metri, riscontrò un aumento nei corpuscoli rossi per mm³, ma non osservò invece un aumento della quantità di emoglobina per kg. di peso del corpo. Viceversa, Jaquet⁽²⁾ trovò, in animali tenuti ad una pressione di 640 mm., non solo un aumento nel contenuto percentuale di emoglobina nel sangue, ma anche un aumento proporzionale della quantità totale di emoglobina, con costanza della massa sanguigna. Poco più tardi Abderhalden⁽³⁾, sperimentando su topi e conigli portati a S. Moritz (1,800 metri), riscontrò un aumento percentuale della emoglobina ed un aumento della quantità di emoglobina per kg. di peso corporeo; però siccome gli animali erano proporzionalmente diminuiti di peso, la quantità totale di emoglobina, per animale, non risultava variata.

La questione rimaneva tutt'altro che risolta da questi risultati contraddittori, ed ottenuti con metodi che implicavano forti cause di errore.

Alcuni anni più tardi Douglas, Haldane, Henderson e Schneider⁽⁴⁾, in ricerche eseguite sull'uomo, nella spedizione del 1911 al Pike's Peak, parallelamente ad un aumento medio del 32 e del 40 % dell'emoglobina e dei corpuscoli rossi, riscontrarono, ad un'altezza di 4,300 metri, un aumento medio della massa sanguigna del 13 %, cosicchè la quantità totale di emoglobina risultava aumentata più ancora di quanto appariva dall'aumento percentuale. Determinazioni analoghe, fatte con vari metodi, tutti basati, però, sul principio della determinazione percentuale nel sangue di ossido di carbonio, di cui il soggetto aveva in precedenza respirato una determinata quantità, vennero eseguite nella spedizione sulle Ande Peruviane da Barcroft e collaboratori⁽⁵⁾; questi non ebbero risultati costanti per quanto riguarda l'effetto della depressione barometrica sulla massa sanguigna, e ciò attribuirono al fatto di non aver lavorato in condizioni di temperatura costante: poterono anzi, durante queste ricerche, intravedere che un aumento della temperatura ambiente importa un aumento nel volume del sangue circolante, e questi

(1) WEISS J., *Ueber den angeblichen Einfluss des Höhenklimas auf die Hämoglobinbildung*, «Zeitschr. f. physiol. Chemie», 22, p. 526, 1897.

(2) JAQUET A., *Höhenklima und Blutbildung*, «Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol.», 45, p. 1, 1901.

(3) ABDERHALDEN E., *Ueber den Einfluss des Höhenklimas auf die Zusammensetzung des Blutes*, «Zeitschr. f. Biologie», 43, p. 125, 1902.

(4) DOUGLAS, HALDANE, HENDERSON and SCHNEIDER, *Physiological Observations made on Pike's Peak Colorado, with special reference to adaptation to low barometric pressures*, «Philosoph. Trans. of the R. Soc. of London», Ser. B, vol. 203, p. 185, 1913.

(5) BARCROFT, BINGER, BOCK, DOGGART, FORBES, HARROP, MEAKINS, REDFIELD, *Observations upon the effect of high altitude on the physiological processes of the human body, carried out in the Peruvian Andes, chiefly at Cerro de Pasco*, «Philos. Trans. of the R. Soc. of London», Ser. B, vol. 211, p. 351, 1923.

risultati vennero più tardi confermati da Barcroft, Meakins, Davies, Duncan Scott e Fetter ⁽¹⁾.

Poche altre ricerche vennero compiute in proposito: Häberlin ⁽²⁾ eseguì alcune determinazioni su un solo soggetto (sè stesso), trovando per altezze di 2000 ca., un aumento della massa sanguigna del 5 %, ed un aumento totale della quantità dell'emoglobina del 12 % e dei corpuscoli rossi del 13-15 %. Più recentemente Smith, Belt, Arnold e Carrier ⁽³⁾, sperimentarono su sei soggetti, seguendoli ogni settimana, durante e per alcuni giorni dopo una permanenza di quattro settimane sulle montagne della Sierra Nevada a 11,000 piedi di altezza (3,350 m.): eseguirono determinazioni di massa sanguigna, sia col metodo dell'ossido di carbonio che con quello delle iniezioni endovenose di soluzioni coloranti (« brilliant vital red »), determinazioni di volume dei globuli rossi (emocrazia), ed emometrie. Riscoprirono un aumento proporzionale dei corpuscoli rossi e dell'emometria, aggirantesi sul 10-15 %, ed un leggerissimo aumento del volume del plasma e del sangue, inferiore però ai limiti di errore dei metodi di determinazione, che gli AA. stabiliscono essere del 5 %.

Noi abbiamo voluto portare un contributo a questa questione, eseguendo determinazioni nello stesso individuo, di massa sanguigna, di corpuscoli rossi e di quantità di emoglobina, al piano ed in montagna, in soggetti acclimatati, e in condizioni d'ambiente presso a poco uguali.

Le ricerche vennero eseguite su dieci soggetti: una prima serie di determinazioni venne eseguita nell'agosto 1927 all'Istituto Mosso al Col d'Olen (m. 2901), una seconda serie venne eseguita, per mantenersi in condizioni di temperatura press'a poco analoghe a quelle della prima serie, nell'autunno-inverno 1927-28 a Torino. Le osservazioni, sia all'Olen, che a Torino, vennero così tutte compiute a una temperatura ambiente di 10°-13° C.

Il conteggio dei globuli rossi si eseguiva nella camera di Bürker, e la determinazione dell'emometria con il metodo di Fleischl-Miescher. La determinazione della massa sanguigna, venne eseguita, sostanzialmente, col metodo di Haldane e Smith ⁽⁴⁾, che consiste nel far respirare al soggetto una determinata quantità di ossido di carbonio, e nel dosarlo poi nel sangue. Ci servimmo come apparecchio di respirazione, del tubo di Zuntz e Pflesch ⁽⁵⁾, che consiste

(1) BARCROFT, MEAKINS, DAVIES, DUNCAN-SCOTT, FETTER, *On the relation of external temperature to blood volume*, «Philos. Trans. of the R. Soc. of London», Ser. B, vol. 211, p. 455, 1923.

(2) HÄBERLIN, *Die Heilwirkung des Nordseeklimas*, «Klin. Wochenschr.», 1923, II, p. 2020.

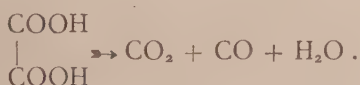
(3) SMITH, BELT, ARNOLD, CARRIER, *Blood volume changes at high altitude*, «Amer. Journ. of Physiol.», 71, p. 395, 1900.

(4) HALDANE J. S. ad SMITH, *The mass and oxygen capacity of the blood in man*. «Journ. of Physiol.», 25, p. 331, 1900.

(5) ZUNTZ und PFLESCH, *Methode zur Bestimmung der Zirkulierenden Blutmenge beim lebenden Tier*, «Bioch. Zeitschr.», 11, p. 47, 1908.

in un largo tubo disposto a triangolo, nel quale si trovano due valvole di gomma che permettono il passaggio dell'aria in un solo senso, ed un dispositivo per l'assorbimento dell'anidride carbonica. Danno in questo tubo, oltre che il boccheruolo di gomma per il quale il soggetto respira, un sacco di gomma pieno di ossigeno, che funziona da polmone, una bombola d'ossigeno, e la buretta contenente l'ossido di carbonio. La quantità di CO, che generalmente si faceva respirare, era di 200 cc., alla pressione esistente, sia al Col d'Olen che a Torino: il soggetto respirava questa quantità di gas in circa 2 (al massimo 3) minuti, e continuava poi a respirare nell'apparecchio fino al 7°-8° minuto: trascorso questo termine, si prelevavano dal polpastrello del dito, 0.1 cc. di sangue, sul quale si eseguiva la titolazione della carbossemoglobina, e quindi dell'ossido di carbonio, col metodo di Douglas e Haldane ⁽¹⁾.

L'ossido di carbonio veniva prodotto volta per volta, riscaldando cautamente acido ossalico (1 parte) con acido solforico (6 parti ca. in peso): è noto che, in queste condizioni l'acido ossalico si decompone secondo la reazione:



Il gas che si sviluppa in questa maniera, veniva privato dell'anidride carbonica, facendolo gorgogliare a piccole bolle in bottiglie contenenti una soluzione concentrata di idrossido sodico, e poi ancora filtrato in tubi contenenti calce sodata. Si poteva così ottenere CO puro, che veniva raccolto nella buretta.

Naturalmente, tutte queste determinazioni vennero fatte essendo il soggetto in condizioni di perfetto riposo e di digiuno, e, sullo stesso soggetto, e per ogni località, vennero ripetute quasi sempre almeno due volte.

Riassumiamo nella tabella che segue le medie dei valori così riscontrati al Col d'Olen, ed a Torino, per i vari soggetti: questi erano individui dai 25 ai 30 anni, eccettuati i primi due che contavano 36-38 anni.

(1) DOUGLAS, and HALDANE, *The causes of absorption of oxygen by the lungs*, « Journ. of Physiology », 44, p. 305, 1912.

Per quanto riguarda questo metodo di determinazione della massa sanguigna nell'uomo ed il metodo della titolazione della carbossemoglobina, con il carminio, si trova un'ampia descrizione nella recente monografia di HALDANE J. S., *Respiration*, « Yale University Press. New Haven », 1927. Si veda ancora BARCROFT J., *The respiratory function of the blood*, Part I, « Lessons from high altitudes », Cap. XI, p. 138, « University Press ». Cambridge, 1925.

TABELLA.

Numero di esperim.	Soggetto	Peso corporeo kg.	Globuli rossi milioni per mm ³			Emoglobina gr. per 100 cc. di sangue			Massa sanguigna cc.		
			Torino	Col d'Olen	Variaz. percen.	Torino	Col d'Olen	Variaz. percen.	Torino	Col d'Olen	Variaz. percen.
1	A. A.	62	5.01	5.61	12	12.91	14.41	11.4	3530	3570	1.1
2	A. B.	79	5.095	5.25	3.01	13.46	14.02	4.2	3810	3770	— 1.05
3	A. M.	57	4.60	5.22	13.5	12.87	13.03	1.2	2640	2760	4.5
4	C. V.	78	4.85	5.45	12.4	13.71	14.15	3.2	3700	3960	7
5	R. M.	72	5.107	5.70	11.6	14.16	14.20	0.28	3620	3580	— 1.1
6	M. G.	76	4.83	5.685	17.7	12.91	13.72	6.0	3490	3570	2.3
7	A. C.	61	4.945	5.91	19.5	12	13.2	10.0	2850	2860	0.35
8	E. S.	62	4.56	5.26	15.4	12.68	12.95	2.1	3205	3220	0.47
9	A. R.	64	5.20	5.71	9.8	14.34	14.25	— 0.63	3310	3490	5.4
10	V. P.	60	4.75	5.385	13.3	13.1	13.5	3	2490	2465	1.0
Media	—	—	—	—	12.82	—	—	4.07	—	—	1.80

Come da questa tabella appare, durante la permanenza al Col d'Olen si ebbe in tutti i soggetti un aumento del numero dei corpuscoli rossi e dell'emoglobina, aumento che varia notevolmente da soggetto a soggetto, e che raggiunge, in media, i valori del 12.8 % per i corpuscoli rossi, e del 4 % circa per l'emoglobina. A differenza di quanto venne riscontrato da precedenti AA., gli aumenti dell'emoglobina e dei corpuscoli rossi non procedono paralleli, in quanto che l'aumento di questi ultimi è notevolmente maggiore dell'aumento percentuale di emoglobina. Nella spedizione anglo-americana al Pike's Peak, si era addirittura riscontrato un maggiore aumento percentuale dell'emoglobina che non dei corpuscoli rossi. La massima parte degli AA., però, ha generalmente riscontrato un minor aumento dell'emoglobina, che non dei corpuscoli rossi, se pure tale differenza non si fosse mai manifestata così considerevole come quella delle osservazioni qui riportate.

A quale causa sia imputabile questa diminuzione nel contenuto in emoglobina dei globuli rossi, non abbiamo elementi per poter stabilire: ma potrebbe forse essere l'espressione della immissione in circolo di globuli rossi giovani, meno ricchi di emoglobina, fenomeno perfettamente analogo a quello che si verifica dopo i salassi.

Per ciò che riguarda la massa sanguigna, non abbiamo riscontrato una variazione sensibile, superiore al 5 %, che è circa il limite di errore per ogni singolo esperimento, del metodo adoperato. L'aumento medio dell'1.8 % ci induce a ritenere però che realmente si abbia un leggero aumento della massa sanguigna, dopo una permanenza di 15-25 giorni in montagna, in confronto del valore che presenta lo stesso individuo, nelle condizioni di vita abituale al piano, aumento forse dovuto alle migliorate condizioni igieniche dovute al soggiorno in montagna.

Dato un aumento così lieve della massa sanguigna, l'aumento totale dei corpuscoli rossi e della quantità di emoglobina dell'organismo, non risulta sensibilmente aumentato, più di quanto lo dimostri l'aumento percentuale.

Embriologia. — *Studi embriologici sulle razze polivoltine del Bombice del gelso.* Nota preliminare di R. GRANDORI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. MENOZZI.

Riprendendo il programma di uno studio embriologico comparativo delle principali razze del Bombice del gelso che oggi sono comunemente impiegate nell'industria bacologica italiana, ho preparato da molti mesi grande quantità di materiale con l'intendimento di completare le ricerche già da me in parte pubblicate per illustrare nel modo più ampio e più completo possibile tutto lo sviluppo embrionale del prezioso insetto, dalla deposizione dell'uovo fino alla sua schiusura.

Ma poichè la esecuzione dei preparati e dei disegni illustrativi richiederà un tempo notevole, e la monografia completa non potrà vedere la luce che nell'anno venturo, stimo opportuno di segnalare di tempo in tempo a mezzo di Note preliminari i fatti più salienti che nel corso di questo studio vengono di mano in mano assodati.

Lo sviluppo embrionale delle uova di razze annuali ha fatto oggetto di numerosi studi di parecchi autori; ma quello delle uova di razze bivoltine e polivoltine non è stato finora — per quanto io mi sappia — fatto oggetto di osservazione o ricerca alcuna. Esso è tutto da studiare e da documentare; e poichè dall'iniziato studio emergono già fatti nuovi di notevole interesse, ne dò qui sommaria notizia, riservandomi la più ampia illustrazione nel lavoro esteso.

Il materiale di cui finora mi sono valso consiste in uova di razza Bivoltina bianca cinese che potei procurarmi alcuni anni or sono allorchè dirigevo l'Istituto Bacologico di Trento. Tali uova furono conservate per sei anni in alcool a 90°, e durante il corrente anno furono imparaffinate e

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

sezionate al microtomo. I metodi di colorazione adottati furono l'Ematossilina ferrica di Heidenhain e l'Ematossilina Carazzi, aggiungendo come colore plasmatico l'Eosina o il Rosso Congo, o più spesso l'Orange G.

*
**

Le osservazioni e i reperti di cui dò qui un rapido cenno concernono le prime fasi della seconda parte dello sviluppo dell'uovo bivoltino, cioè i primi due giorni dell'incubazione normale primaverile.

Mentre questa fase dello sviluppo embrionale richiede circa 18 giorni (escluso il periodo preparatorio) nelle razze annuali indigene, per l'uovo della suddetta razza bivoltina ne ha richiesto soltanto 12-14, sempre a parità di condizioni di temperatura, seguendo cioè per le une e per le altre lo schema comunemente adottato delle temperature gradualmente crescenti di mezzo grado al giorno. Nacquero le spie al 12° giorno, e si ebbero nascite copiose nel 13° e 14° giorno.

Questa maggiore rapidità di sviluppo embriogenetico si traduce in un più precoce raggiungimento di quelle fasi embrionali che nelle razze annue si raggiungono più lentamente. La maggiore rapidità si rende manifesta in tutte le fasi; non esistono cioè fasi dell'organogenesi più lente ed altre più raccorciate in paragone alle razze annue, bensì tutto il processo è in egual grado accelerato.

Mentre nelle razze annuali indigene un risveglio della stria germinale ibernante non si rende manifesto se non al 2° giorno dell'incubazione, con un lieve allungamento della stria germinale e con la comparsa di una netta metameria nell'ectoderma e nel mesoderma⁽¹⁾, in questa razza bivoltina invece il risveglio è già visibile al termine della prima giornata d'incubazione, e alla 2ª giornata la stria germinale presenta già un allungamento cospicuo, assai maggiore di quello di qualsiasi altra razza annuale indigena od esotica (fig. 1). La metameria dell'ectoderma e del mesoderma è nitidissima, i metameri sono alquanto allungati, e la convessità dei segmenti ectodermici all'esterno è assai spiccata. Complessivamente la stria germinale a questa età nel bivoltino descrive — sulle sezioni sagittali — oltre $\frac{3}{4}$ di un ellissoide con una curvatura concentrica a quella della sierosa, mentre nelle uova di razze indigene non arriva che a superare di ben poco la metà della medesima curva ellissoidale. Inoltre, mentre l'estremo cefalico della stria rimane sempre fisso sotto il polo micropilare dell'uovo, e non s'allunga nel tuorlo della metà dorsale dell'uovo stesso, l'estremo addominale è quello che invade per notevole lunghezza la regione dorsale dell'uovo avvicinandosi molto all'estremo cefalico (fig. 1). Questi due fatti — inusitata lun-

(1) R. GRANDORI, *Il Filugello e le industrie bacologiche*, Trevisini editore, Milano, 1924, p. 53, fig. 28.

ghezza della stria in rapporto ad un ellissoide concentrico alla sierosa, e prolungamento dell'estremo addominale sul lato dorsale dell'uovo — caratterizzano in modo così tipico la stria germinale bivoltina all'inizio dell'incubazione da rendere agevole l'immediato riconoscimento della razza, in base ad una osservazione a modesto ingrandimento, in mezzo ad una serie di preparati di uova di pari età pertinenti a svariate razze annuali.

L'invaginazione stomodeale è scavata — come mostra la figura, in direzione obliqua che fa un angolo notevole con l'asse longitudinale dell'uovo;

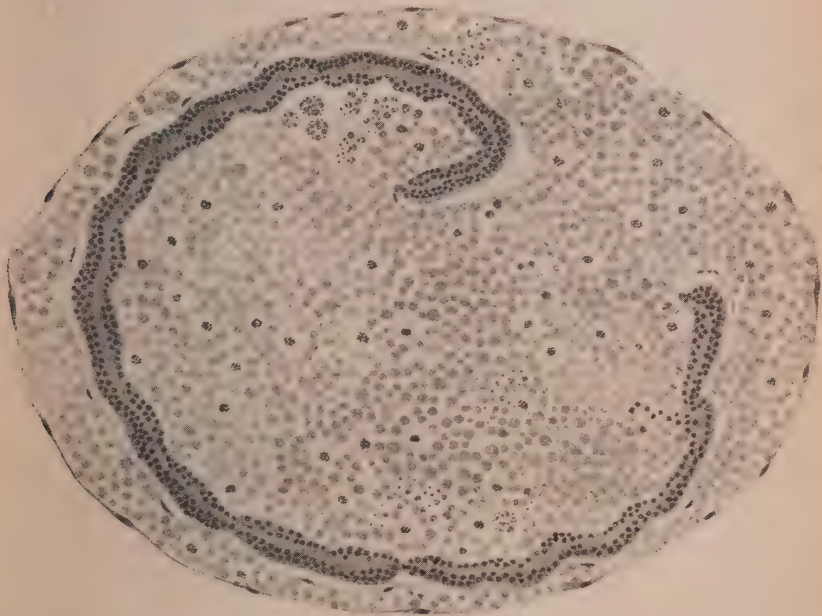


Fig. 1. — Sezione sagittale di uovo di Bivoltino cinese bianco al termine della 2^a giornata di incubazione (ingr. 125 diam.).

il fatto si verifica anche nelle razze annuali, ma con angolo minore, e assai più tardivamente che in questa bivoltina (al 4° giorno anzichè al 2°).

L'invaginazione proctodeale, che nella figura non appare perchè la sezione è leggermente obliqua rispetto al piano sagittale (è difficilissima, come si comprende, un'orientazione così perfetta da interessare tutta la stria su detto piano), nelle sezioni vicine a quella disegnata appare nettamente pronunciata e assai più cospicua di quella stomodeale; essa assume la profondità e l'aspetto che nelle razze annue presenta quella invaginazione al 4°-5° giorno d'incubazione⁽¹⁾.

(1) R. GRANDORI, loc. cit., p. 54, fig. 29.

Le sfere vitelline non presentano quel grado di individualizzazione così spiccato che solitamente nei primi stadi dell'incubazione esse presentano nelle razze annuali; mentre intorno ai nuclei vitellini l'area chiara, data da citoplasma a struttura reticolare sgombro di granuli vitellini, è per lo più ben netta, non si nota però una delimitazione periferica in nessuna sfera. Cosicché, in questa razza, quella struttura che potremmo chiamare *policentrica* delle uova annuali, cede il luogo ad una struttura che può interpretarsi come un unico *sincizio* vitellino.

In seno ad esso tre individualità cellulari si distinguono:

α) le cosiddette *sfere vitelline*, parte costituente preponderante, mal delimitate o non delimitate affatto, ricche di granuli vitellini inclusi nelle maglie del citoplasma reticolare;

β) le *cellule migranti*, *qui numerosissime;

γ) i *microrganismi simbiotici*.

Le sfere vitelline sono troppo note per la loro struttura perchè occorra qui spendere parole per descriverle. Sui dettagli si dirà nel lavoro esteso.

Le cellule migranti, viste e descritte e variamente interpretate da Autori precedenti, furono da me indicate quali figlie delle sfere vitelline, che in esse e da esse traggono origine e vanno a partecipare direttamente all'organogenesi. Il fenomeno che io additai ⁽¹⁾ — e che già Tichomiroff aveva intraveduto — per le prime formazioni embrionali antecedenti alla diapausa di razze annue, è qui nei bivoltini straordinariamente più accentuato. Nella fig. 1 si scorgono parecchie di queste cellule migranti; e nel lavoro esteso sarà ampiamente documentato l'affluire di tali cellule all'embrione. Qualche critico di questa mia interpretazione ha obiettato — non in sede di lavoro scientifico — che essa sconvolge quanto noi sapevamo finora sull'argomento, perchè il vitello era sempre stato considerato come semplice materiale trofico, e i suoi elementi cellulari come cellule abortive. Io ribatisco con le attuali nuove osservazioni il mio concetto: la massa vitellina, nell'uovo del bombice, e probabilmente in tutti gl'Insetti, non è materiale abortivo, ma un vero e proprio *tessuto vivente*, che per essere ricco di deuto-plasma nutritizio, non cessa di essere tessuto vivente; esso è sede di una *proliferazione cellulare continua*, che fornisce continuamente — nei periodi di attività, s'intende — blastomeri alla costruzione dei tessuti embrionali.

Quando noi troviamo in ogni sezione di uova bivoltine in questa età decine e decine di cellule ben individualizzate, migranti in mezzo al vitello, affollantisi presso il mesoderma embrionale, ci troviamo di fronte a questa importante alternativa: o tali cellule si originano dalle sfere vitelline e vanno a contribuire all'organogenesi, oppure sono i tessuti embrionali che si disintegrano in cellule singole che vanno ad invadere il vitello! Strabilante

(1) R. GRANDORI, *Lo sviluppo embrionale del baco da seta*. Mem. I: *Le prime 42 ore di sviluppo dalla deposizione dell'uovo*, « Ann. R. Staz. Bacol. », Padova, 1914.

conclusione quest'ultima, perchè qui sappiamo che nell'uovo si costruisce un embrione e non si demolisce. L'affollamento di cellule migranti — che sono sempre numerosissime fino a blastocinesi compiuta — dovrebbe ad un certo momento condurre all'occupazione di tutta la massa del tuorlo, se fosse vera l'opinione dei critici; invece il fenomeno presenta sempre la stessa intensità, e le cellule migranti sono sempre distribuite pressochè con ugual densità in tutto il vitello centrale.

Il lavoro esteso darà ampi documenti dell'originarsi delle cellule migranti dalle cellule vitelline.

I microrganismi simbiotici, da me scoperti e descritti per tutta la fase precedente la diapausa⁽¹⁾, sono in numero enorme nell'uovo bivoltino in queste prime fasi dell'incubazione, assai più numerosi che nell'uovo annuale. Inoltre essi mostrano numerosissime forme di riproduzione conitomica a rosetta, ed abbondano in modo specialissimo presso l'estremo caudale della stria (fig. 1). Anche le forme pallide ad alone chiaro, incluse nei granuli vitellini, sono in numero strabocchevole in confronto ad uova annuali. È impossibile non mettere questa grande intensità di attività del microrganismo in rapporto con la grande rapidità dell'embriogenesi del bivoltino in confronto con l'annuale.

Anche questa mia interpretazione del microrganismo simbiotico fu da qualche critico revocata in dubbio — mai in sede di lavoro scientifico —; non già che si negasse l'evidenza dei preparati che io mostrai a Commissioni e a scienziati della materia; ma se si conveniva essere in presenza di un microrganismo, si dubitava che potesse chiamarsi *simbiotico* perchè all'idea di simbiosi si vuol associare l'idea di mutuo vantaggio fra i due organismi. Orbene, mi pare perfino superfluo di insistere nell'elementare concetto che il significato della parola simbiosi non include necessariamente l'idea del mutuo vantaggio. Inoltre, ritengo probabile di poter dimostrare che il reciproco vantaggio fra ospite e microrganismo esista in realtà. Quel che preme infine è di dimostrare che trattasi di microrganismi inclusi nella massa del tuorlo, endocellulari talora, e talora endonucleari, penetranti anche nei tessuti embrionali, trasmessi per eredità, e che certamente nessun danno arrecano al simbiote ospite. La questione, del resto, sarà a fondo discussa nel lavoro esteso.

Ma poichè taluno dubitò che nel vitello di un insetto potessero riscontrarsi microrganismi veri e propri, il lavoro in esteso cercherà di dare le più complete prove che di veri microrganismi si tratta. Intanto il progresso delle conoscenze in materia ha dimostrato che non è più la mia sola osservazione a segnalare un fatto nuovo ed isolato, bensì parecchi ricercatori hanno trovato, dopo la pubblicazione del mio lavoro, la presenza di micror-

(1) R. GRANDORI, *La simbiosi ereditaria del Filugello*, « Atti Reale Ist. Veneto di Sc. Lett. ed Arti », tomo LXXIX, parte II, 1919-20.

ganismi nel tuorlo di animali diversi. Così il Golgi⁽¹⁾ che considerò i corpuscoli del tuorlo di anfibi, uccelli e pesci come elementi forniti di tutte le proprietà di organismi viventi; Nobile⁽²⁾ che confermò le vedute del Golgi; e infine, per tacere di altri, il Pierantoni⁽³⁾ che ottenne perfino di riprodurre in culture di agar i simbionti vitellini di *Rana esculenta*. Le figure chiarissime della tavola IV della citata Memoria di questo Autore riproducono microrganismi morfologicamente quasi identici a quelli da me illustrati.

Se il progresso della nostra conoscenza ci conduce oggi ad interpretare il vitello delle uova di molti animali non più come costituito da semplici granuli o globuli di sostanza nutritizia, priva di vita, bensì come la sede di innumerevoli unità viventi che collaborano alla costruzione meravigliosa di un essere nuovo, anzichè dolerci di veder crollare una vecchia concezione dovremo allietarci del nuovo progresso compiuto nella ricerca del vero.

(1) C. GOLGI, *Intorno alla struttura ed alla biologia dei cosiddetti globuli (o piastrine) del tuorlo*, « Mem. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », vol. 22-23, 1923.

(2) M. NOBILE, *Contributo alla conoscenza della formazione e della struttura dei globuli del tuorlo in uova di « Rana esculenta » e Gallus gallus*, « R. Accad. Gioenia », Catania, 1927.

(3) U. PIERANTONI, *I corpuscoli del tuorlo e la loro coltura in agar*, « Mem. R. Accad. Lincei, Classe Sc. Fis. Mat. Nat. », serie VI, vol. II, fasc. XX, 1928.

N. P.

INDICE DEL VOLUME VIII, SERIE VI. — RENDICONTI

1928

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — «Anomalie della gravità e deviazioni della verticale determinate dalla Spedizione De Filippi nell'Asia Centrale (1913-1914)». 337.
- ADINOLFI E. — «L'influenza dei raggi X sulle condizioni di struttura del bismuto e del tellurio». 381.
- AGOSTINI P. — «Calore di formazione dei cloruri doppi di cadmio e potassio». 393.
- ALIPRANDI G. — «Sopra le normali principali (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano». 273.
- Id. — «Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico». 356.
- ALTSCHUL R. — «Un nuovo procedimento per colorare le cellule gliali». 594.
- ANELLI M. e BELLUIGI A. — «A proposito di una conferma di induzioni geologiche e di risultati geofisici». 88.
- ANGELI A., BIGIÀVI D. e ZWI JOLLES. — «Sopra le scissioni di alcuni acidi solfoidosammici». 116.
- ARMELLINI G. — Presenta il suo «Trattato d'Astronomia Siderale». 435.
- ASCOLI G. — «Sulla unicità della soluzione nel problema di Dirichlet». 348.

B

- BAMBACIONI V. — «Contributo alla embriologia di "Lilium candidum"». 612.
- BARBIERI G. A. — «Nuovo metodo per il dosamento volumetrico del cobalto». 405.
- BARBIERI N. A. — «La coltura fisiologica. Risultati ed applicazioni». 606.
- BARCHIESI A. — «Ricerche ponderali ed istofisiologiche su cavie e conigli sottoposti ad iniezioni di miscele lipoidee». 419.
- Id. — «Ricerche istofisiologiche sull'influenza delle variazioni di temperatura in alcuni organi di eterotermi». 526.
- BARGELLINI G. — «Sulla 2-6-bicloro-fenetidina». 505.
- Id. e LEONE P. — «Sulla 3-5-bicloro-fenetidina». 399.
- Id. e MONTI L. — « α -fenil-cumarine». 395.
- Id. e Id. — «Sulla 2-5-bicloro-fenetidina». 590.
- BEDARIDA A. M. — «Sui corpi algebrici di Galois». 359.
- BELLUIGI A. — «Rilievi gravimetrici ed isotasia». 302.
- Id. — Vedi ANELLI M.
- BIGIÀVI D. — «Relazione fra alcuni composti aromatici». 167.
- Id. — Vedi ANGELI A., ZWI JOLLES.

- BOGGIO T. — « L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo ». 19.
 ID. — « Identità di Bianchi e omografia di gravitazione ». 126.
 ID. — « Spazi curvi a tre dimensioni ed omografia di Ricci ». 183.
 BRUNELLI G. — « Sulla natura biofisica della erosione foveolare delle arenarie nella costa Tirrena ». 423.
 ID. — « Intorno all'epoca di riproduzione dei delfini ». 518.
 BURALI-FORTI C. — « Una questione sui veli elastici ». 549.

C

- CACCIOPOLI R. — « Sulla definizione dell'area di una superficie ». 34.
 ID. — « Sull'espressione dell'area di una superficie mediante un integrale doppio ». 470.
 CAGLIOTI V. — Vedi ZAMBONINI F.
 CALAPSO R. — « Una nuova trasformazione delle superficie isoterme ». 287, 366.
 ID. — « Intorno ad una trasformazione delle superficie ». 466.
 CAMBI L. — « Ferro, cobalto, nichel monovalenti e nitrososolfosali. Risposta a W. Manchot ». 535.
 CANNERI G. — « La separazione dell'ittrio puro dalle terre ittriche ». 164.
 CAROLI E. — « La fase "microniscus" di "Ione thoracica" (Montagu), ottenuta per allevamento sui Copepodi ». 321.
 CARRELLI A. — « Sul nuovo fenomeno di diffusione » 155.
 ID. — « Sulla teoria della fluorescenza sensibilizzata ». 495.
 CARUGATI M. — Vedi FERRARI A.
 CASSINA A. — « Sul concetto di limite ». 639.
 CASTELNUOVO G. — Presenta l'opera « Théorie ionique de l'excitation des tissus vivantes » di LASAREFF. 435.
 CASTIGLIONI B. — « Sulla circolazione dell'Adriatico meridionale ». 70.
 ČECH E. — « Osservazioni sulle quadriche di Darboux ». 371.
 ID. — « Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces ». 484, 552.

- CISOTTI U. — « A proposito di due recenti Note di M. Pascal e C. Ferrari ». 451.
 ID. — « Sulle azioni idrodinamiche in prossimità di salienti ». 452.
 CLERICI E. — « Sulla applicabilità dell'analisi isopiconomerica alle rocce aurifere ». 251.
 COLONNETTI G. — « Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche ». 142, 291.
 COMEL M. — « Analisi della curva di assorbimento dell'ossigeno di poltiglie muscolari in funzione della concentrazione degli idrogenioni ». 255.

D

- DEAGLIO R. — « Effetto Volta nell'aria e pellicole superficiali umide ». 60.
 DE CARO L. — « Energia di crescita dello "Sterigmatocistis Nigra" ». 258.
 DE CECCO M. — « Applicazione dei raggi ultravioletti alla ricerca di sostanze fluorescenti nelle piante in rapporto ad alcuni fenomeni di patologia vegetale ». 101.
 DELSARTE J. — « Sur la composition de seconde espèce ». 26.
 DE MIRA FERNANDES A. — « Transports isoclines et directions associées ». 676.
 DESIO A. — « Sulla presenza del Miocene nella Sirtica ». 516.
 DI MATTEI P. e DULZETTO F. — « Dimostrazione istochimica del glutatione e sua distribuzione in alcuni organi » 317.
 DULZETTO F. — « Osservazioni sulla vita sessuale della "Gambusia holbrooki" (Grd.) ». 96.
 ID. — Vedi DI MATTEI P.

E

- EMANUELLI P. — « Gli eclissi di sole totali-non-centrali ». 214.

F

- FANO G. — « Trasformazioni di contatto birazionali del piano ». 445.
 ID. — « Sulla rappresentazione di S. Lie

degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato ». 529.

FANO G. — « Congruenze ∞_2 di curve razionali, e trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare ». 623.

FANTAPPIÈ L. — « Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinitesime nella teoria dei quanti ». 645.

FERNANDES L. — « Ricerche sui solfosali. 7. VII. Polisolfovanadati ». 234.

FERRARI A. e CARUGATI M. — « Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. — IV. Analisi termica dei sistemi $MgCl_2$ — $FeCl_2$ e $CdCl_2$ — $FeCl_2$ anidri ». 306.

ID. e INGANNI A. — « Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. — III. Analisi termica dei sistemi $MnCl_2$ — $CoCl_2$; $CdCl_2$ — $CoCl_2$ e $MgCl_2$ — $CoCl_2$ anidri ». 238.

FINZI B. — « Sopra il teorema di Kutta-Joukowski ». 210.

ID. — « Sulla unicità di azioni dinamiche nel problema della lastra piana ». 565.

FORTI C. — « Sull'azione dei vapori di alcool etilico e metilico, di etere solforico, di cloroformio e del gas illuminante sui leucociti isolati dall'organismo ». 700.

FUBINI G. — « Ancora sulle trasformazioni di Laplace, Lévy e Moutard per le ipersuperficie ». 265, 333.

G

GALATÀ G. — « Ricerche sugli effetti circolatori degli aumenti di pressione atriale ». 705.

GALLITELLI P. — « Laumontite di Toggiano ». 82.

GARBASSO A. (Vicepresidente). — Rivolge un pensiero d'augurio a S. M. il Re per il suo onomastico. Saluta i nuovi Soci e annunzia la morte dei Soci Bianchi L., Piutti A. e Sabbatani L. 434.

ID. — Raccomanda che gli autori mandino i sunti delle loro Note. 435.

GARBASSO A. — Comunica la morte del Socio Canevari M. 619.

ID. — Ringrazia i Soci Levi G. e Millosevich F., per le dotte commemorazioni. 619.

GENTILE G. e MAJORANA E. — « Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen e ottici a causa dell'elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio ». 229.

GEPPERT H. — « Sugli invarianti adiabatici di un sistema genetico differenziale ». 30, 191, 294.

GIORGIO G. — « Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici ». 3.

ID. — « Sulla sufficienza delle equazioni differenziali nella fisica-matematica ». 105.

GLIVENKO V. — « Sur les valeurs probables de fonctions ». 480.

ID. — « Sur la loi des grands nombres dans les espaces fonctionnels ». 673.

GORINI C. — « Termobiosi e dissociazione microbica ». 598.

GRAFFI D. — « Sulla teoria della trasmissione del calore per convenzione ». 573.

GRANDORI R. — « Studi embriologici sulle razze polivoltine del Bombice del Gelso ». 717.

GUGINO E. — « Sopra una nuova interpretazione del principio della minima costringimento del Gauss ». 558.

ID. — « Sulla estensione al moto continuo del teorema di Lagrange-Bertrand relativo al moto impulsivo ». 687.

GUIDI C. — Presenta in omaggio una sua Nota: « Prove di travi da ponte ». 619.

H

HERRERA A. L. — « Imitazione di forme organiche coll'allumina e l'acido fluoridrico ». 15.

ID. — « Ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina e gli acidi minerali ». 460.

ID. — « Seguito alle ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina ». 637.

I

INGANNI A. — Vedi FERRARI A.

K

KAHANOVICZ M. — «Le costanti elastiche in rapporto al sistema periodico degli elementi». 584.

KANITANI J. — «Une interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif de l'hypersurface». 208.

L

LAMBERTI F. — «Su una terza equazione ordinale nella dinamica dei sistemi materiali». 679.

LELLI M. — «Il teorema di Bernouilli per i liquidi omogenei viscosi». 362.

LEVI G. — Commemora il Socio straniero *Henneguy L.* 619.

LEVI R. G. — «Ulteriori ricerche sulla catalisi coi metalli del gruppo del platino». 409.

LEVI-CIVITA T. — «Sul moto di un corpo di massa variabile». 329.

Id. — «Aggiunta alla Nota "Sul moto di un corpo di massa variabile"». 621.

LOMBARDI L. e LOMBARDI P. — «Misura delle dissipazioni locali di energia entro una parte circoscritta del circuito magnetico». 111, 177.

LOMBARDI P. — Vedi LOMBARDI L.

M

MAGGINI M. — «Sulla misura interferometrica della lunghezza d'onda effettiva di stelle doppie e della sua variazione con la distanza zenitale». 376.

MAJORANA Q. e TODESCO G. — «Preparazione delle cellule fotoelettriche al Talio». 9.

Id. — Vedi GENTILE G.

MARGARIA R. e SAPEGNO E. — «Massa sanguigna, globuli rossi ed emoglobina, in individui acclimatati, in montagna ed al piano». 712.

MARTIS in BIDDAU S. — «Ricerca di una espressione razionale per le potenze di una matrice di secondo ordine». 130.

Id. — «Sugli esponenziali delle matrici di secondo ordine e loro applicazione alla teoria dei gruppi». 276.

Id. — «Calcolo del logaritmo di una matrice di secondo ordine, e sua applicazione allo studio dei gruppi a un parametro contenenti una sostituzione data». 474.

MASOTTI A. — «Sopra una forma delle equazioni dinamiche di un sistema di vortici rettilinei». 300.

MAZZA L. — Vedi ROLLA L.

MEZZADROLI G. e VARETON E. — «Influenza del magnesio metallico sulla formazione di aldeide formica e di zuccheri, per azione dei raggi ultravioletti sulle soluzioni di bicarbonato di calcio». 511.

MILLOSEVICH F. — Presenta il volume commemorativo in onore di *Sella Q.* e un suo volume sulle meteoriti del Museo di Mineralogia della R. Università di Roma. 435.

Id. — Commemora il Socio *Artini E.* 619.

MONTEROSSO B. — «Studi cirripedologici. — IV. Fenomeni che precedono l'anabiosi nei Ctamalini». 91.

MONTI L. — Vedi BARGELLINI G.

N

NASINI R. — Invia un saluto alla memoria del Socio *Piutti A.* 434.

Id. — Commemora il Socio straniero *Arrhenius Svante A.* 434.

Id. — Presenta le pubblicazioni dell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Pisa (1924-1927); il volume pubblicato per celebrare il Centenario di *Bertagnini G.* e ne parla. 434.

Id. — Presenta un plico suggellato di *Lucarini L.* 435.

O

OCCHIALINI A. — «Le scintille a basso voltaggio come sorgenti spettroscopiche». 589.

- OCCHIALINI A. — «L'effetto della resistenza sullo spettro di una scintilla». 579.
 ODDONE E. — «Per l'interpretazione delle onde sismiche superficiali». 64.
 ONORATO E. — «Il giacimento di zolfo di Monte Solforoso presso Scrofano in provincia di Roma». 243.

P

- PACE E. — «Pinaconi e Pinacoline». 309.
 PALATINI A. — «Sui tensori costanti associati a varietà binarie e ternarie». 538.
 PARRAVANO N. (Segretario). — Presenta le opere inviate in dono. 435, 619.
 PASCAL E. (relatore) e SEVERI F. — Relazione sulla Memoria di *Sansone G.* «Sulla risoluzione apiristica delle congruenze». 435.
 PASTORI M. — «Formole di commutazione nella derivazione dei tensori». 186.
 PD. — «Notevoli identità relative ai tensori derivati». 545.
 PERSICO E. — «La risonanza ottica secondo la meccanica ondulatoria». 55, 160.
 PICCARDI G. — «I livelli di Röntgen delle terre rare e le deviazioni della legge di Mosely». 414.
 PICONE M. — «Dimostrazione di un teorema d'analisi di cui è fatto uso in fisica piana». 651.
 PISTOLESI E. — «Ancora sul teorema di Kutta-Joukowski nel caso della lastra piana». 50.
 ID. — «Ancora sul teorema di Kutta-Joukowski nel caso della lastra piana. (Complemento alla Nota del luglio 1928, fascicoli 1-2)». 486.
 POLARA V. — «Sul teorema di Gibbs - regola delle fasi - per gli equilibri eterogenei». 500.
 PRATESI P. — Vedi SCAGLIARINI G.

R

- RANZI S. — «Rapporti tra processi organogenetici ed istogenetici (Ricerche di morfologia sperimentale nei Cefalopodi)». 425.

- RODOLICO F. — «Appunti sulla fosgenite di Monteponi». 171.
 ROLLA L. e MAZZA L. — «A proposito di celle fotoelettriche al Tallio». 347.
 ROSENBLATT A. — «Sull'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie». 41.
 ROSSI B. — «Studio del campo elettrico nei mezzi omogenei anisotropi». 146.
 ID. — «Sopra la distribuzione dell'elettricità nei conduttori immersi in un mezzo omogeneo anisotropo». 223.
 RUIZ C. — «La fauna dei tufi vulcanici giuresi di Roccapalumba in Sicilia». 595.
 RUSSO A. — «Divisioni nucleari di categoria in "Criptochilum echini Mps."». 628.

S

- SANNIA G. — «Nuove definizioni del fascio canonico». 373.
 SANSONE G. — «Determinazione del numero delle congruenze $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ aventi tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p ». 202.
 ID. — «L'equazione cui soddisfa il coefficiente a della congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ con p primo, $p > 3$, perchè essa abbia tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p ». 280.
 SAPEGNO E. — Vedi MARCARIA R.
 SBRANA F. — «Sopra un notevole gruppo di operatori funzionali». 351.
 SCAGLIARINI G. e PRATESI P. — «Sulla reazione fra nitroprussiato sodico e solfuro». 75.
 SCORZA-DRAGONI G. — «A proposito di un'equazione differenziale». 361.
 SERINI R. — «Deformazioni simmetriche di una lastra elastica». 569.
 SETTIMJ L. — «Sulla composizione chimica di alcune paste alimentari e sulle modificazioni da esse subite per opera della cottura in acqua». 314.
 SEVERI F. (relatore), anche a nome del Socio VOLTERRA V., legge la relazione sulla

- Memoria del prof. *Fantappiè L.*: « I funzionali analitici ». 619.
- SEVERI F. — Vedi PASCAL E.
- SIGNORINI S. — « Espressione asintotica di una formula del Levi-Civita ». 45.
- SILVA G. — « Sulla definizione della gravità normale ». 691.
- SLEBODŃSKI W. — « Sur les déformations dans une variété à courbure constante ». 198.
- SPAGNOL G. — « Esperienze sulla fissazione di colloidi provocata dal cloroformio ». 515.
- SPIRITO A. — « Processi regolativi della regione encefalica degli embrioni di Anuri ». 429.
- STRANEO S. L. — « Applicazione del metodo funzionale allo studio del raffreddamento di una sbarra ». 575.
- SUPINO G. — « Alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche ». 134.
- ID. — « Alcune limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica ». 658.

T

- TERNI T. — « Rigenerazione e superrigenerazione di tessuto e di organo, nella coda di Urodeli adulti ». 431.
- TESTI-DRAGONE G. — « Fluorescenza di succhi vegetali ai raggi ultravioletti filtrati ». 602.
- TIRELLI M. — « Studi sulla fisiologia degli insetti (sistema nervoso) ». 520.

- TODESCO G. — Vedi MAJORANA Q.
- TONOLO A. — « Studi di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni ». 138.
- TOSCANO L. — « Equazioni reciproche a matrice ». 664.

V

- VARETON E. — Vedi MEZZADROLI G.
- VERCELLI F. — « Rilievi sperimentali su alcuni metodi geoelettrici ». 342.
- VINASSA DE REGNY P. — « La fusibilità degli elementi e il numero elettronico ». 121.
- VIOLA G. — « Elementi ellittici del sistema di « U. Ophiuchi ». 489.
- VOLTERRA V. — Vedi SEVERI F.
- VRANCEANU G. — « Sopra le equazioni del problema dei due corpi di masse variabili ». 555.
- ID. — « Seconda forma quadratica fondamentale di una varietà anolonomica ed applicazioni ». 669.

Z

- ZAMBONINI F. e CAGLIOTI V. — « Sulla determinazione quantitativa spettroscopica di piccole quantità di stronzio, di bario, e di cesio nei minerali, nelle rocce, nelle acque minerali, ecc. ». 268.
- ZWI JOLLES. — Vedi ANGELI A., BIGIAVI D.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi infinitesimale. — « A proposito di un' equazione differenziale ». SCORZA-DRAGONI G. 361.

Astronomia. — « Gli eclissi di sole totali-non-centrali ». EMANUELLI P. 214.

— « Sulla misura interferometrica della lunghezza d'onda effettiva di stelle doppie e della sua variazione con la distanza zenitale ». MAGGINI M. 376.

— « Elementi ellittici del sistema di "U Ophiuchi" ». VIOLA G. 489.

B

Batteriologia. — « Termobiosi e dissociazione microbica ». GORINI C. 598.

Biologia. — « Imitazione di forme organiche coll'albumina e l'acido fluoridrico ». HERRERA A. L. 15.

— « Ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina e gli acidi minerali ». Id. 460.

— « Seguito alle ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina ». Id. 637.

— « Studi cirripedologici. - IV. Fenomeni che precedono l'anabiosi nei Ctamalini » MONTEROSSO B. 91.

— « Osservazioni sulla vita sessuale della "Gambusia holbrooki" (Grd.) ». DULZETTO F. 96.

— « Analisi della curva di assorbimento dell'ossigeno di poltiglie muscolari in funzione della concentrazione degli idrogenioni ». COMEL M. 255.

Biologia. — « Dimostrazione istochimica del glutatione e sua distribuzione in alcuni organi ». DI MATTEI P. e DULZETTO F. 317.

— « Sulla natura biofisica della erosione foveolare delle arenarie nella costa Tirrena ». BRUNELLI G. 423.

— « Intorno all'epoca di riproduzione dei delfini ». Id. 518.

— « Rigenerazione e superrigenerazione di tessuto e di organo, nella coda di Urodeli adulti ». TERNI T. 431.

— « Divisioni nucleari di categoria in "Cryptochilum echini Mps." ». RUSSO A. 628.

Biologia sperimentale. — « Processi regolativi della regione encefalica degli embrioni di Anuri ». SPIRITO A. 429.

Bullettino bibliografico. — 437, 620.

C

Calcolo funzionale. — « Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti ». FANTAPPIÉ L. 645.

Chimica. — « Sulla reazione fra nitroprussiato sodico e solfuro ». SCAGLIARINI G. e PRATESI P. 75.

— « Sopra le scissioni di alcuni acidi solfo-idrosammici ». ANGELI A., BIGIAVI D. e ZWI JOLLES. 116.

— « La separazione dell'ittrio puro dalle terre ittriche ». CANNERI G. 164.

— « Relazione fra alcuni composti aromatici » BIGIAVI D. 167.

— « Ricerche sui solfosali. - VII. Polisolfovanadati ». FERNANDES L. 234.

Chimica. — «Sulla determinazione quantitativa spettroscopica di piccole quantità di stronzio, di bario, e di cesio nei minerali, nelle rocce, nelle acque minerali ecc.». ZAMBONINI F. e CAGLIOTI V. 268.

— «Pinaconi e Pinacoline». PACE E. 309.

— « α -fenil-cumarine». BARGELLINI G. e MONTI L. 395.

— «Sulla 2-5-bicloro-fenetidina». ID. e ID. 590.

— «Sulla 3-5-bicloro-fenetidina». BARGELLINI G. e LEONE P. 399.

— «Calore di formazione dei cloruri doppi di cadmio e potassio». AGOSTINI P. 393.

— «Nuovo metodo per il dosamento volumetrico del cobalto». BARBIERI G. A. 405.

— «Ulteriori ricerche sulla catalisi coi metalli del gruppo del platino». LEVI R. G. 409.

— «Sulla 2-6-bicloro-fenetidina» BARGELLINI G. 505.

— «Influenza del magnesio metallico sulla formazione di aldeide formica e di zuccheri, per azione dei raggi ultravioletti sulle soluzioni di bicarbonato di calcio». MEZZADROLI G. e VARETON E. 511.

— «Ferro, cobalto, nichel monovalenti e nitrososolfosali. Risposta a W. Manchot». CAMBI L. 535.

— «Un nuovo procedimento per colorare le cellule gliali». ALTSCHUL R. 594.

Chimica-fisica. — «La fusibilità degli elementi e il numero elettronico». VINASSA DE REGNY P. 121.

— «Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. III. Analisi termica dei sistemi $MnCl_2$ — $CoCl_2$; $CdCl_2$ — $CoCl_2$ e $MgCl_2$ — $CoCl_2$ anidri». FERRARI A. e INGANNI A. 238.

— «Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. - IV. Analisi termica dei sistemi $MgCl_2$ — $FeCl_2$ e $CdCl_2$ — $FeCl_2$ anidri». ID. e CARUGATI M. 306.

— «I livelli di Röntgen delle terre rare e

le deviazioni dalla legge di Mosely».

PICCARDI G. 414.

Chimica fisiologica. — «Sulla composizione chimica di alcune paste alimentari e sulle modificazioni da esse subite per opera della cottura in acqua». SETTIMY L. 314.

Comunicazioni varie. — 435.

E

Elettrotecnica. — «Misura delle dissipazioni locali di energia entro una parte circoscritta del circuito magnetico». LOMBARDI L. e LOMBARDI P. 111, 177.

Embriologia. — «Rapporti tra processi organogenetici ed istogenetici (Ricerche di morfologia sperimentale nei Cefalopodi)». RANZI S. 425.

— «Contributo alla embriologia di "Lilium candidum"». BAMBACIONI V. 612.

— «Studi embriologici sulle razze polivoltine del Bombice del Gelso». GRANDORI R. 717.

F

Farmacologia. — «Esperienze sulla fissazione dei colloidi provocata dal cloroformio». SPAGNOL G. 515.

Fisica. — «Preparazione delle cellule fotoelettriche al Tallio». MAJORANA Q. e TODESCO G. 9.

— «La risonanza ottica secondo la meccanica ondulatoria». PERSICO E. 55, 160.

— «Effetto Volta nell'aria e pellicole superficiali umide». DEAGLIO R. 60.

— «Sul nuovo fenomeno di diffusione». CARRELLI A. 155.

— «Sulla teoria della fluorescenza sensibilizzata». ID. 495.

— «Sullo sdoppiamento dei termini Röntgen e ottici a causa dell'elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio». GENTILE G. e MAJORANA E. 229.

— «A proposito di celle fotoelettriche al Tallio». ROLLA L. e MAZZA L. 347.

— «L'influenza dei raggi X sulle condi-

zioni di struttura del bismuto e del tellurio». ADINOLFI E. 381.

Fisica. — «Le scintille a basso voltaggio come sorgenti spettroscopiche», OCCHIALINI A. 389.

— «L'effetto della resistenza sullo spettro di una scintilla». ID. 579.

— «Sul teorema di Gibbs — regola delle fasi — per gli equilibri eterogenei». POLARÀ V. 500.

— «Sulla teoria della trasmissione del calore per convenzione». GRAFFI D. 573.

— «Applicazione del metodo funzionale allo studio del raffreddamento di una sbarra». STRANEO S. L. 575.

— «Le costanti elastiche in rapporto al sistema periodico degli elementi». KAHANOVICZ M. 584.

Fisica-matematica. — «Sulla sufficienza delle equazioni differenziali nella fisica-matematica». GIORGI G. 105.

— «Studio nel campo elettrico nei mezzi omogenei anisotropi». ROSSI B. 146.

— «Sopra la distribuzione dell'elettricità nei conduttori immersi in un mezzo omogeneo anisotropo». ID. 223.

— «Deformazioni simmetriche di una lastra elastica». SERINI R. 569.

Fisiologia. — «Energia di crescenza dello "Sterigmatocistis Nigra"». DE CARO L. 258.

— «Ricerche ponderali ed istofisiologiche su cavie e conigli sottoposti ad iniezioni di miscele lipoidee». BARCHIESI A. 419.

— «Ricerche istofisiologiche sull'influenza delle variazioni di temperatura in alcuni organi di eterotermi». ID. 526.

— «Sull'azione dei vapori di alcool etilico e metilico, di etere solforico, di clorofornio e del gas illuminante sui leucociti isolati dall'organismo». FORTI C. 700.

— «Ricerche sugli effetti circolatori degli aumenti di pressione arteriale». GALATÀ G. 705.

— «Massa sanguigna, globuli rossi ed emoglobina, in individui acclimatati, in

montagna ed al piano». MARGARÌ R. e SAPEGNO E. 712.

Fisiologia vegetale. — «Fluorescenza di succhi vegetali ai raggi ultravioletti filtrati». TESTI-DRAGONE G. 602.

— «La coltura fisiologica. Risultati ed applicazioni». BARBIERI N. A. 606.

G

Geodesia. — «Anomalie della gravità e deviazioni della verticale determinate dalla Spedizione De Filippi nell'Asia Centrale (1913-1914)». ABETTI G. 337.

Geofisica. — «Rilievi sperimentali su alcuni metodi geoelettrici». VERCELLI F. 342.

— «Sulla definizione della gravità normale». SILVA G. 691.

Geofisica mineraria. — «Rilievi gravimetrici ed isostasia». BELLUIGI A. 302.

Geologia. — «Sulla presenza del Miocene nella Sirtica». DESIO A. 516.

— «La fauna dei tufi vulcanici giuresi di Roccapalumba in Sicilia». RUIZ C. 595.

Geologia pratica. — «A proposito di una conferma di induzioni geologiche e di risultati geofisici». ANELLI M. e BELLUIGI A. 88.

Geometria. — «Une interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif de l'hypersurface». KANITANI J. 208.

— «Ancora sulle trasformazioni di Laplace, Lévy e Moutard per le ipersuperficie». FUBINI G. 265, 333.

— «Una nuova trasformazione delle superficie isoterme». CALAPSO R. 287, 366.

— «Osservazioni sulle quadriche di Darboux». ČECH E. 371.

— «Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces». ID. 484, 552.

— «Nuove definizioni del fascio canonico». SANNIA G. 373.

— «Trasformazioni di contatto birazionali del piano». FANO G. 445.

— «Sulla rappresentazione di S. Lie degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato». ID. 529.

— «Congruenze \mathcal{Q}_0 di curve razionali, e

trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare». ID. 623.

I

Idromeccanica. — «Sopra una forma delle equazioni dinamiche di un sistema di vortici rettilinei». MASOTTI A. 300.

- Idromeccanica.** — «Sopra il teorema di Kutta-Joukowski». FINZI B. 210.
- «Sulla unicità di azioni dinamiche nel problema della lastra piana». ID. 565.
 - «Il teorema del Bernouilli per i liquidi omogenei viscosi». LELLI M. 362.
 - «A proposito di due recenti Note di M. Pascal e C. Ferrari». CISOTTI U. 451.
 - «Sulle azioni idrodinamiche in prossimità di salienti». ID. 452.

M

- Matematica.** — «Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici». GIORGI G. 3.
- «L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo». BOGGIO T. 19.
 - «Identità di Bianchi e omografia di gravitazione». ID. 126.
 - «Spazi curvi a tre dimensioni ed omografia di Ricci». ID. 183.
 - «Sur la composition de seconde espèce». DELSARTE J. 26.
 - «Sugli invarianti adiabatici di un sistema generico differenziale». GEP-
PERT H. 30, 191, 294.
 - «Sulla definizione dell'area di una superficie». CACCIOPPOLI R. 34.
 - «Sull'espressione dell'area di una superficie mediante un integrale doppio». ID. 470.
 - «Sull'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie». ROSENBLATT A. 41.
 - «Espressione asintotica di una formola del Levi-Civita». SIGNORINI A. 45.

Matematica. — «Ricerca di un'espressione razionale per le potenze di una matrice di secondo ordine». MARTIS in BIDDAU S. 130.

- «Sugli esponenziali delle matrici di secondo ordine e loro applicazione alla teoria dei gruppi». ID. 276.
- «Calcolo del logaritmo di una matrice di secondo ordine, e sua applicazione allo studio dei gruppi a un parametro contenenti una sostituzione data. ID. 474.
- «Alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche». SUPINO G. 134.
- «Alcune limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica». ID. 658.
- «Studi di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni». TONOLO A. 138.
- «Formole di commutazione nella derivazione dei tensori». PASTORI M. 186.
- «Notevoli identità relative ai tensori derivati». ID. 545.
- «Sur les déformations dans une variété à courbure constante». SLEBODZINSKI W. 198.
- «Sopra le normali principali (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano». ALIPRANDI G. 273.
- «Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico». ID. 356.
- «Sulla unicità della soluzione del problema di Dirichlet». ASCOLI G. 348.
- «Sopra un notevole gruppo di operatori funzionali». SBRANA F. 351.
- «Intorno ad una trasformazione delle superficie». CALAPSO R. 466.
- «Sur les valeurs probables de fonctions». GLIVENKO V. 480.
- «Sur la loi des grands nombres dans les espaces fonctionnels». ID. 673.
- «Sui tensori costanti associati a varietà binarie e ternarie». PALATINI A. 538.
- «Una questione sui velli elastici». BURALI-FORTI C. 549.

Matematica. — «Sul concetto di limite». CASSINA A. 639.

— «Dimostrazione di un teorema d'analisi di cui è fatto uso in fisica piana». PICONE M. 651.

— «Equazioni reciproche a matrice». TOSCANO L. 664.

— «Seconda forma quadratica fondamentale di una varietà anolonomica ed applicazioni». VRANCEANU G. 669.

— «Transports isoclines et directions associées». DE MIRA FERNANDES. 676.

Meccanica. — «Ancora sul teorema di Kutta-Joukowski nel caso della lastra piana». PISTOLESI E. 50.

— «Ancora sul teorema di Kutta-Joukowski nel caso della lastra piana». (Complemento alla Nota del luglio 1928, fascicoli 1-2). ID. 486.

— «Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche». COLONNETTI G. 142, 291.

— «Sul moto di un corpo di massa variabile». LEVI-CIVITA T. 329.

— «Aggiunta alla Nota "Sul moto di un corpo di massa variabile"». ID. 621.

— «Sopra le equazioni del problema dei due corpi di masse variabili». VRANCEANU G. 555.

— «Sopra una nuova interpretazione del principio della minima coazione del Gauss». GUGINO E. 558.

— «Sulla estensione al moto continuo del teorema di Lagrange-Bertrand relativo al moto impulsivo». ID. 687.

— «Su una terza equazione ordinale nella dinamica dei sistemi materiali». LAMBERTI F. 679.

Mineralogia. — «Laumontite di Toggiano». GALLITELLI P. 82.

— «Appunti sulla fosgenite di Monteponi». RODOLICO F. 171.

— «Il giacimento di zolfo di Monte Solforoso presso Scrofano in provincia di Roma». ONORATO E. 243.

— «Sulla applicabilità dell'analisi isopicomica alle rocce aurifere». CLERICI E. 251.

N

Necrologie. — Annunzio della morte dei Soci BIANCHI L., PIUTTI A. e SABATANI L. 434.

— Commemorazione del Socio Straniero ARRHENIUS SVANTE A. 434.

— Commemorazione del Socio Straniero HENNEGUY L. 619.

— Annunzio della morte del Socio CANEVARI M. 619.

— Commemorazione del Socio ARTINI E. 619.

P

Patologia vegetale. — «Applicazione dei raggi ultravioletti alla ricerca di sostanze fluorescenti nelle piante in rapporto ad alcuni fenomeni di patologia vegetale». DE CECCO M. 101.

Personale accademico. — 434, 619.

Presentazione di libri. — 434, 619.

Presentazione di plichi suggellati. 435.

R

Relazioni di Commissioni. — 435, 619.

S

Sismologia. — «Per l'interpretazione delle onde sismiche superficiali». ODDONE E. 64.

T

Talassografia. — «Sulla circolazione dell'Adriatico meridionale». CASTIGLIONI B. 70.

Teoria dei numeri. — «Determinazione del numero delle congruenze $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ aventi tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo p ». SANSONE G. 202.

— «L'equazione cui soddisfa il coefficiente

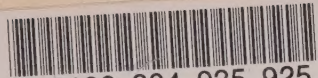
a della congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0$
(mod. p) con p , primo, $p > 3$, perchè
essa abbia tre radici con lo stesso
carattere quadratico modulo p . ID.
280.

Teoria dei numeri. — « Suí corpi al-
gebrici di Galois ». BEDARIDA A. M.
339.

Z

Zoologia. — « La fase "microniscus" di
"Ione thoracica" (Montagu), ottenuta
per allevamento sui Copepodi ». CA-
ROLI F. 321.

— « Studi sulla fisiologia degli insetti (si-
stema nervoso) ». TIRELLI M. 520.



3 8198 304 935 925

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

